F 762 R KAT

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Institut de Recherches Mathématique

1-2

ANUL VI

IANUARIE – IUNIE 1955

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

1-2

ANUL VI

IANUARIE – IUNIE 1955

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE :

ACADEMICIAN S. STOILOV — Redactor responsabil ;
G. VRĂNCEANU — Redactor adjunct; GH. MIHOC;
N. TEODORESCU; T. GANEA; A. HALANAY.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

...ul VI, nr. 1—2 Ianuarie — iunie 1955

SUMAR

Pag.

GR. C. MOISIL, Teoria algebrică a funcţionării schemelor cu contacte de relee în mai mulţi timpi 7

SERGIU VASILACHE, Asupra unor noi probleme la limită pentru anumite clase de ecuaţii integro-diferenţiale sau cu derivate parţiale..... 55

IVAN SINGER, Contribuţi la teoria *KB*-linealelor 79

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Algebre liniare asociative şi comutative şi funcţii monogene ataşate lor 135

TIBERIU MIHĂILESCU, Varietăţi neolonome de tip Ţiţeica-Wilczinski.... 175

C. TELEMAN, Asupra spaţiilor V_5 simetrice 193

DAN HULUBEI, Asupra configuraţiilor relative la echilibrul astatic 203

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome VI, Nos 1—2 janvier — juin 1955

SOMMAIRE

Pag.

GR. C. MOISIL, Théorie algébrique du fonctionnement des schémas à relais à contacts échelonnés 7

SERGIU VASILACHE, Sur quelques nouveaux problèmes aux limites pour certaines classes d'équations intégro-différentielles ou aux dérivées partielles 55

IVAN SINGER, Contributions à la théorie des lattices vectorielles normées (KB-linéaux) 79

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Algébres linéaires associatives et commutatives et fonctions monogènes qui y sont attachées 135

TIBERIU MIHĂILESCU, Variétés non-holonomes du type Ţiţeica-Wilczinski 175

C. TELEMAN, Sur les espaces symétriques V_5 193

DAN HULUBEI, Sur les configurations relatives à l'équilibre astatique .. 203

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том VI, № 1—2 Январь—июнь 1955

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Г. К. МОИСИЛ, Алгебраическая теория схем с релейными контактами многократного действия 7

С. ВАСИЛАКЕ, О некоторых новых граничных задачах для известных классов интегро-дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными 55

И. ЗИНГЕР, К теории KB-линеалов 79

М. Н. РОШКУЛЕЦ, Ассоциативные и коммутативные линейные алгебры и присоединенные к ним моногенные функции 135

Т. МИХЭИЛЕСКУ, Неголономные многообразия типа Цицейка-Вильчинского 175

К. ТЕЛЕМАН, О симметричных пространствах V_5 193

Д. ХУЛУБЕЙ, О конфигурациях, относящихся к астатическому равновесию 203

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

Ref

TEORIA ALGEBRICĂ A FUNCŢIONĂRII SCHEMELOR CU CONTACTE DE RELEE ÎN MAI MULŢI TIMPI *)

DE

ACADEMICIAN GR. C. MOISIL

CAPITOLUL I

ECUAŢIILE DE RECURENŢĂ

Să considerăm o schemă S de mecanism automat cu contacte de relee, care funcţionează în mai mulţi timpi. Fie $A, B, \ldots, C$ elementele receptoare, $X, Y, \ldots, Z$ elementele intermediare, $U, V, \ldots, W$ elementele de execuţie. Fiecare dintre ele se poate afla într-una din cele două poziţii: acţionat sau neacţionat. Vom face ca fiecărui element $A, \ldots, W$ să-i corespundă o variabilă, $a, \ldots, w$, care va lua valoarea 1 cînd elementul este acţionat — contactul este închis — şi valoarea 0 cînd elementul este neacţionat — contactul este deschis. Vom numi $\mathcal{L}_2$ mulţimea celor două elemente 0 şi 1. Vom numi *starea* mecanismului în timpul N, valorile

$$S_N: a_N, b_N, \ldots, c_N, x_N, y_N, \ldots, z_N, u_N, v_N, \ldots, w_N$$

pe care le au variabilele $a, \ldots, w$ în timpul N de funcţionare. Presupunem că succesiunea timpilor este discretă

$$0, \text{ I}, \text{ II}, \ldots, N, N+1, \ldots$$

Vom numi evoluţia mecanismului, şirul de stări pe care le ia în timp

$$S_0, S_I, \ldots, S_N, \ldots$$

Dacă mecanismul recepţionează o comandă C, atunci $a, b, \ldots, c$ iau anume valori. Mecanismul aflîndu-se într-o *poziţie iniţială* a elementelor intermediare

$$P_0: x_0, y_0, \ldots, z_0,$$

atît timp cît comanda rămîne neschimbată, această poziţie va evolua în timp, în timpul N poziţia elementelor intermediare fiind

$$P_N: x_N, y_N, \ldots, z_N.$$

Şirul de poziţii în diferiţi timpi

$$P_0, P_I, \ldots, P_N,$$

---

*) Lucrarea a fost prezentată în şedinţa din 18 iunie 1954 a secţiunii de ştiinţe matematice şi fizice a Academiei R.P.R.

sub aceeași comandă C va constitui *evoluția proprie* (funcționarea proprie) a mecanismului la comanda C.

Dacă se dă starea mecanismului în timpul N, S_N, și dacă se dă o comandă ulterioară C, în timpul $N+1$, mecanismul va avea o stare S_{N+1}, care este determinată în felul următor. Valorile $a_{N+1}, b_{N+1}, \ldots, c_{N+1}$ sînt cele ce corespund comenzii C recepționate; le vom numi simplu $a, b, \ldots, c$. Valorile $x_{N+1}, y_{N+1}, \ldots, z_{N+1}$ depind de comanda C și de valorile anterioare ale variabilelor ce corespund elementelor intermediare:

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= f(a, b, \ldots, c, x_N, y_N, \ldots, z_N), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{N+1} &= g(a, b, \ldots, c; x_N, y_N, \ldots, z_N). \end{aligned} \tag{1}$$

Valorile $u_N, v_N, \ldots, w_N$ depind de comanda C și de valorile variabilelor ce corespund elementelor intermediare,

$$\begin{aligned} u_N &= \varphi(a, b, \ldots c, x_N, y_N, \ldots, z_N), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_N &= \psi(a, b, \ldots, c, x_N, y_N, \ldots, z_N). \end{aligned} \tag{2}$$

Pentru a studia evoluția proprie a mecanismului sub comanda C avem nevoie să studiem ecuațiile (1), unde $a, b, \ldots, c$ sînt constante. Sistemul de ecuații (1) va fi numit sistemul de *ecuații de recurență* ale mecanismului. Metodele școlii sovietice [1] ne permit să construim cu ușurință ecuațiile de recurență ale unui mecanism automat cu contacte de relee, atunci cînd schema lui nu are decît conexiuni în serie și paralel. În cele ce urmează vom studia exclusiv acest caz.

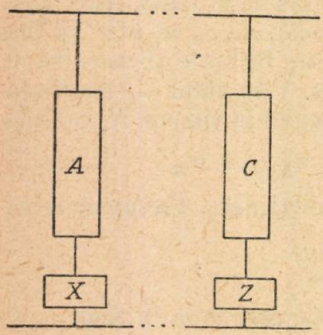


Fig. 1

Ne vom mărgini în acest studiu la sistemele cu relee în paralel. Aceste sisteme se prezintă ca în figura 1. Formula de structură a schemei este

$$AX + BY + \ldots + CZ,$$

unde $A, \ldots, C$ sînt dipoli de contacte, conținînd contactele butonilor de comandă $a, \ldots, c$ și contactele releelor $X, \ldots, Z$; contactele de închidere ale unui releu X vor fi notate x, iar contactele lui de deschidere vor fi notate $\bar{x}$. Așadar,

$$\begin{aligned} A &= f(a, \ldots, c, x, \ldots, z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C &= g(a, \ldots, c, x, \ldots, z). \end{aligned}$$

Dacă în timpul N variabilele $a, \ldots, c$ au valorile corespunzătoare comenzii, iar $x, \ldots, z$ au valorile $x_N, \ldots, z_N$, atunci $A, \ldots, C$ au anume valori, iar releul X este acționat dacă $A = 1$, dezacționat dacă $A = 0$. Deci $f(a, \ldots c, x, \ldots, z)$ este funcția de lucru a releului X. Dacă $f(a, \ldots, c, x_N, \ldots, z_N) = 1$ atunci X este acționat și, în timpul $N+1$, $x_{N+1} = 1$, $\bar{x}_{N+1} = 0$; deci

$$x_{1+N} = f(a, \ldots, c, x_N, \ldots, z_N).$$

La fel construim celelalte formule din sistemul (1).

Descrierea de mai sus presupune că contactele nu sînt temporizate, că nu se ține seamă de timpul de anclanșare și de declanșare al contactelor, că butonii funcționează în mod ideal, că nu se ține seama de fenomenele tranzitorii la stabilirea și la întreruperea curentului în înfășurarea releului. Aceste probleme vor face obiectul unor studii ulterioare.

Cunoscute fiind ecuațiile de recurență (1), putem analiza funcționarea schemei.

Dată fiind poziția inițială $x_0, y_0, \ldots, z_0$ a mecanismului, sistemul (1) ne permite să construim poziția în timpul I;

$$x_{\mathrm{I}} = f(a, \ldots, c; x_0, \ldots, z_0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{\mathrm{I}} = f(a, \ldots, c; x_0, \ldots, z_0).$$

Deducem poziția în timpul II:

$$x_{\mathrm{II}} = f(a, \ldots, c; x_{\mathrm{I}}, \ldots, z_{\mathrm{I}}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{\mathrm{II}} = g(a, \ldots, c; x_{\mathrm{I}}, \ldots, z_{\mathrm{I}}),$$

și așa mai departe. Deci *evoluția proprie a sistemului sub comandă dată este determinată de cunoașterea poziției inițiale.*

Să observăm că *dacă n este numărul elementelor intermediare, sub comandă dată, mecanismul nu poate avea mai mult decît 2^n stări.* Într-adevăr, sub comandă dată, $a, b, \ldots, c$ fiind constante și $u, v, \ldots, w$ fiind funcții numai de $a, b, \ldots, c, x, y, \ldots, z$, starea este determinată de poziția $(x, y, \ldots, z)$ a celor n elemente intermediare; aceste poziții nu pot fi decît cel mult 2^n.

Fie

$$P_0, P_{\mathrm{I}}, \ldots, P_N, \ldots$$

pozițiile elementelor intermediare, sub comandă dată. Ele sînt în număr finit, deci nu sînt toate diferite. Există deci două numere naturale J și L, astfel ca P_J și P_L să fie identice. Există deci un număr natural H, care este cel mai mic, astfel ca în șirul

$$P_H, P_{H+1}, \ldots$$

să existe un număr L cu $P_H = P_L$, dar în șirul

$$P_0, P_{\mathrm{I}}, \ldots, P_H, \tag{3}$$

să nu existe două poziții identice. Există deci un număr natural $K \neq 0$, astfel ca $P_{H+K} = P_H$ dar în șirul

$$P_H, P_{H+1}, \ldots, P_{H+K-1},$$

să nu existe două poziții identice.

Următoarele cazuri sînt de remarcat.

$H = 0$, $K = 1$. În acest caz poziția P_{I} este identică cu P_0, deci poziția inițială este *indiferentă* la comanda C.

$H > 0$, $K = 1$. În acest caz, evoluția proprie este

$$P_0, P_{\mathrm{I}}, \ldots, P_H, P_H, \ldots, P_H \ldots,$$

deci schema în $H + 1$ timpi are o funcționare succesivă; schema se *stabilizează* în poziția din timpul H.

$H = 0$. $K > 1$. În acest caz, evoluția este

$$P_0, \ldots, P_{K-1}, P_0, \ldots, P_{K-1}, P_0, \ldots,$$

deci după perioada K schema revine la aceeași poziție

$$P_{N+K} = P_N,$$

deci schema are o funcționare *repetată* în K timpi.

$H > 0$, $K > 1$. În primii H timpi schema are o evoluție de acomodare, cu acțiune succesivă în H timpi

$$P_0, P_1, \ldots, P_{H-1},$$

iar începînd cu timpul H, schema intră într-o evoluție periodică

$$P_H, P_{H+1}, \ldots, P_{H+K-1}, P_H, P_{H+1}, \ldots, P_{H+K-1}, \ldots,$$

cu acțiune repetată în K timpi,

$$P_{N+K} = P_N \qquad (N \geqslant H),$$

deci schema are o funcționare *succesivă-repetată*.

Cele spuse mai sus se referă la evoluția proprie a schemei sub comandă dată, pornind de la o poziție inițială dată.

Dacă poziția inițială este poziția de repaus, atunci vom spune că avem de-a face cu *funcționarea schemei pornind din repaus, sub comanda C*.

Să considerăm mai multe comenzi C', C'', ..., $C^{(n)}$ și un *program de comenzi*:

pornind din repaus,
acționăm comanda C',
acționăm comanda C'',
.....
acționăm comanda $C^{(n)}$.

Pentru a studia funcționarea schemei avem de descris:

funcționarea F' a schemei pornind din repaus sub comanda C';

funcționarea F'' a schemei sub comanda C'', pornind ca poziție inițială, din una din pozițiile evoluției F';

funcționarea F''' a schemei sub comanda C''', pornind ca poziție inițială din una din pozițiile evoluției F'' etc.

Toate pozițiile schemei la care ajungem în acest mod coustituie *poziții normale ale schemei, pentru programul de comenzi* C', C'',...

Pozițiile normale ale schemei pentru diferitele programe de comenzi vor fi numite *poziții normale ale schemei*.

Să observăm că funcționarea schemei la diferite programe de comenzi poate fi diferită.

Totalitatea pozițiilor normale ale schemei poate să nu coincidă cu totalitatea pozițiilor schemei. O poziție a schemei care nu este o poziție normală, deci la care nu se poate ajunge printr-un program de comenzi, este un *deranjament scurt*. La o atare poziție nu se poate ajunge decît printr-o intervenție exterioară.

Dacă dorim să facem sinteza unei scheme care să execute un program dat, vom considera pe rînd programele la comenzile date.

Să presupunnem că la o comandă dată C schema are de executat un anume program, dat prin pozițiile succesive

$$P_0, P_1, \ldots, P_N, \qquad N = H + K.$$

Aceasta cere ca funcțiile $f, \ldots, g$ să satisfacă condițiile

$$\begin{aligned} x_I &= f(a, \ldots, c, \quad x_0, \ldots, z_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_I &= g(a, \ldots, c, \quad x_0, \ldots, z_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_N &= f(a, \ldots, c, \quad x_{N-1}, \ldots, z_{N+1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_N &= g(a, \ldots, c, \quad x_{N-1}, \ldots, z_{N-1}), \end{aligned} \tag{4}$$

$a, \ldots, c$ fiind constante pentru comanda C. Scriind toate condițiile (4) pentru diferitele comenzi ale programului și pentru toate programele date, avem pentru determinarea funcțiilor $f, \ldots, g$ în $\mathcal{L}_2$ un șir de condiții de interpolare.

Se poate întîmpla ca aceste condiții să determine funcțiile $f, \ldots, g$ în mod univoc.

Se poate de asemenea întîmpla ca aceste condiții să nu fie compatibile.

Sinteza schemei este astfel făcută, cînd condițiile din program sînt compatibile. Se poate însă ca unii coeficienți ai funcțiilor $f, \ldots, g$ să rămînă nedeterminați.

În acest caz putem încerca să determinăm funcțiile $f, \ldots, g$ prin diferite condiții. De exemplu, putem să impunem deranjamentelor scurte anume condiții. Iată astfel de condiții:

în urma producerii unui deranjament scurt, schema să funcționeze normal;

în urma producerii unui deranjament scurt, schema să se blocheze în poziția deranjată;

în urma producerii unui deranjament scurt, schema să pulseze după un program dat.

Se vede că determinarea schemei prin astfel de condiții conduce tot la o problemă de interpolare în $\mathcal{L}_2$.

Să observăm că, pe lîngă deranjamentele scurte, descrise mai sus, se pot provoca anume deranjamente pe care le vom numi *deranjamente lungi*. Vom spune că avem de-a face cu un deranjament lung, atunci cînd unul sau mai multe din contacte se fixează într-o anume poziție.

Studiul schemei la un deranjament lung revine la studiul unei alte scheme deduse din schema dată, dînd unora din variabilele $a, \ldots, c, x, \ldots, z$ anume valori fixe. Avem deci:

deranjamente ale comenzilor $a, \ldots, c$;

deranjamente ale releelor $x, \ldots, z$.

Se pot cere anume condiții de detectare a deranjamentelor lungi, de tipul:

în cazul deranjamentului schema să se blocheze;

deranjamentul să poată fi detectat printr-o anume evoluție (în genere repetată) a schemei deranjate.

Vom da în cele ce urmează exemple de analiza și de sinteza schemelor cu funcționare în mai mulți timpi.

CAPITOLUL II

SCHEME CU ACȚIUNE SUCCESIVĂ

Exemplul I. Să considerăm schema din figura 2; ea are un buton de comandă a și două relee X, Y, primul cu un contact de închidere x.

La acționarea butonului a se conectează releul X, se închide contactul x și astfel se conectează releul Y, așadar avem graficul din figura 3. În timpul 0, x și y nu sînt acționați

$$x_0 = y_0 = 0.$$

După ce a este acționat

$$a = 1$$

în timpul I, x este acționat, dar y nu,

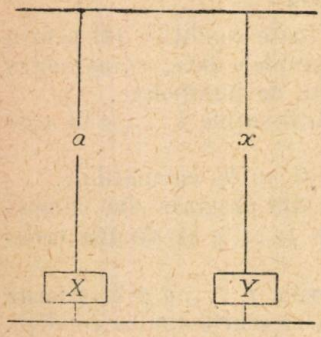


Fig. 2

$$a = 1, \quad x_I = 1, \quad y_I = 0,$$

iar în timpul II, a, x, y sînt acționați

$$a = 1, \quad x_{II} = y_{II} = 1.$$

La dezacționarea lui a, releul X se deconectează, deci contactul x se deschide, deci releul Y se dezacționează. Căpătăm graficul din figura 4, deci,

$$a = 1, \quad x_0 = y_0 = 1,$$
$$a = 0, \quad x_I = 0 \quad y_I = 1,$$
$$a = 0, \quad x_{II} = y_{II} = 0.$$

Avem deci o schemă care, atît la acționarea cît și la dezacționarea butonului a, are o funcționare în 3 timpi.

Descrierea funcționării se explică cu ajutorul metodei date astfel.

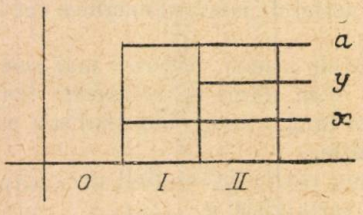


Fig. 3

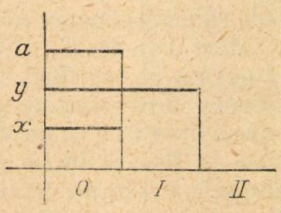


Fig. 4

Formula de structură a schemei este

$$aX + xY,$$

deci funcțiile de lucru ale releelor X, Y sînt

$$f_X = a,$$
$$f_Y = x$$

Aceste funcții ne arată că, dacă în timpul N, x_N și y_N sînt valorile variabilelor x, y care descriu starea contactelor x, y, atunci în timpul $N + 1$ avem

$$x_{N+1} = a,$$
$$y_{N+1} = x_N. \qquad (I)$$

În cazul acționării se pornește de la starea inițială

$$x_0 = y_0 = 0,$$

și în formulele (I) se face $a = 1$, deci

$$x_I = a = 1, \quad y_I = x_0 = 0,$$
$$x_{II} = 1, \quad y_{II} = x_I = 1,$$

și această situație este stabilă, căci dacă facem în formulele (I) $a = 1$ $x_N = y_N = 1$, căpătăm $x_{N+1} = y_{N+1} = 1$.

În cazul dezacționării se pornește de la starea inițială

$$x_0 = y_0 = 1$$

și în formulele (I) se face $a = 0$, deci

$$x_I = 0, \quad y_I = x_0 = 1,$$
$$x_{II} = 0, \quad y_{II} = x_I = 0.$$

Se vede că pozițiile schemei în aceste programe sînt

$$x = 0, \quad y = 0,$$
$$x = 1, \quad y = 0,$$
$$x = 1, \quad y = 1,$$
$$x = 0, \quad y = 1,$$

deci nu există deranjamente, căci toate cele patru sisteme de valori sînt atinse în evoluția normală.

De asemenea, să observăm că formulele (I) dau

$$x_{N+2} = a,$$
$$y_{N+2} = a,$$

deci, oricare ar fi poziția inițială, schema se stabilizează la poziția $x = y = a$.

Reciproc, să căutăm schemele care să îndeplinească condițiile de lucru descrise mai sus:

I. Schema nu intră în funcțiune, dacă este în repaus, fără să acționăm butonul a.

II. Dacă pornim din repaus și acționăm butonul a, se conectează releul X, apoi releul Y și rămîn amîndouă conectate.

III. Dacă din această poziție dezacționăm pe a, se deconectează X, apoi Y.

Va trebui să determinăm funcțiile

$$x_{N+1} = f(a, x_N, y_N),$$
$$y_{N+1} = g(a, x_N, y_N),$$

astfel încît, condițiile puse să fie satisfăcute. Să transcriem aceste condiții.

I. Dacă schema este în repaus ($x_0 = y_0 = 0$) și a este neacționat ($a = 0$) schema rămîne în repaus, deci

$$f(0, 0, 0) = g(0, 0, 0) = 0$$

II. Dacă schema este în repaus ($x_0 = y_0 = 0$) şi se acţionează a ($a = 1$), se conectează mai întîi numai releul X ($x_I = 1$, $y_I = 0$) apoi şi releul Y ($x_{II} = 1$, $y_{II} = 1$) şi rămîn amîndouă conectate ($x_{III} = 1$, $y_{III} = 1$), deci

$$f(1, 0, 0) = 1, \qquad g(1, 0, 0) = 0,$$
$$f(1, 1, 0) = 1, \qquad g(1, 1, 0) = 1,$$
$$f(1, 1, 1) = 1, \qquad g(1, 1, 1) = 1.$$

III. Dacă din această poziţie ($x_{III} = 1$, $y_{III} = 1$) se dezacţionează a ($a = 0$), se deconectează mai întîi releul X ($x = 0$, $y = 1$) apoi şi releul Y ($x = 0$, $y = 0$), deci

$$f(0, 1, 1) = 0, \qquad g(0, 1, 1) = 1$$
$$f(0, 0, 1) = 0, \qquad g(0, 0, 1) = 0.$$

Cele două funcţii f şi g de 3 variabile a, x, y au $2 \times 8 = 16$ coeficienţi, deci rămîn 4 coeficienţi nedeterminaţi şi anume

$$\alpha = f(0, 1, 0), \qquad \beta = f(1, 0, 1),$$
$$\gamma = g(0, 1, 0), \qquad \delta = g(1, 0, 1)$$

şi ecuaţiile de recurenţă se scriu

$$x_{N+1} = a\bar{x}_N\bar{y}_N + ax_N\bar{y}_N + ax_Ny_N + \alpha\bar{a}x_N\bar{y}_N + \beta a\bar{x}_Ny_N,$$
$$y_{N+1} = ax_N\bar{y}_N + ax_Ny_N + \bar{a}x_Ny_N + \gamma\bar{a}x_N\bar{y}_N + \delta a\bar{x}\ y_N,$$

deci

$$x_{N+1} = a(x_N + \bar{y}_N) + \alpha\bar{a}x_N\bar{y}_N + \beta a\bar{x}_N\ Y_N,$$
$$y_{N+1} = x_N(a + y_N) + \gamma\ \bar{a}x_N\bar{y}_N + \delta a\bar{x}_Ny_N.$$

Cu $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, căpătăm sistemul

$$x_{N+1} = a(x_N + \bar{y}_N) + a\bar{x}_Ny_N = a\ (x_N + \bar{y}_N + \bar{x}_Ny_N) = a,$$
$$y_{N+1} = x_Ny_N + ax_N + \bar{a}x_N\bar{y}_N = x_N\ (y_N + a + \bar{a}\ \bar{y}_N) = x_N, \qquad (I_1)$$

deci schema din exemplul ce studiem. Dar α, β, γ, δ pot avea fiecare cîte 2 valori, deci condiţiile de mai sus dau 16 scheme.

Cu $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ căpătăm sistemul

$$x_{N+1} = a\ (x_N + \bar{y}_N),$$
$$y_{N+1} = x_N(y_N + a), \qquad (I_2)$$

deci schema cu 6 contacte din figura 5.

Cu $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = 1$; căpătăm sistemul

$$x_{N+1} = a\ (x_N + \bar{y}_N),$$
$$y_{N+1} = x_Ny_N + a\ (x_N + y_N), \qquad (I_3)$$

deci schema cu 8 contacte din figura 6.

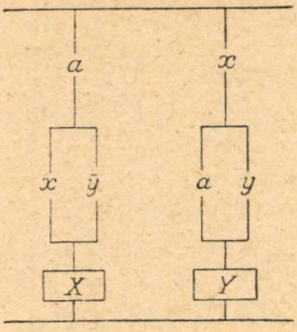


Fig. 5

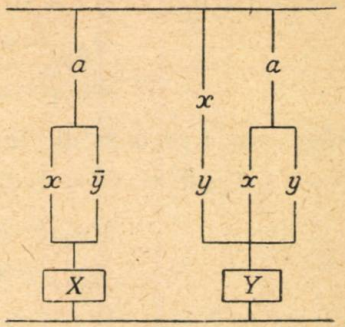


Fig. 6

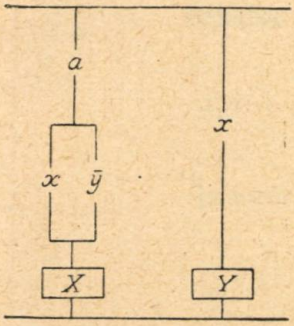


Fig. 7

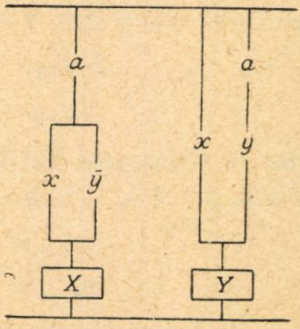


Fig. 8

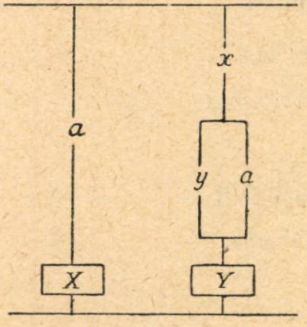


Fig. 9

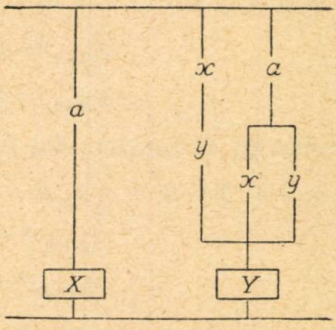


Fig. 10

Cu $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, căpătăm sistemul

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a\,(x_N + \bar{y}_N), \\ y_{N+1} &= x_N, \end{aligned} \tag{I_4}$$

deci schema cu 4 contacte din figura 7.

Cu $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = \delta = 1$, căpătăm sistemul

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a\,(x_N + \bar{y}_N), \\ y_{N+1} &= x_N + a y_N, \end{aligned} \tag{I_5}$$

deci schema cu 6 contacte din figura 8.

Cu $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = \delta = 0$, căpătăm sistemul

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a, \\ y_{N+1} &= x_N (y_N + a), \end{aligned} \tag{I_6}$$

deci schema cu 4 contacte din figura 9.

Cu $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$, căpătăm sistemul

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a, \\ y_{N+1} &= x y_N + a\,(x_N + y_N), \end{aligned} \tag{I_7}$$

deci schema cu 6 contacte din figura 10.

Cu $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$ căpătăm sistemul

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a, \\ y_{N+1} &= x_N + a y_N, \end{aligned} \tag{I_8}$$

deci schema cu 4 contacte din figura 11.

Cu $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = 0$ căpătăm sistemul

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a\,(x_N + \bar{y}_N) + x_N \bar{y}_N, \\ y_{N+1} &= x_N (y_N + a), \end{aligned} \tag{I_9}$$

deci schema cu 8 contacte din figura 12.

Cu $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, $\delta = 1$, căpătăm sistemul

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a\,(x_N + \bar{y}_N) + x_N \bar{y}_N, \\ y_{N+1} &= a\,(x_N + y_N) + x_N y_N, \end{aligned} \tag{I_{10}}$$

deci schema cu 10 contacte din figura 13.

Cu $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, căpătăm sistemul

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a\,(x_N + \bar{y}_N) + x_N \bar{y}_N, \\ y_{N+1} &= x_N, \end{aligned} \tag{I_{11}}$$

deci schema cu 6 contacte din figura 14.

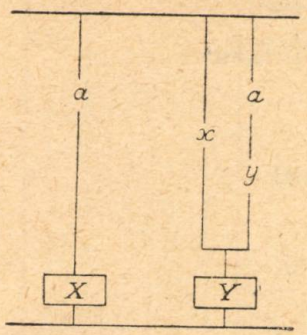


Fig. 11

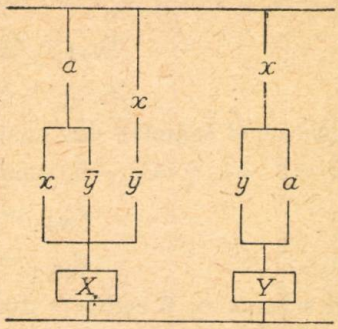


Fig. 12

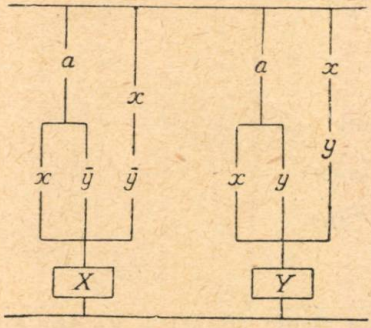


Fig. 13

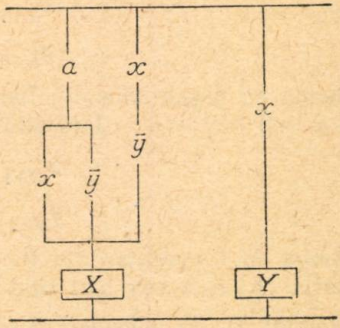


Fig. 14

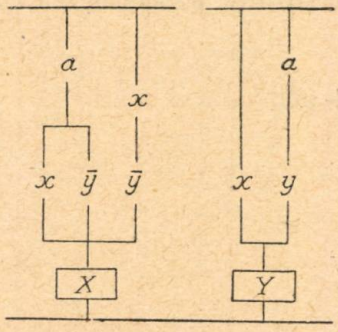


Fig. 15

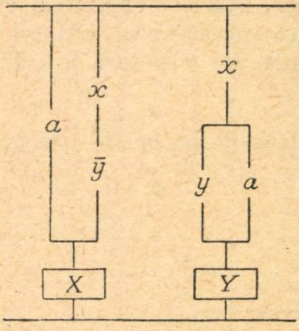


Fig. 16

Cu $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = \delta = 1$ căpătăm sistemul

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a(x_N + \bar{y}_N) + x_N\bar{y}_N, \\ y_{N+1} &= x + ay_N, \end{aligned} \tag{I_{12}}$$

deci schema cu 8 contacte din figura 15.

Cu $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = \delta = 0$, căpătăm sistemul

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a + x_N\bar{y}_N, \\ x_{N+1} &= x_N(y_N + a), \end{aligned} \tag{I_{13}}$$

deci schema cu 6 contacte din figura 16.

Cu $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$, căpătăm sistemul

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a + x_N\bar{y}_N, \\ y_{N+1} &= x_N y_N + a(x_N + y_N), \end{aligned} \tag{I_{14}}$$

deci schema cu 8 contacte din figura 17.

Cu $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $\delta = 0$, căpătăm sistemul

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a + x_N\bar{y}_N, \\ y_{N+1} &= x_N \end{aligned} \tag{I_{15}}$$

deci schema cu 4 contacte din figura 18.

Cu $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ căpătăm sistemul

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a + x_N\bar{y}_N, \\ y_{N+1} &= x_N + ay_N, \end{aligned} \tag{I_{16}}$$

deci schema cu 6 contacte din figura 19.

Soluția (I_1) este cea mai simplă.

Exemplul II. Să considerăm schema din figura 20, [1]*). Ea are butonul de comandă a și releele X, Y, Z, cu contactele de închidere x, y.

Acționînd butonul a se conectează X, se închide x, se conectează Y, se închide y și se conectează Z. Deci la acționarea lui a avem evoluția din figura 21.

Dezacționînd pe a se deconectează X, se deschide x, se deconectează Y, se deschide y, se deconectează Z, deci la dezacționarea lui a avem evoluția din figura 22.

Așadar, atît la acționarea, cît și la dezacționarea butonului, schema are o funcționare succesivă în 4 timpi.

Formula de structură a schemei este

$$aX + xY + yZ,$$

deci funcțiile de lucru ale releelor sînt

$$\begin{aligned} f_X &= a, \\ f_Y &= x, \\ f_Z &= y. \end{aligned}$$

*) p. 25—26, fig. 14.

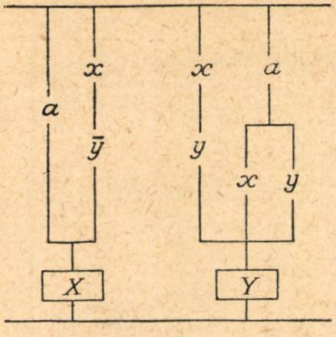


Fig. 17

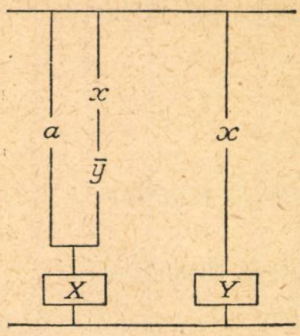


Fig. 18

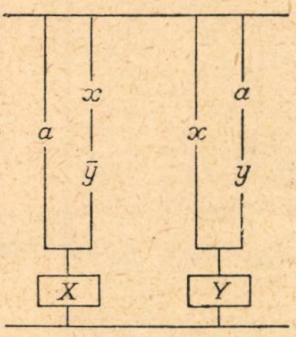


Fig. 19

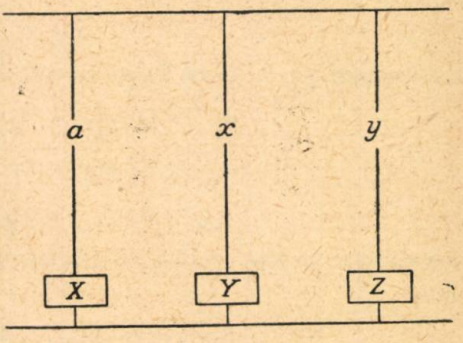


Fig. 20

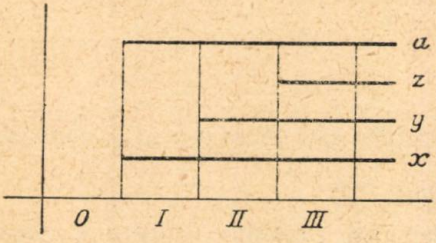


Fig. 21

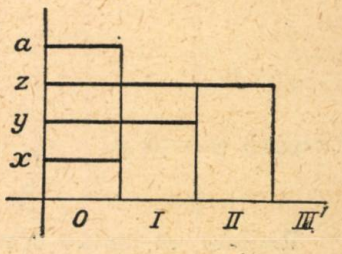


Fig. 22

Se deduce că relațiile de recurență sînt

$$x_{N+1} = a,$$
$$y_{N+1} = x_N, \qquad \text{(II)}$$
$$z_{N+1} = y_N.$$

Se vede că acționînd pe a, adică luînd $a = 1$, și pornind din repaus

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

avem conform formulelor (II),

$$x_{\text{I}} = 1,\ y_{\text{I}} = z_0 = 0,\ z_{\text{I}} = y_0 = 0,$$
$$x_{\text{II}} = 1,\ y_{\text{II}} = x_{\text{I}} = 1,\ z_{\text{II}} = y_{\text{I}} = 0,$$
$$x_{\text{III}} = 1,\ y_{\text{III}} = x_{\text{II}} = 1,\ z_{\text{III}} = y_{\text{II}} = 1,$$

și că această situație este stabilă, căci dacă $a = 1$ și

$$x_N = y_N = z_N = 1, \quad \text{atunci} \quad x_{N+1} = y_{N+1} = z_{N+1} = 1.$$

Pornind de la această situație

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1$$

și dezacționînd pe a, adică luînd $a = 0$, formulele (I) dau

$$x_{\text{I}} = 0,\ y_{\text{I}} = x_0 = 1,\ z_{\text{I}} = y_0 = 1,$$
$$x_{\text{II}} = 0,\ y_{\text{II}} = x_{\text{I}} = 0,\ z_{\text{II}} = y_{\text{I}} = 1,$$
$$x_{\text{III}} = 0,\ y_{\text{III}} = x_{\text{II}} = 0,\ z_{\text{III}} = y_{\text{II}} = 0$$

și această situație este stabilă, căci luînd $a = 0$ și $x_N = y_N = z_N = 0$, formulele (II) dau

$$x_{N+1} = 0,\ y_{N+1} = 0,\ z_{N+1} = 0.$$

Să observăm că formulele (II) dau

$$x_{N+2} = a,$$
$$y_{N+2} = a,$$
$$z_{N+2} = y_{N+1}$$

și

$$x_{N+3} = a,$$
$$y_{N+3} = a,$$
$$z_{N+3} = a$$

și această situație $x_H = y_H = z_H = a$ este stabilă, căci din ea și din (II) obținem

$$x_{H+1} = y_{H+1} = z_{H+1} = a.$$

Reciproc, să căutăm schemele care îndeplinesc condițiile de lucru descrise mai sus:

I. Schema nu intră în funcțiune, dacă este în repaus, fără să acționăm butonul a.

II. La acționarea butonului a se conectează pe rînd releele X, Y, Z și rămîn conectate.

III. La dezacționarea butonului a, se deconectează pe rînd releele X, Y, Z.

Ecuațiile de recurență

$$x_{N+1} = f(a, x_N, y_N, z_N),$$
$$y_{N+1} = g(a, x_N, y_N, z_N),$$
$$z_{N+1} = h(a, x_N, y_N, z_N),$$

trebuie să satisfacă condițiile cerute de îndeplinirea programului de mai sus.

Condiția I cere ca, dacă $a = 0$ și $x_N = y_N = z_N = 0$, să avem

$$x_{N+1} = y_{N+1} = z_{N+1} = 0,$$

deci

$$f(0, 0, 0, 0) = 0,\ g(0, 0, 0, 0) = 0, h(0, 0, 0, 0) = 0.$$

Condiția II cere ca, dacă $a = 1$ și $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, să avem

$$x_{\text{I}} = 1,\ y_{\text{I}} = 0,\ z_{\text{I}} = 0,$$
$$x_{\text{II}} = 1, y_{\text{II}} = 1,\ z_{\text{II}} = 0,$$
$$x_{\text{III}} = 1, y_{\text{III}} = 1,\ z_{\text{III}} = 1.$$
$$x_{\text{IV}} = 1, y_{\text{IV}} = 1,\ z_{\text{IV}} = 1,$$

deci

$$f(1, 0, 0, 0) = 1, \quad g(1, 0, 0, 0) = 0, \quad h(1, 0, 0, 0) = 0,$$
$$f(1, 1, 0, 0) = 1, \quad g(1, 1, 0, 0) = 1, \quad h(1, 1, 0, 0) = 0,$$
$$f(1, 1, 1, 0) = 1, \quad g(1, 1, 1, 0) = 1, \quad h(1, 1, 1, 0) = 1,$$
$$f(1, 1, 1, 1) = 1, \quad g(1, 1, 1, 1) = 1, \quad h(1, 1, 1, 1) = 1.$$

Condiția III cere ca, dacă $a = 0$ și $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, să avem

$$x_{\text{I}} = 0,\ y_{\text{I}} = 1,\ z_{\text{I}} = 1,$$
$$x_{\text{II}} = 0,\ y_{\text{II}} = 0,\ z_{\text{II}} = 1,$$
$$x_{\text{III}} = 0,\ y_{\text{III}} = 0,\ z_{\text{III}} = 0,$$

deci

$$f(0, 1, 1, 1) = 0, \quad g(0, 1, 1, 1) = 1, \quad h(0, 1, 1, 1) = 1$$
$$f(0, 0, 1, 1) = 0, \quad g(0, 0, 1, 1) = 0, \quad h(0, 0, 1, 1) = 1$$
$$f(0, 0, 0, 1) = 0, \quad g(0, 0, 0, 1) = 0, \quad h(0, 0, 0, 1) = 0.$$

Se deduce că $f(a, x, y, z)$, $g(a, x, y, z)$, $h(a, x, y, z)$ sînt de forma

$$f(a, x, y, z) = a\bar{x}y\bar{z} + ax\bar{y}\bar{z} + axy\bar{z} + \lambda_1 \bar{a}\bar{x}y\bar{z} + \lambda_2 \bar{a}x\bar{y}\bar{z} + \lambda_3\, \bar{a}x\bar{y}z +$$
$$+ \lambda_4 \bar{a}xyz + \lambda_5\, a\bar{x}\bar{y}z + \lambda_6\, a\bar{x}y\bar{z} + \lambda_7\, a\bar{x}yz + \lambda_8\, axy\bar{z} =$$
$$= a(x + \bar{y}\bar{z})(y + \bar{z}) + \bar{a}(\lambda_1 \bar{x}y\bar{z} + \lambda_2 x\bar{y}\bar{z} + \lambda_3\, x\bar{y}z + \lambda_4 xyz) + a(\lambda_5 \bar{x}\bar{y}z +$$
$$\lambda_6\, \bar{x}y\bar{z} + \lambda_7\, \bar{x}yz + \lambda_8\, x\bar{y}z),$$

$$g(a, x, y, z) = ax\bar{y}\bar{z} + axy\bar{z} + axyz + \bar{a}xyz + \mu_1 \bar{a}\bar{x}y\bar{z} + \mu_2 \bar{a}x\bar{y}\bar{z} + \mu_3 \bar{a}\bar{x}\bar{y}z +$$
$$+\mu_4 \bar{a}xy\bar{z} + \mu_5 a\bar{x}\bar{y}z + \mu_6 a\bar{x}y\bar{z} + \mu_7 a\bar{x}yz + \mu_8 ax\bar{y}z = xyz + ax\bar{z} + \bar{a}\,(\mu_1\bar{x}\bar{y}\bar{z} +$$
$$+\mu_2 x\bar{y}\bar{z} + \mu_3\bar{x}\bar{y}z + \mu_4 xy\bar{z} + (a\,\mu_5\,\bar{x}\bar{y}z + \mu_6\,\bar{x}y\bar{z} + \mu_7\,\bar{x}yz + \mu_8 x\bar{y}z),$$
$$h(a, x, y, z) = axyz + axyz + \bar{a}xyz + \bar{a}\bar{x}yz + \nu_1 \bar{a}\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \nu_2 \bar{a}x\bar{y}\bar{z} + \nu_3 \bar{a}\bar{x}\bar{y}z +$$
$$+ \nu_4 \bar{a}xyz + \nu_5 a\bar{x}\bar{y}z + \nu_6 a\bar{x}y\bar{z} + \nu_7 a\bar{x}yz + \nu_8 ax\bar{y}z = axy + \bar{a}yz + \bar{a}\,(\nu_1\,\bar{x}y\bar{z} +$$
$$+ \nu_2\,x\bar{y}\bar{z} + \nu_3\,x\bar{y}z + \nu_4\,xy\bar{z}) + a\,(\nu_5\,\bar{x}\bar{y}z + \nu_6\,\bar{x}y\bar{z} + \nu_7\bar{x}yz + \nu_8\,x\bar{y}z).$$

Deoarece $\lambda_1, \ldots, \nu_8$ sînt arbitrari, avem 2^{24} scheme care îndeplinesc condițiile.

Dacă luăm $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 1$, atunci

$$f(a, x, y, z) = a.$$

Dacă luăm $\mu_1 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = 0$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_8 = 1$, atunci

$$g(x, y, z) = x.$$

Dacă luăm $\nu_1 = \nu_4 = \nu_6 = \nu_7 = 1$, $\nu_2 = \nu_3 = \nu_5 = \nu_8 = 0$, atunci

$$h(x, y, z) = y.$$

Deci pentru aceste valori regăsim schema (II) din figura 20.

Exemplul III. Să considerăm schema din figura 23, [1]*), cu două butoane de comandă, unul a normal deschis, altul b normal închis și cu un releu X avînd un contact de închidere x.

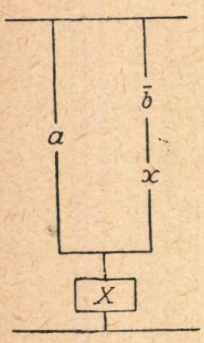


Fig. 23

La acționarea lui a se conectează X și, b fiind normal închis, curentul trece prin b și x și-l blochează pe X, chiar dacă dezacționăm pe a.

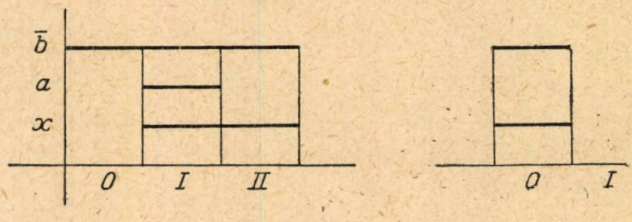


Fig. 24

Dacă a este dezacționat, la acționarea lui b, circuitul nu trece prin b, x se deschide și X se liberează.

Schema funcționează în doi timpi la toate aceste programe; graficul funcționării este dat în figura 24.

Deoarece formula de structură a schemei este

$$(a + \bar{b}x)\,X,$$

funcția de lucru a releului X este

$$f_X = a + \bar{b}x,$$

deci relația de recurență este

$$x_{N+1} = a + \bar{b}x_N. \qquad \text{(III)}$$

*) p. 24, fig. 12.

Dacă plecăm din repaus

$$x_0 = 0,$$

şi acţionăm pe a, $(a = 1,\ b = 0)$, căpătăm

$$x_1 = 1,$$

şi această stare este stabilă căci $x_{II} = 1$.

Dacă plecăm din această stare,

$$x_0 = 1,$$

b nefiind acţionat, $b = 0$, avem

$$x_I = 1,$$

oricare ar fi a, acţionat sau nu.

Dacă plecăm din această stare

$$x_0 = 1,$$

atunci,

$$x_I = a + \overline{b},$$

deci această stare este stabilă, $x_I = 1$, dacă a este acţionat sau dacă b nu este acţionat. Dimpotrivă,

$$x_I = 0$$

dacă b este acţionat iar a nu.

Avem, din (III)

$$x_{N+2} = a + \overline{b}\ x_{N+1} = a + \overline{b}\,(a + \overline{b}x_N) = a + a\overline{b} + \overline{b}x_N = a + \overline{b}x_N,$$

deci

$$x_{N+2} = x_{N+1},$$

deci schema se stabilizează la poziţia x_{N+1}.

Reciproc, să căutăm să determinăm schema care îndeplineşte condiţiile descrise mai sus:

I. Dacă schema este în repaus ea rămîne în repaus.

II. Dacă pornim din repaus şi acţionăm butonul a, se conectează releul X, iar dacă apoi îl dezacţionăm pe a, X rămîne conectat.

III. Dacă acţionăm apoi butonul b, X se deconectează.

Va trebui să determinăm funcţia

$$x_{N+1} = f\,(a,\ b,\ x_N),$$

astfel ca următoarele condiţii să fie satisfăcute.

I. Dacă schema este în repaus ($x_0 = 0$) şi deci a şi b sînt neacţionate ($a = b = 0$), atunci schema rămîne în repaus ($x_I = 0$).

II. 1. Dacă schema este în repaus ($x_0 = 0$) şi dacă îl acţionăm pe a, dar nu pe b $(a = 1,\ b = 0)$, X se conectează $(x_I = 1)$.

II. 2. Dacă din această poziţie ($x_I = 1$), îl dezacţionăm pe a $(a = 0,\ b = 0)$, x rămîne conectat $(x_{II} = 1)$.

III. Dacă din această poziţie ($x_{II} = 1$) îl acţionăm pe b $(a = 0,\ b = 1)$, x se deconectează $(x_{III} = 0)$.

Avem condițiile

$$f(0, 0, 0) = 0,$$
$$f(1, 0,0) = 1,$$
$$f(0, 0, 1) = 1,$$
$$f(0, 1, 1) = 0.$$

Pentru a determina cei 8 coeficienți ai lui $f(a, b, x_N)$ avem aceste patru relații, deci 4 coeficienți și anume

$$\alpha = f(1, 1, 1),\ \beta = f(1, 1, 0),$$
$$\gamma = f(1, 0, 1),\ \delta = f(0, 1, 0),$$

rămîn nedeterminați, ecuația de recurență este

$$x_{N+1} = a\bar{b}\bar{x}_N + \bar{a}\bar{b}x_N + \alpha\, abx_N + \beta\, ab\bar{x}_N + \gamma\, \bar{a}bx_N + \delta\, \bar{a}b\bar{x}_N.$$

Dacă luăm $\alpha = \beta = \gamma = 1,\ \delta = 0$ avem,

$$x_{N+1} = a\bar{b}\bar{x}_N + \bar{a}\bar{b}x_N + abx_N + ab\bar{x}_N + a\bar{b}x_N =$$
$$= a\,(bx_N + b\bar{x}_N + \bar{b}x_N + \bar{b}\bar{x}_N) + \bar{a}\bar{b}x_N$$
$$= a + \bar{a}\bar{b}x_N$$
$$= a + \bar{b}x_N,$$

deci regăsim schema III din figura 23.

Dacă dăm lui α, β, γ, δ diferite valori, obținem alte 15 scheme și anume:

Schema (III_1) din figura 25 pentru $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$:

$$x_{N+1} = a\bar{b}\bar{x}_N + \bar{a}\bar{b}x_N = \bar{b}\,(a\bar{x}_N + \bar{a}x_N);$$

Schema (III_2) din figura 26 pentru $\alpha = \beta = \gamma = 0,\ \delta = 1$:

$$x_{N+1} = (a\bar{b} + \bar{a}b)\,\bar{x}_N + \bar{a}\bar{b}x_N;$$

Schema (III_3) din figura 27 pentru $\alpha = \beta = 0,\ \gamma = 1,\ \delta = 0$:

$$x_{N+1} = \bar{b}\,(a + x_N);$$

Schema (III_4) din figura 28 pentru $\alpha = \beta = 0,\ \gamma = \delta = 1$:

$$x_{N+1} = \bar{b}\,(a + x_N) + \bar{a}\bar{b}\bar{x}_N;$$

Schema (III_5) din figura 29 pentru $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = \delta = 0$:

$$x_{N+1} = a\bar{x}_N + \bar{a}\bar{b}x_N;$$

Schema (III_6) din figura 30 pentru $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 0,\ \delta = 1$:

$$x_{N+1} = (a + b)\,\bar{x}_N + \bar{a}\bar{b}x_N;$$

Schema (III_7) din figura 31 pentru $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 1,\ \delta = 0$:

$$x_{N+1} = a\bar{x}_N + \bar{b}x_N;$$

Schema (III_8) din figura 32 pentru $\alpha = 0,\ \beta = \gamma = \delta = 1$:

$$x_{N+1} = (a + b)\,\bar{x}_N + \bar{b}x_N;$$

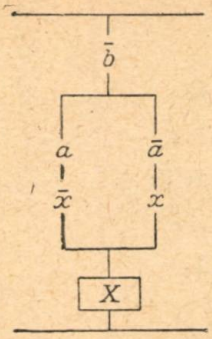


Fig. 25

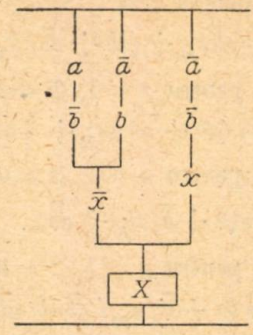


Fig. 26

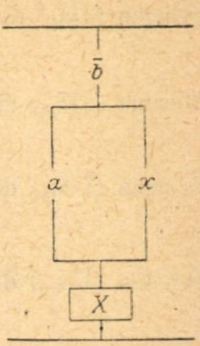


Fig. 27

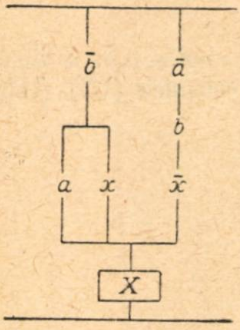


Fig. 28

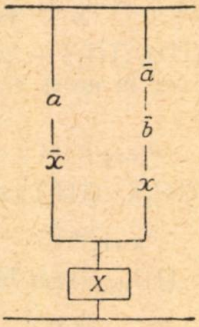


Fig. 29

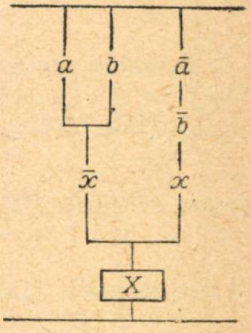


Fig. 30

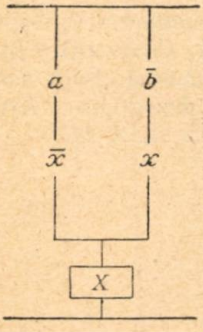


Fig. 31

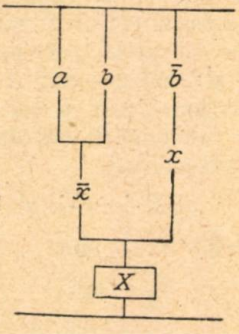


Fig. 32

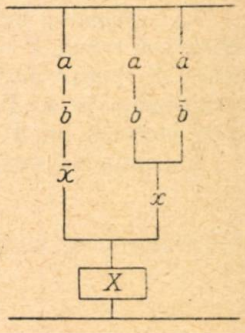


Fig. 33

Schema (III_9) din figura 33 pentru $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = 0$:

$$x_{N+1} = a\bar{b}\bar{x}_N + (ab + \bar{a}\bar{b})\, x_N;$$

Schema (III_{10}) din figura 34 pentru $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, $\delta = 1$:

$$x_{N+1} = (ab + \bar{a}\bar{b})x_N + (a\bar{b} + \bar{a}b)\, x_N;$$

Schema (III_{11}) din figura 35 pentru $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$:

$$x_{N+1} = (a + \bar{b})\, x_N + a\bar{b};$$

Schema (III_{12}) din figura 36 pentru $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = \delta = 1$:

$$x_{N+1} = (a + \bar{b})\, x_N (a\bar{b} + \bar{a}b)\, \bar{x}_N;$$

Schema (III_{13}) din figura 37 pentru $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = \delta = 0$:

$$x_{N+1} = a\bar{x}_N + (ab + \bar{a}\bar{b})x_N;$$

Schema (III_{14}) din figura 38 pentru $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$:

$$x_{N+1} = (a + b)\, \bar{x}_N + (ab + \bar{a}\bar{b})x_N;$$

Schema (III_{15}) din figura 39 pentru $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$:

$$x_{N+1} = (a + \bar{b})\, x_N + b\bar{x}_N.$$

Deosebirea între schemele (III), (III_1) — (III_{15}) apare cînd acționăm simultan pe a și b ($a = 1$, $b = 1$), căci în acest caz: pentru schemele (III), (III_{11}) (III_{13}), (III_{14}), (III_{15}) avem:

$$x_{N+1} = 1;$$

pentru schemele (III_1), (III_2), (III_3), (III_4) avem

$$x_{N+1} = 0;$$

pentru schemele (III_9), (III_{10}), (III_{12}) avem blocarea

$$x_{N+1} = x_n;$$

pentru schemele (III_5), (III_6), (III_7) (III_8) avem pulsația

$$x_{N+1} = x_n.$$

Exemplul IV. Să considerăm schema din figura 40; ea are un buton de comandă a și două relee X, Y, primul cu un contact de închidere x, al doilea cu un contact de închidere y și un contact de deschidere $\bar{y}$.

La acționarea lui a se conectează releul X care închide contactul x, deci se acționează releul Y care închide contactul y și deschide pe $\bar{y}$. Contactul y fiind închis, Y rămîne acționat, dar $\bar{y}$ fiind deschis, X se dezacționează. Dacă acum dezacționăm pe a, Y rămîne acționat prin y, iar X rămîne dezacționat. Avem astfel blocarea lui Y; graficele funcționării sînt date în figurile 41 și 42.

Formula de structură a schemei este

$$a\bar{y}X + (x + y)\, Y,$$

deci funcțiile de lucru ale releelor X, Y sînt

$$f_X = a\bar{y},$$

$$f_Y = x + y.$$

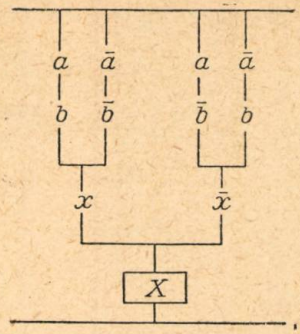


Fig. 34

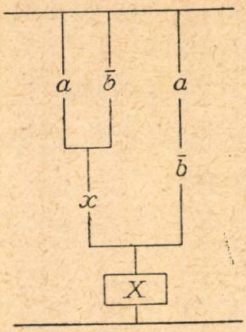


Fig. 35

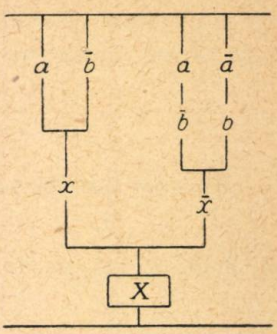


Fig. 36

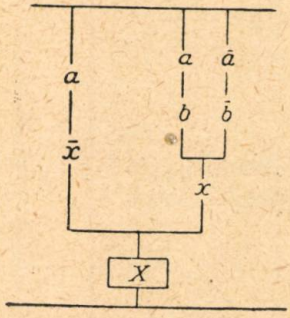


Fig. 37

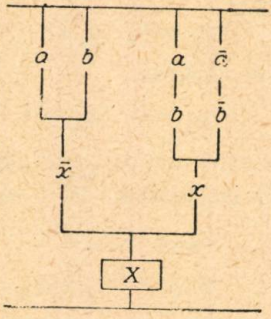


Fig. 38

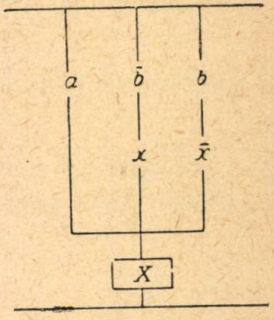


Fig. 39

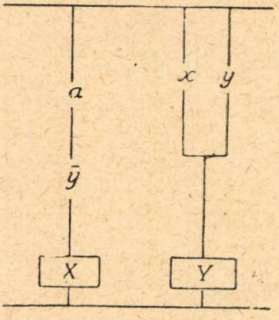


Fig. 40

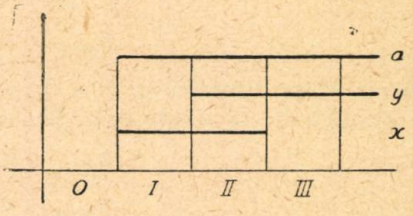


Fig. 41

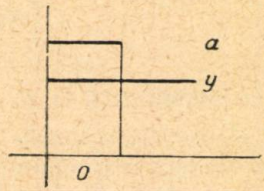


Fig. 42

Să căutăm ecuațiile de recurență. Dacă în timpul N, x_N și y_N sînt valorile variabilelor contactelor x, y, avem

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a\bar{y}_N, \\ y_{N+1} &= x_N + y_N. \end{aligned} \tag{IV}$$

Pornind din starea de repaus

$$x_0 = y_0 = 0$$

și făcînd $a = 1$, avem

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{I}} &= 1, \quad y_{\mathrm{I}} = 0, \\ x_{\mathrm{II}} &= 1, \quad y_{\mathrm{II}} = 1, \\ x_{\mathrm{III}} &= 0, \quad y_{\mathrm{III}} = 1 \end{aligned}$$

și această situație este stabilă, căci $a = 1$, $x_N = 0$, $y_N = 1$ dau $x_{N+1} = 0$, $y_{N+1} = 1$.

Pornind de la această stare

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1$$

și dezacționînd pe a, $(a = 0)$ căpătăm

$$x_{\mathrm{I}} = 0, \quad y_{\mathrm{I}} = 1$$

și această stare este stabilă, căci cu $a = 0$, $x_N = 0$, $y_N = 1$ avem $x_{N+1} = 0$, $y_{N+1} = 1$.

Deranjamente posibile. Să presupunem că a este acționat. Avem $a = 1$, deci

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= \bar{y}_N, \\ y_{N+1} &= x_N + y_N, \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} x_{N+2} &= \bar{y}_{N+1} = \bar{x}_N \bar{y}_N, \\ y_{N+2} &= x_{N+1} + y_{N+1} = \bar{y}_N + x_N + y_N = 1, \\ x_{N+3} &= 0, \\ y_{N+3} &= 1, \end{aligned}$$

deci schema se stabilizează la $x = 0$, $y = 1$.

Să presupunem că a este dezacționat. Avem $a = 0$, deci

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= 0, \\ y_{N+1} &= x_N + y_N, \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} x_{N+2} &= 0, \\ y_{N+2} &= x_{N+1} + y_{N+1} = y_{N+1}, \end{aligned}$$

deci schema se stabilizează la $x = 0$, $y = y_{N+1}$.

Reciproc, să căutăm schemele care satisfac următoarele condiții:

I. Pornind din repaus și acționînd pe a, se conectează X, apoi se conectează Y, apoi se dezacționează X, Y rămînînd acționat.

II. Din această poziție, dezacționînd pe A, Y rămîne conectat.
Fie

$$x_{N+1} = f(a, x_N, y_N)$$
$$y_{N+1} = g(a, x_N, y_N)$$

ecuațiile de recurență. În starea de repaus

$$f(0, 0, 0) = 0, \; g(0,0,0) = 0.$$

Pornind din starea de repaus și acționînd pe a avem acționarea lui X

$$f(1, 0, 0) = 1, \quad g(1, 0, 0) = 0,$$

apoi acționarea lui Y

$$f(1, 1, 0) = 1, \quad g(1, 1, 0) = 1,$$

apoi dezacționarea lui X

$$f(1, 1, 1) = 0, \; g(1, 1, 1) = 1,$$

și această situație este stabilă și cînd a este acționat

$$f(1, 0, 1) = 0, \; g(1, 0, 1) = 1$$

și cînd a este dezacționat

$$f(0, 0, 1) = 0, \; g(0, 0, 1) = 1.$$

Aceste condiții arată că

$$f(a, x, y) = a\bar{x}\bar{y} + axy + \lambda_1 \bar{a}x\bar{y} + \lambda_2 \bar{a}xy,$$
$$g(a, x, y) = ax\bar{y} + axy + a\bar{x}y + \bar{a}\bar{x}y + \mu_1 \bar{a}x\bar{y} + \mu_2 \bar{a}xy,$$

deci

$$f(a, x, y) = a\bar{y} + \bar{a}x(\lambda_1 \bar{y} + \lambda_2 y),$$
$$g(a, x, y) = a(x + y) + \bar{x}y + \bar{a}x(\mu_1 \bar{y} + \mu_2 y).$$

Pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, avem

$$f(a, x, y) = a\bar{y},$$
$$g(a, x, y) = x + y.$$

Cele 16 scheme se obțin combinînd cele patru expresii ale lui f, corespunzătoare lui $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$,

$$f = a\bar{y},$$
$$f = a\bar{y} + \bar{a}xy,$$
$$f = (a + x)\bar{y},$$
$$f = a\bar{y} + \bar{a}x.$$

Cu cele patru expresii ale lui g, corespunzătoare lui

$$\mu_1 = \mu_2 = 0; \; \mu_1 = 0, \; \mu_2 = 1; \; \mu_1 = 1, \; \mu_2 = 0; \; \mu_1 = \mu_2 = 1,$$

avem

$$g = a(x + y) + \bar{x}y,$$
$$g = ax + y,$$
$$g = x(a + \bar{y}) + y(a + \bar{x}),$$
$$g = x + y.$$

Obținem schemele din figurile 40 și 43—57.

Exemplul V. Să considerăm schema din figura 58, [1]*). Ea are ecuațiile de recurență

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a\bar{y}_N + (\bar{a} + \bar{y}_N)\, x_N, \\ y_{N+1} &= \bar{a}x_N + (a + x_N)\, y_N. \end{aligned} \tag{V}$$

Dacă schema este în repaus ($x_0 = y_0 = 0$) și nu-l acționăm pe a ($a = 0$) ea rămîne în repaus ($x_I = y_I = 0$).

Dacă îl acționăm pe a ($a = 1$), atunci

$$x_I = 1, \quad y_I = 0,$$

se acționează X și rămîne acționat, căci $x_{II} = 1$, $y_{II} = 0$.

Dacă îl dezacționăm pe a, avem

$$x_{II} = 1, \; y_{II} = 1,$$

deci se dezacționează Y și rămîn acționate și X și Y ($x_{III} = y_{III} = 1$).

Dacă îl acționăm din nou pe a

$$x_{III} = 0, \; y_{III} = 1$$

deci se acționează X și rămîne dezacționat ($x_{IV} = 0$, $y_{IV} = 1$).

Dacă îl dezacționăm pe a atunci

$$x_{IV} = 0, \; y_{IV} = 0,$$

deci se dezacționează și Y și schema intră în repaus. Obținem graficul din figura 59.

Reciproc, să căutăm să satisfacem acest program:

I. Fiind în repaus schema nu se acționează.

II. Din repaus, acționînd pe a, se acționează X și rămîne acționat.

III. Dezacționînd pe a, se acționează Y și rămîne acționat.

IV. Acționînd pe a, se dezacționează X și rămîne dezacționat.

V. Dezacționînd pe a se dezacționează Y.

Să traducem aceste condiții pentru ecuațiile de recurență

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= f\,(a, x, y), \\ y_{N+1} &= g\,(a, x, y). \end{aligned}$$

Condiția I dă:

$$f\,(0, 0, 0) = 0, \; g\,(0,0,0) = 0.$$

Condiția II dă:

$$\begin{aligned} f\,(1,0,0) &= 1, \; g\,(1,0,0) = 0, \\ f\,(1,1,0) &= 1, \; g\,(1,1,0) = 0. \end{aligned}$$

Condiția III dă:

$$\begin{aligned} f\,(0,1,0) &= 1, \; g\,(0,1,0) = 1, \\ f\,(0,1,1) &= 1, \; g\,(0,1,1) = 1. \end{aligned}$$

*) p. 100, fig. 54.

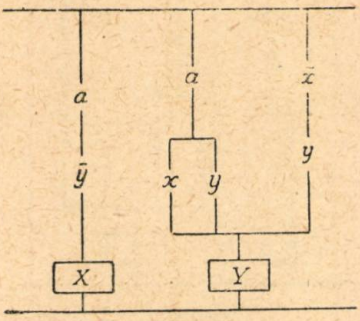


Fig. 43

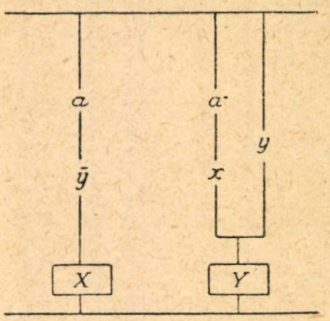


Fig. 44

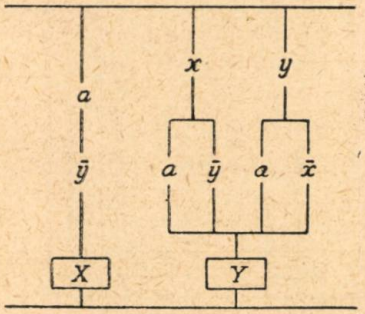


Fig. 45

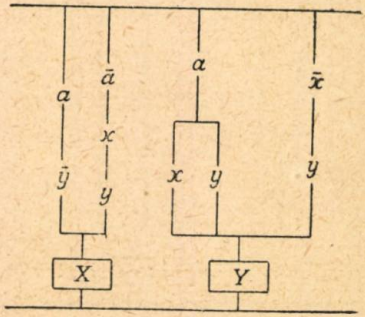


Fig. 46

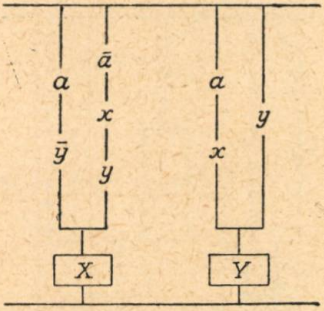


Fig. 47

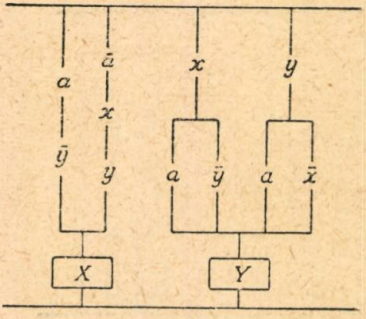


Fig. 48

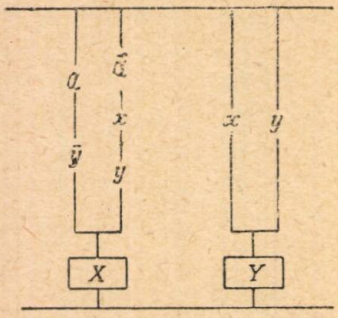


Fig. 49

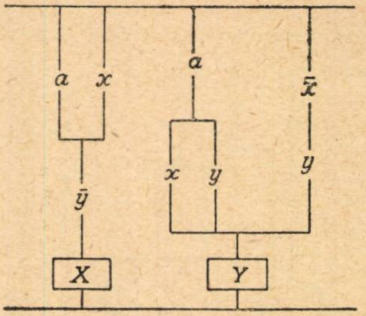


Fig. 50

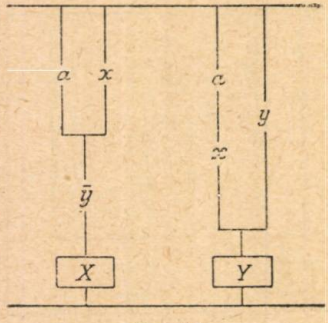


Fig. 51

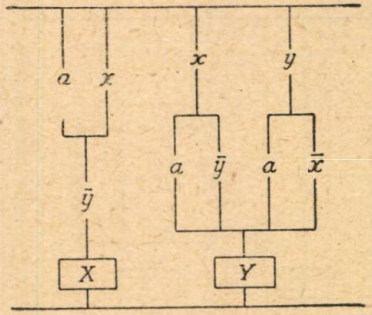


Fig. 52

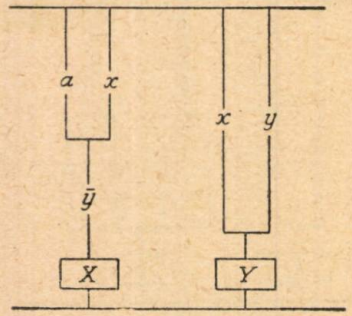


Fig. 53

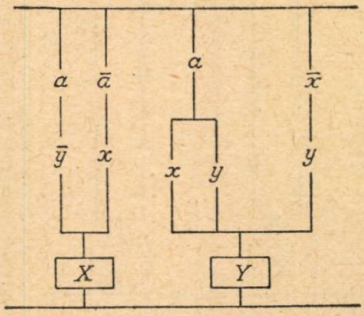


Fig. 54

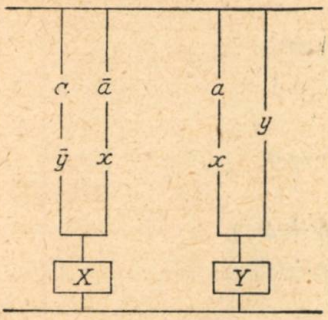


Fig. 55

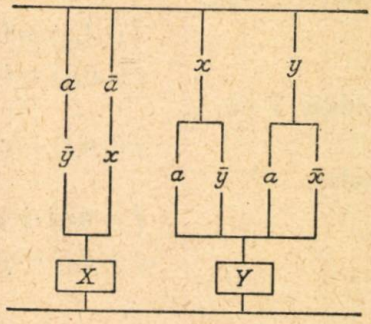


Fig. 56

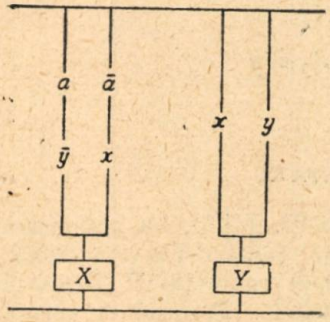


Fig. 57

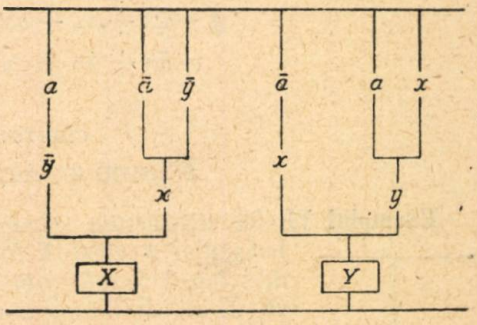


Fig. 58

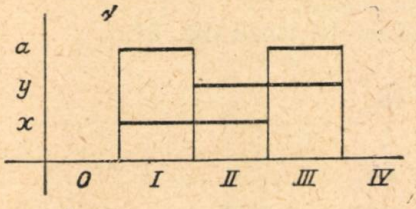


Fig. 59

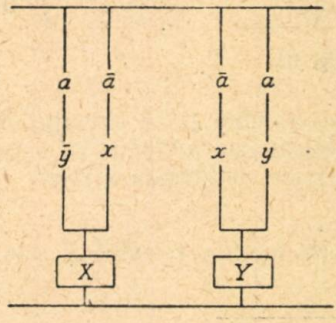


Fig. 60

Condiția IV dă:

$$f(1,1,1) = 0,\ g(1,1,1) = 1,$$
$$f(1,0,1) = 0,\ g(1,0,1) = 1.$$

Condiția V dă:

$$f(0,0,1) = 0,\ g(0,0,1) = 0.$$

Așadar,

$$f = a\bar{x}\bar{y} + ax\bar{y} + \bar{a}x\bar{y} + \bar{a}xy,$$
$$g = \bar{a}x\bar{y} + \bar{a}xy + axy + a\bar{x}y,$$

deci

$$f = a\bar{y} + \bar{a}x,$$
$$g = \bar{a}x + ay.$$

Obținem schema din figura 60.

Evident avem

$$f = a\bar{y} + \bar{a}x + ax\bar{y} + \bar{a}x\bar{y} =$$
$$= a\bar{y} + \bar{a}x + x\bar{y} = a\bar{y} + (\bar{a} + \bar{y})\,x,$$
$$g = \bar{a}x + ay + axy + \bar{a}xy =$$
$$= \bar{a}x + ay + xy = \bar{a}x + (a + x)\,y$$

CAPITOLUL III

SCHEME CU ACȚIUNE REPETATĂ

Exemplul VI. Să considerăm schema din figura 61, [1] *). La acționarea butonului a releul X fiind în repaus, contactul x este închis, deci releul X este conectat și deschide contactul $\bar{x}$. Urmează că X va fi deconectat și $\bar{x}$ se închide. Procesul se repetă atît timp cît a este acționat.

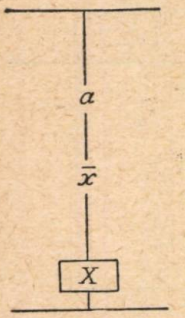


Fig. 61

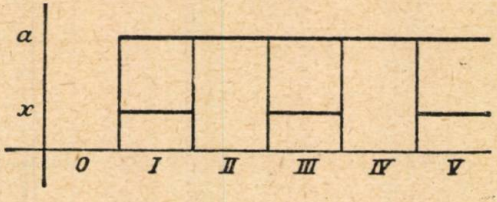


Fig. 62

Dezacționînd pe a circuitul intră în repaus.

Graficul este periodic, cu o perioadă de doi timpi (fig. 62).

Formula de structură fiind

$$a\,\bar{x}\,X,$$

funcția de lucru a releului X este

$$f_X = ax,$$

*) p. 24, fig. 13.

deci ecuațiile de recurență sînt

$$x_{N+1} = a\bar{x}_N. \qquad \text{(VI)}$$

Se vede că dacă a este neacționat ($a = 0$),

$$x_{\text{I}} = x_{\text{II}} = \ldots = 0,$$

adică X este neacționat oricare ar fi x_0. Dacă a este acționat, $a = 1$, deci

$$x_{\text{I}} = \bar{x}_0,$$
$$x_{\text{II}} = \bar{x}_{\text{I}} = x_0,$$
$$x_{\text{III}} = \bar{x}_{\text{II}} = \bar{x}_0 = x_{\text{I}},$$

deci

$$x_0 = x_{\text{II}} = x_N = \ldots$$
$$x_{\text{I}} = x_{\text{III}} = x_{\text{V}} = \ldots = \bar{x}_0.$$

De altfel

$$x_{N+2} = a\bar{x}_{N+1} = a\ \overline{ax}_N = a\,(\bar{a} + x_N) = ax_N,$$
$$x_{N+3} = a\bar{x}_{N+2} = a\ \overline{ax}_N = a\,(\bar{a} + \bar{x}_N) = a\bar{x}_N = x_{N+1},$$

deci

$$x_{N+3} = x_{N+1},$$
$$x_{N+4} = x_{N+2},$$

deci oricare ar fi starea x_0, avem

$$x_{\text{I}} = x_{\text{III}} = \ldots$$
$$x_{\text{II}} = x_{\text{IV}} = \ldots$$

și anume

$$x_{\text{I}} = x_{\text{II}} = x_{\text{III}} = x_{\text{IV}} = \ldots = 0,$$

dacă $a = 0$ și

$$x_0 = \bar{x}_{\text{I}} = x_{\text{II}} = \bar{x}_{\text{III}} = \ldots,$$

dacă $a = 1$.

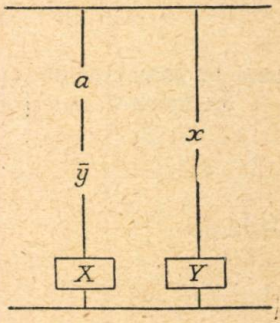


Fig. 63

Exemplul VII. Să considerăm schema din figura 63, [1] *), cu un buton de comandă a și două relee, X cu un contact de închidere x și Y cu un contact de deschidere $\bar{y}$.

Dacă acționăm pe a, se stabilește circuitul prin a, $\bar{y}$ și X este acționat, se închide x și Y este acționat. Acționarea lui Y deschide pe $\bar{y}$, deci dezacționează pe X și deschide pe x. Întreruperea circuitului prin y dezacționează pe Y și închide pe $\bar{y}$. Procesul se repetă, cît timp a este acționat. Dezacționînd pe a, X se deconectează, x se deschide, deci Y se deconectează și situația cu X, Y deconectați, se stabilizează cît timp a este dezacționat.

Formula de structură a schemei este

$$a\bar{y}X + xY,$$

*) p. 26, fig. 15.

deci funcțiile de lucru ale releelor sînt

$$f_X = a\bar{y},$$
$$f_Y = x,$$

deci ecuațiile de recurență sînt

$$x_{N+1} = a\bar{y}_N, \qquad (VII)$$
$$y_{N+1} = x_N.$$

Pornind din repaus, adică luînd

$$x_0 = Y_0 = 0$$

și acționînd pe $(a = 1)$, avem

$$x_I = 1,\ y_I = 0,$$

ceea ce înseamnă conectarea lui X,

$$x_{II} = 1,\ y_{II} = 1,$$

ceea ce înseamnă conectarea lui Y,

$$x_{III} = 0,\ y_{III} = 1,$$

ceea ce înseamnă deconectarea lui X,

$$x_{IV} = 0,\ y_{IV} = 0,$$

ceea ce înseamnă deconectarea lui Y.

În general, ecuațiile (VII) cu $a = 1$, dau

$$x_{N+1} = \bar{y}_N,$$
$$y_{N+1} = x_N,$$

deducem

$$x_{N+2} = \bar{y}_{N+1} = \bar{x}_N,$$
$$y_{N+2} = x_{N+1} = \bar{y}_N,$$
$$x_{N+3} = \bar{y}_{N+2} = y_N,$$
$$y_{N+3} = x_{N+2} = \bar{x}_N,$$
$$x_{N+4} = \bar{y}_{N+3} = x_N,$$
$$y_{N+4} = x_{N+3} = y_N,$$

deci

$$x_{N+4} = x_N,$$
$$y_{N+4} = y_N$$

și fenomenul, cît timp a este acționat, este periodic. Graficul lui este reprezentat în figura 64.

Cînd a este dezacționat, $a = 0$, ecuațiile (VII) devin

$$x_{N+1} = 0,$$
$$y_{N+1} = x_N,$$

deci

$$x_{N+2} = 0,$$
$$y_{N+2} = 0,$$

deci, după condițiile inițiale avem

$$\alpha)\ x_0 = y_0 = 0,$$
$$x_{N+1} = y_{N+1} = 0,$$
$$\beta)\ x_0 = 1,\ y_0 = 0,$$
$$x_{\mathrm{I}} = 0,\ y_{\mathrm{I}} = 1,$$
$$x_{\mathrm{II}} = 0,\ y_{\mathrm{II}} = 0,$$

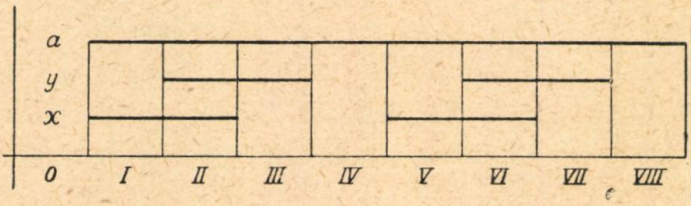


Fig. 64

$$\gamma)\ x_0 = 0,\ y_0 = 1,$$
$$x_{\mathrm{I}} = 0,\ y_{\mathrm{I}} = 0,$$
$$\delta)\ x_0 = 1,\ y_0 = 1,$$
$$x_{\mathrm{I}} = 0,\ y_{\mathrm{I}} = 1,$$
$$x_{\mathrm{II}} = 0,\ y_{\mathrm{II}} = 0.$$

În cazul α), X și Y fiind deconectați, rămîn deconectați; în cazul β), fiind conectat numai X, se deconectează X, conectîndu-se în același timp Y și, în timpul următor, se deconectează și Y. În cazul γ), X fiind dezacționat și Y acționat, se dezacționează Y. În cazul δ), X și Y fiind acționați, întîi se dezacționează X și apoi Y.

Exemplul VIII. Să considerăm schema din figura 65, [1] *) cu două butoane de comandă a și b și cu trei relee X, Y, Z avînd contactele lor de închidere y, z și de deschidere $\bar{x}$.

Formula de structură fiind

$$zX + b\bar{x}Y + a\ (\bar{x} + y)\ Z,$$

funcțiile de lucru sînt

$$f_X = z,$$
$$f_Y = b\bar{x},$$
$$f_Z = a\ (\bar{x} + y),$$

*) p. 74, fig. 42.

deci relațiile de recurență sînt

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= z_N, \\ y_{N+1} &= b\bar{x}_N, \\ z_{N+1} &= a(\bar{x}_N + y_N). \end{aligned} \tag{VIII}$$

Să considerăm că plecăm din poziția de repaus

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

și că acționăm pe a, lăsînd pe b dezacționat, $a = 1$, $b = 0$.

Avem

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= z_N, \\ y_{N+1} &= 0, \\ z_{N+1} &= \bar{x}_N + y_N, \end{aligned} \tag{1}$$

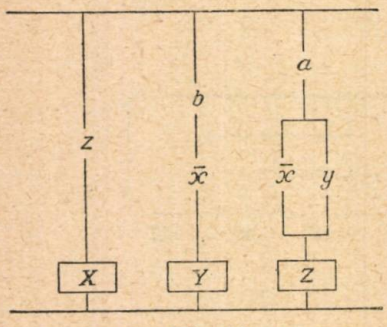


Fig. 65

deci

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{I}} &= 0, \quad y_{\mathrm{I}} = 0, \quad z_{\mathrm{I}} = 1, \\ x_{\mathrm{II}} &= 1, \quad y_{\mathrm{II}} = 0, \quad z_{\mathrm{II}} = 1, \\ x_{\mathrm{III}} &= 1, \quad y_{\mathrm{III}} = 0, \quad z_{\mathrm{III}} = 0, \\ x_{\mathrm{IV}} &= 0, \quad y_{\mathrm{IV}} = 0, \quad z_{\mathrm{IV}} = 0, \end{aligned}$$

deci în urma acționării lui a, se acționează Z, apoi se acționează X, apoi se dezacționează Z, apoi se dezacționează X.

Fenomenul se repetă, căci din (1) avem

$$\begin{aligned} y_{N+2} = y_{N+3} &= 0 = \ldots = 0, \\ x_{N+2} = z_{N+1} &= \bar{x}_N, \\ z_{N+2} = \bar{x}_{N+1} &= \bar{z}_N, \\ x_{N+3} = z_{N+2} &= \bar{z}_N, \\ z_{N+3} = \bar{x}_{N+2} &= x_N, \\ x_{N+4} = z_{N+3} &= x_N, \\ z_{N+4} = \bar{x}_{N+3} &= z_N. \end{aligned}$$

Deoarece

$$\begin{aligned} x_{N+4} &= x_N, \\ y_{N+4} &= y_N, \\ z_{N+4} &= z_N, \end{aligned}$$

se vede că fenomenul este periodic, cu o perioadă de patru timpi. Pornind din repaus, graficul funcționării cînd a este acționat și b nu a fost acționat, este periodic, cu o perioadă de patru timpi (fig. 66).

Dacă, după ce am acționat pe a, dezacționăm pe a, fără să acționăm pe b, avem $a = b = 0$, deci

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= z_N, \\ y_{N+1} &= 0, \\ z_{N+1} &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

deci

$$\begin{aligned} x_{N+2} &= 0, \\ y_{N+2} &= 0, \\ z_{N+2} &= 0, \end{aligned}$$

deci schema intră în repaus.

Dacă după ce am acționat pe a, acționăm și pe b, atunci avem $a = b = 1$, deci, dacă acționarea lui b găsește schema într-o etapă a evoluției ei cu a acționat:

$$\begin{aligned} &x_0^{(0)} = y_0^{(0)} = z_0^{(0)} = 0, \\ &x_0^{(1)} = 0,\ y_0^{(1)} = 0,\ z_0^{(1)} = 1 \qquad (a) \\ &x_0^{(2)} = 1,\ y_0^{(2)} = 0,\ z_0^{(2)} = 1, \\ &x_0^{(3)} = 1,\ y_0^{(3)} = 0,\ z_0^{(3)} = 0, \end{aligned}$$

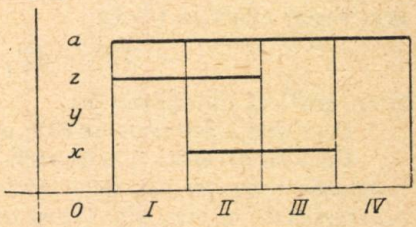


Fig. 66

atunci avem următoarele evoluții, cu ecuația (VIII), în care $a = b = 1$:

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= z_N, \\ y_{N+1} &= \bar{x}_N, \\ z_{N+1} &= \bar{x}_N + y_N. \end{aligned} \tag{3}$$

În primul caz

$$\begin{aligned} &x_0^{(0)} = y_0^{(0)} = z_0^{(0)} = 0, \\ &x_{\mathrm{I}}^{(0)} = 0, \quad y_{\mathrm{I}}^{(0)} = 1, \quad z_{\mathrm{I}}^{(0)} = 1, \\ &x_{\mathrm{II}}^{(0)} = 1, \quad y_{\mathrm{II}}^{(0)} = 1, \quad z_{\mathrm{II}}^{(0)} = 1, \\ &x_{\mathrm{III}}^{(0)} = 1, \quad y_{\mathrm{III}}^{(0)} = 0, \quad z_{\mathrm{III}}^{(0)} = 1, \qquad (b) \\ &x_{\mathrm{IV}}^{(0)} = 1, \quad y_{\mathrm{IV}}^{(0)} = 0, \quad z_{\mathrm{IV}}^{(0)} = 0, \\ &x_{\mathrm{V}}^{(0)} = 0, \quad y_{\mathrm{V}}^{(0)} = 0, \quad z_{\mathrm{V}}^{(0)} = 0, \\ &x_{\mathrm{V}}^{(0)} = x_0^{(0)}, \quad y_{\mathrm{V}}^{(0)} = y_0^{(0)}, \quad z_{\mathrm{V}}^{(0)} = z_0^{(0)}, \end{aligned}$$

și schema are evoluția periodică în 5 timpi 0, I, II, III, IV (fig. 67).

În al doilea caz

$$\begin{aligned} &x_0^{(1)} = 0, \quad y_0^{(1)} = 0, \quad z_0^{(1)} = 1, \\ &x_{\mathrm{I}}^{(1)} = 1, \quad y_{\mathrm{I}}^{(1)} = 1, \quad z_{\mathrm{I}}^{(1)} = 1 \end{aligned}$$

şi avem aceeaşi evoluţie (*b*) cu

$$x_{\mathrm{I}}^{(1)} = x_{\mathrm{II}}^{(0)}, \quad y_{\mathrm{I}}^{(1)} = y_{\mathrm{II}}^{(0)}, \quad z_{\mathrm{III}}^{(1)} = z_{\mathrm{II}}^{(0)}$$

şi cu graficul din figura 68.

În al treilea caz

$$x_0^{(2)} = 1, \quad y_0^{(2)} = 0, \quad z_0^{(2)} = 1,$$
$$x_{\mathrm{I}}^{(2)} = 1, \quad y_{\mathrm{I}}^{(2)} = 0, \quad z_{\mathrm{I}}^{(2)} = 0$$

şi avem evoluţia (*b*) cu

$$x_{\mathrm{I}}^{(2)} = x_{\mathrm{IV}}^{(0)}, \quad y_{\mathrm{I}}^{(2)} = y_{\mathrm{IV}}^{(0)}, \quad z_{\mathrm{I}}^{(2)} = z_{\mathrm{IV}}^{(0)}$$

şi cu graficul din figura 69.

În al patrulea caz

$$x_0^{(3)} = 1, \quad y_0^{(3)} = 0, \quad z_0^{(3)} = 0,$$

deci avem evoluţia (*b*) cu

$$x_0^{(3)} = x_{\mathrm{IV}}^{(0)}, \quad y_0^{(3)} = y_{\mathrm{IV}}^{(0)}, \quad z_0^{(3)} = z_{\mathrm{IV}}^{(0)}$$

şi cu graficul din figura 70.

Deci *cînd a fost acţionat întîi a şi apoi b, funcţionarea este periodică în 5 timpi.*

Dacă în decursul funcţionării (*b*) în 5 timpi, dezacţionăm pe *a*, schema funcţionează cu ecuaţia (2), deci intră în repaus. Dacă îl dezacţionăm pe *b*, schema funcţionează cu ecuaţiile (1) şi cu una din condiţiile iniţiale (*b*). Dintre aceste condiţii iniţiale (*b*), prima, a patra, a cincia se află printre evoluţiile (*a*). A doua dă

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1,$$
$$x_{\mathrm{I}} = 1, \quad y_{\mathrm{I}} = 0, \quad z_{\mathrm{I}} = 1,$$

deci duce la a doua condiţie (*a*), iar a treia

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1,$$
$$x_{\mathrm{I}} = 1, \quad y_{\mathrm{I}} = 0, \quad z_{\mathrm{I}} = 1,$$

duce de asemenea la a doua condiţie (*a*). Deci, *dacă după ce am acţionat pe a şi apoi pe b, îl dezacţionăm pe b, schema revine la funcţionarea repetată în 4 timpi.*

Să presupunem că am început prin a-l acţiona pe *b* lăsîndu-l pe *a* neacţionat. Pornind din repaus

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

schema are ecuaţiile (2), deci rămîne în repaus.

Să presupunem, mai general, că *a* şi *b* sînt acţionaţi. Relaţiile de recurenţă sînt (3). Ne punem întrebarea: poate schema să se stabilizeze? În acest caz am avea

$$x_{N+1} = x_N, \quad y_{N+1} = y_N, \quad z_{N+1} = z_N,$$

deci

$$x_N = z_N, \quad y_N = \bar{x}_N, \quad z_N = \bar{x}_N + y_N,$$

deci

$$x_N = z_N = \bar{x}_N + y_N = \bar{x}_N + \bar{x}_N = \bar{x}_N,$$

deci schema nu se poate stabiliza cînd a şi b sînt acţionaţi.

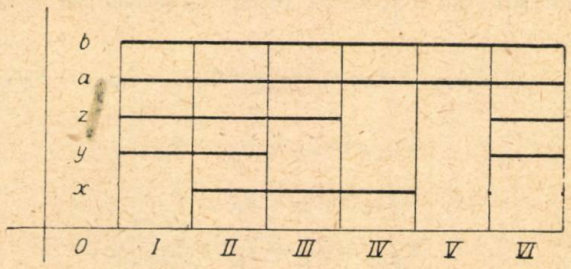


Fig. 67

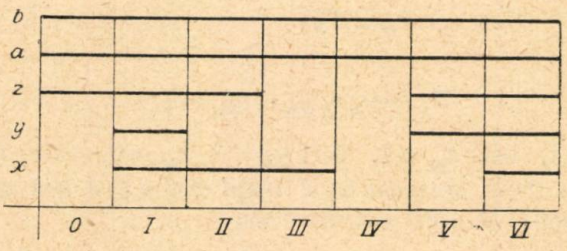


Fig. 68

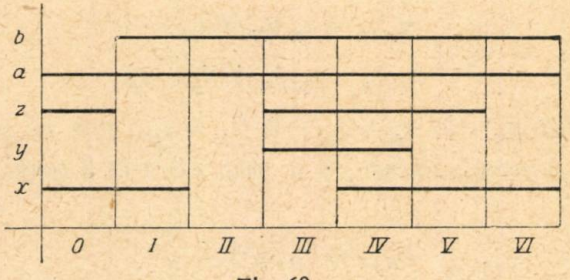


Fig. 69

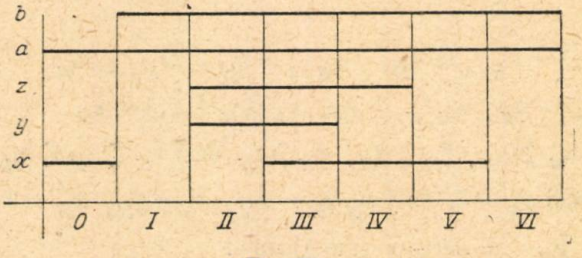


Fig. 70

Se poate, în cazul cînd a şi b sînt acţionaţi, să lucreze în 2 timpi? În acest caz am avea

$$x_{N+2} = x_N, \quad y_{N+2} = y_N, \quad z_{N+2} = z_N,$$

deci

$$x_{N+2} = \bar{x}_N + y_N = x_N,$$
$$y_{N+2} = \bar{z}_N = y_N,$$
$$z_{N+2} = \bar{x}_N + \bar{z}_N = z_N,$$

deci

$$\bar{x}_N + y_N = x_N,$$

deci

$$x_N \subset y_N,$$

deci

$$\bar{x}_N + y_N \supset \bar{y}_N + y_N = 1,$$

deci $\bar{x}_N + y_N = 1$, deci $x_N = 1$, deci $y_N = 1$, $z_N = 0$, care nu verifică sistemul; *schema nu poate funcţiona în 2 timpi cînd a şi b sînt acţionaţi.* Poate ea lucra în trei timpi? În acest caz am avea

$$x_{N+3} = x_N, \quad y_{N+3} = y_N, \quad z_{N+3} = z_N,$$

deci

$$x_{N+3} = z_N + \bar{x}_N = x_N,$$
$$y_{N+3} = x_N \bar{y}_N = y_N,$$
$$z_{N+3} = x_N \bar{y}_N + \bar{z}_N = z_N,$$

deci $y_N \subset \bar{y}_N$, deci $y_N = 0$, $x_N = y_N = 0$, $\bar{z}_N = z_N$, ceea ce este absurd, deci *cînd a şi b sînt acţionaţi, schema nu se poate lucra în 3 timpi.*

Deoarece

$$x_{N+4} = x_N \bar{y}_N + \bar{z},$$
$$y_{N+4} = x_N z_N,$$
$$z_{N+4} = x_N (\bar{y}_N + z_N),$$

relaţiile

$$x_{N+4} = x_N, \quad y_{N+4} = y_N, \quad z_{N+4} = z_N,$$

dau $x_N \bar{y}_N + \bar{z}_N = x_N$, $x_N z_N = y_N$, $x_N (\bar{y}_N + z_N) = z_N$
deci $\bar{z}_N \subset x_N$, $x_N \supset y_N$, $z_N \supset y_N$, $x_N \supset z_N$ deci $\bar{z}_N \subset x_N \subset z_N$
deci $\bar{z}_N \subset z_N$ deci $z_N = 1$, deci $x_N \bar{y}_N = x_N$, $x_N = y_N$, $x_N = 1$
deci $\bar{y}_N = 1$ şi $y_N = 1$ ceea ce este absurd.

Aşadar, *cînd a şi b sînt acţionaţi, schema nu poate lucra în 4 timpi.* Deoarece

$$x_{N+5} = x_N(\bar{y}_N + z_N),$$
$$y_{N+5} = z_N(\bar{x}_N + \bar{y}_N),$$
$$z_{N+5} = z_N,$$

schema funcţionează în 5 timpi în condiţiile (*a*).

În general, dacă $a = b = 1$, avem

$$x_{N+12} = x_{N+7} = x_N\bar{y}_N + z_N,$$
$$y_{N+12} = y_{N+7} = \bar{z}_N,$$
$$z_{N+12} = z_{N+7} = \bar{x}_N + \bar{z}_N,$$

deci schema funcţionează în 5 timpi, eventual după cel mult 7 timpi iniţiali.

Exemplul IX. Să considerăm schema din figura 71, [1]*). Ecuaţiile de recurenţă sînt

$$x_{N+1} = z_N,$$
$$y_{N+1} = b\bar{x}_N, \qquad \text{(IX)}$$
$$z_{N+1} = a(\bar{x}_N + y_N).$$

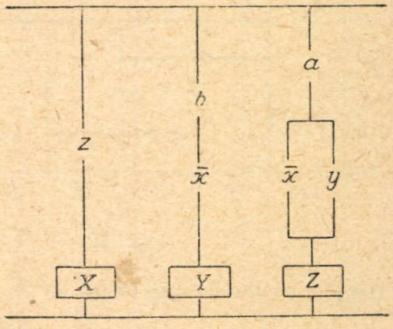


Fig. 71

Plecînd de la starea de repaus

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

să acţionăm butonul *a*, *b* rămînînd neacţionat ($a = 1$, $b = 0$); sistemul (IX) devine

$$x_{N+1} = z_N,$$
$$y_{N+1} = 0, \qquad (1)$$
$$z_{N+1} = \bar{x}_N + y_N,$$

deci

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{I}} &= 0, & y_{\mathrm{I}} &= 0 & z_{\mathrm{I}} &= 1, \\ x_{\mathrm{II}} &= 1, & y_{\mathrm{II}} &= 0, & z_{\mathrm{II}} &= 1, \\ x_{\mathrm{III}} &= 1, & y_{\mathrm{III}} &= 0, & z_{\mathrm{III}} &= 0, \\ x_{\mathrm{IV}} &= x_0, & y_{\mathrm{IV}} &= y_0, & z_{\mathrm{IV}} &= z_0, \end{aligned} \qquad (a)$$

deci dacă acţionăm butonul *a*, *b* rămînînd neacţionat, funcţionarea este periodică în 4 timpi:

acţionarea lui *Z*,
acţionarea lui *X*,
dezacţionarea lui *Z*,
dezacţionarea lui *X*,

releul *Y* rămînînd neacţionat. Graficul este cel din figura 72.

*) p. 74, fig. 42.

Dacă dezacționăm pe a, fără să acționăm pe b ($a = b = 0$), ecuațiile (IX) devin

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= z_N, \\ y_{N+1} &= 0, \\ z_{N+1} &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

deci

$$\begin{aligned} x_{N+2} &= 0, \\ y_{N+2} &= 0, \\ z_{N+2} &= 0, \end{aligned}$$

deci, oricare ar fi poziția inițială, schema intră în repaus în cel mult al doilea timp.

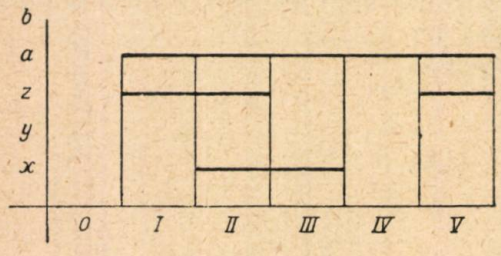


Fig. 72

Dacă însă, lăsînd pe a acționat, acționăm pe b ($a = b = 1$), ecuațiile (IX) devin

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= z_N, \\ y_{N+1} &= \bar{x}_N, \\ z_{N+1} &= \bar{x}_N + y_N, \end{aligned} \tag{3}$$

deci, dacă acționarea lui b se face în timpul evoluției (a) după ce X și Y sînt dezacționați, avem

$$\begin{aligned} & x_0^{(0)} = y_0^{(0)} = z_0^{(0)} = 0, \\ & x_{\mathrm{I}}^{(0)} = 0, \quad y_{\mathrm{I}}^{(0)} = 1, \quad z_{\mathrm{I}}^{(0)} = 1, \\ & x_{\mathrm{II}}^{(0)} = 1, \quad y_{\mathrm{II}}^{(0)} = 1, \quad z_{\mathrm{II}}^{(0)} = 1, \\ & x_{\mathrm{III}}^{(0)} = 1, \quad y_{\mathrm{III}}^{(0)} = 0, \quad z_{\mathrm{III}}^{(0)} = 1, \\ & x_{\mathrm{IV}}^{(0)} = 1, \quad y_{\mathrm{IV}}^{(0)} = 0, \quad z_{\mathrm{IV}}^{(0)} = 0, \\ & x_{\mathrm{V}}^{(0)} = x_0^{(0)}, \; y_{\mathrm{V}}^{(0)} = y_0^{(0)}, \; z_{\mathrm{V}}^{(0)} = z_0^{(0)}, \end{aligned} \tag{b}$$

deci procesul evoluează periodic în 5 timpi. Graficul este cel din figura 73.

Dacă acționarea lui b se face după timpul I al evoluției (a),

$$\begin{aligned} & x_0^{(1)} = 0, \qquad y_0^{(1)} = 0, \qquad z_0^{(1)} = 1, \\ & x_{\mathrm{I}}^{(1)} = 1 = x_{\mathrm{II}}^{(0)}, \quad y_{\mathrm{I}}^{(1)} = 1 = y_{\mathrm{II}}^{(0)}, \quad z_{\mathrm{I}}^{(1)} = 1 = z_{\mathrm{II}}^{(0)}, \end{aligned}$$

deci

$$x_{N+1}^{(1)} = x_{N+2}^{(0)}, \qquad y_{N+1}^{(0)} = y_{N+2}^{(0)}, \qquad z_{N+2}^{(0)} = z_{N+2}^{(0)},$$

deci, după un timp de acomodare 0, procesul urmează în 5 timpi, după evoluția (b). Graficul este cel din figura 74.

Dacă acționarea lui b se face după timpul II al evoluției (a),

$$x_0^{(2)} = 1, \qquad y_0^{(2)} = 0, \qquad z_0^{(2)} = 1,$$

deci

$$x_0^{(2)} = x_{III}^{(0)}, \quad y_0^{(2)} = y_{III}^{(2)}, \quad z_0^{(2)} = z_{III}^{(0)},$$

deci

$$x_N^{(2)} = x_{N+3}^{(0)}, \quad y_N^{(2)} = y_{N+3}^{(0)}, \quad z_N^{(2)} = z_{N+3}^{(0)},$$

deci procesul urmează în 5 timpi după evoluția (*b*). Graficul este cel din figura 75.

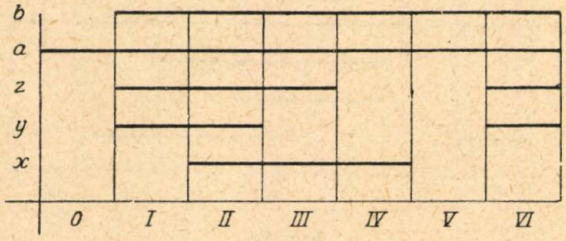


Fig. 73

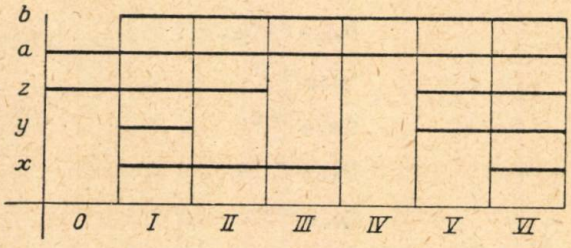


Fig. 74

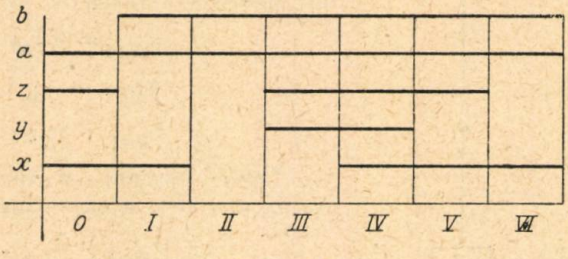


Fig. 75

În sfîrșit dacă acționarea lui *b* se face după timpul III al evoluției (*a*)

$$x_0^{(3)} = 1, \quad y_0^{(3)} = 0, \quad z_0^{(3)} = 0,$$

deci

$$x_0^{(3)} = x_{IV}^{(0)}, \quad y_0^{(3)} = y_{IV}^{(0)}, \quad z_{IV}^{(3)} = z_{IV}^{(0)},$$

deci procesul urmează în 5 timpi, după evoluția (*b*). Graficul este cel din figura 76.

Dacă acționăm numai pe b, a fiind neacționat ($a = 0$, $b = 1$), atunci ecuațiile (IX) devin

$$x_{N+1} = z_N,$$
$$y_{N+1} = \bar{x}_N,$$
$$z_{N+1} = 0,$$

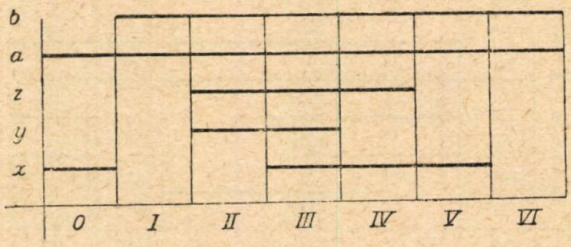


Fig. 76

deci

$$x_{N+2} = 0,$$
$$y_{N+2} = \bar{z}_N,$$
$$z_{N+2} = 0,$$
$$x_{N+3} = 0,$$
$$y_{N+3} = 1,$$
$$z_{N+3} = 0,$$

și această situție se stabilizează. Deci, prin acționarea numai a lui b, a rămînînd neacționat, releul Y este blocat, închis, în timp ce X și Z intră în repaus.

Exemplul X. Să considerăm schema din figura 77. Ecuațiile de recurență sînt

$$x_{N+1} = a\,\bar{z}_N,$$
$$y_{N+1} = x_N, \qquad \text{(X)}$$
$$z_{N+1} = y_N.$$

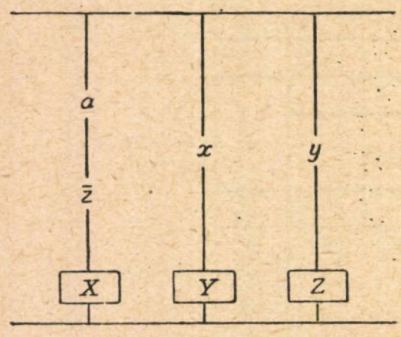


Fig. 77

Dacă butonul a este dezacționat, atunci $a = 0$ și aceste ecuații devin

$$x_{N+1} = 0,$$
$$y_{N+1} = x_N,$$
$$z_{N+1} = y_N,$$

deci

$$x_{N+2} = 0, \qquad x_{N+3} = 0,$$
$$y_{N+2} = 0, \qquad y_{N+3} = 0,$$
$$z_{N+e} = x_N \qquad z_{N+3} = 0,$$

deci la dezacționarea lui a schema intră în repaus în cel mult 3 timpi.

Dacă butonul a este acționat, $a = 1$ și ecuațiile (X) devin:

$$x_{N+1} = \bar{z}_N,$$
$$y_{N+1} = x_N,$$
$$z_{N+1} = y_N,$$

deci pornind din repaus

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

schema evoluează

$$\begin{array}{lll} x_{\mathrm{I}} = 1, & y_{\mathrm{I}} = 0, & z_{\mathrm{I}} = 0, \\ x_{\mathrm{II}} = 1, & y_{\mathrm{II}} = 1, & z_{\mathrm{II}} = 0, \\ x_{\mathrm{III}} = 1, & y_{\mathrm{III}} = 1, & z_{\mathrm{III}} = 1, \\ x_{\mathrm{IV}} = 0, & y_{\mathrm{IV}} = 1, & z_{\mathrm{IV}} = 1, \\ x_{\mathrm{V}} = 0, & y_{\mathrm{V}} = 0, & z_{\mathrm{V}} = 1, \\ x_{\mathrm{VI}} = x_0, & y_{\mathrm{VI}} = y_0, & z_{\mathrm{VI}} = z_0 \end{array}$$

deci evoluția are 6 timpi: X, Y, Z se conectează pe rînd, apoi se deconectează în aceeași ordine.

Deranjamentul produs de condiția

$$x'_0 = 0, \quad y'_0 = 1, \quad z'_0 = 0,$$

dă

$$x'_{\mathrm{I}} = 1, \quad y'_{\mathrm{I}} = 0, \quad z'_{\mathrm{I}} = 1,$$

deci

$$x'_{\mathrm{II}} = x'_0, \quad y'_{\mathrm{II}} = y'_0, \quad z'_{\mathrm{II}} = z'_0$$

și schema funcționează în 2 timpi.

Să căutăm să construim schema cu condițiile date.

I. La dezacționarea lui a, schema, după un număr de timpi, intră în repaus.

II. La acționarea lui a, pornind din repaus, se conectează pe rînd X, Y, Z și apoi se deconectează în aceeași ordine.

Fie

$$x_{N+1} = a(\alpha' x_N y_N z_N + \beta' x_N y_N \bar{z}_N + \gamma' x_N \bar{y}_N z_N + \delta' x_N \bar{y}_N \bar{z}_N + \\ + \lambda' \bar{x}_N y_N z_N + \mu' \bar{x}_N y_N \bar{z}_N + \nu' \bar{x}_N \bar{y}_N z_N + \rho' \bar{x}_N \bar{y}_N \bar{z}_N + \bar{a}f,$$
$$\bar{y}_{N+1} = a(\alpha'' x_N y_N z_N + \ldots\ldots + \rho'' \bar{x}_N \bar{y}_N \bar{z}_N) + \bar{a}g,$$
$$z_{N+1} = a(\alpha''' x_N y_N z_N + \ldots\ldots + \rho''' \bar{x}_N \bar{y}_N \bar{z}_N) + \bar{a}h.$$

Cînd $a = 1$, evoluția dată de condiția II cere ca:

$$\begin{array}{lll} \rho' = 1, & \rho'' = 0, & \rho''' = 0, \\ \delta' = 1, & \delta'' = 1, & \delta''' = 0, \\ \beta' = 1, & \beta'' = 1, & \beta''' = 1, \\ \alpha' = 0, & \alpha'' = 1, & \alpha''' = 1, \\ \lambda' = 0, & \lambda'' = 0, & \lambda''' = 1, \\ \nu' = 0, & \nu'' = 0, & \nu''' = 0. \end{array}$$

Rămîn nedeterminați γ, μ deci 6 coeficienți.
La deconectarea lui a, $a = 0$, deci

$$x_{N+1} = f(x_N, y_N, z_N),$$
$$y_{N+1} = g(x_N, y_N, z_N),$$
$$z_{N+1} = h(x_N, y_N, z_N).$$

Putem cere ca schema să intre imediat în repaus, în acest caz

$$f = g = h = 0.$$

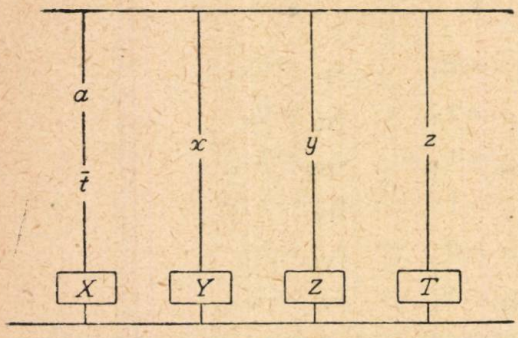


Fig. 78

Exemplul XI. Să considerăm schema din figura 78, [I] *).
Ecuațiile de recurență sînt:

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= a\bar{t}_N, \\ y_{N+1} &= x_N, \\ z_{N+1} &= y_N, \\ t_{N+1} &= z_N, \end{aligned} \qquad \text{(XI)}$$

dacă butonul a este dezacționat, atunci $a = 0$ și sistemul (XI) devine

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= 0, & x_{N+2} &= 0, & x_{N+3} &= 0, & x_{N+4} &= 0, \\ y_{N+1} &= x_N, & y_{N+2} &= 0, & y_{N+3} &= 0, & y_{N+4} &= 0, \\ z_{N+1} &= y_N, & z_{N+2} &= x_N, & z_{N+3} &= 0, & z_{N+4} &= 0, \\ t_{N+1} &= z_N, & t_{N+2} &= y_N, & t_{N+3} &= x_N, & t_{N+4} &= 0, \end{aligned}$$

deci dacă a este dezacționat, schema intră în repaus în cel mult 4 timpi.
Dacă butonul a este acționat ($a = 1$) ecuațiile (XI) sînt

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= t_N, \\ y_{N+1} &= x_N, \\ z_{N+1} &= y_N, \\ t_{N+1} &= z_N, \end{aligned}$$

deci pornind din repaus

$$x_0 = y_0 = z_0 = t_0 = 0,$$

avem evoluția

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{I}} &= 1, & y_{\mathrm{I}} &= 0, & z_{\mathrm{I}} &= 0, & t_{\mathrm{I}} &= 0, \\ x_{\mathrm{II}} &= 1, & y_{\mathrm{II}} &= 1, & z_{\mathrm{II}} &= 0, & t_{\mathrm{II}} &= 0, \\ x_{\mathrm{III}} &= 1, & y_{\mathrm{III}} &= 1, & z_{\mathrm{III}} &= 1, & t_{\mathrm{III}} &= 0, \\ x_{\mathrm{IV}} &= 1, & y_{\mathrm{IV}} &= 1, & z_{\mathrm{IV}} &= 1, & t_{\mathrm{IV}} &= 1, \end{aligned}$$

*) p. 98, fig. 52.

$$
\begin{array}{llll}
x_{\mathrm{V}} = 0, & y_{\mathrm{V}} = 1, & z_{\mathrm{V}} = 1, & t_{\mathrm{V}} = 1, \\
x_{\mathrm{VI}} = 0, & y_{\mathrm{VI}} = 0, & z_{\mathrm{VI}} = 1, & t_{\mathrm{VI}} = 1, \\
x_{\mathrm{VII}} = 0, & y_{\mathrm{VII}} = 0, & z_{\mathrm{VII}} = 0, & t_{\mathrm{VII}} = 1, \\
x_{\mathrm{VIII}} = x_0, & y_{\mathrm{VIII}} = y_0, & z_{\mathrm{VIII}} = z_0, & t_{\mathrm{VIII}} = t_0,
\end{array} \qquad (\alpha)
$$

deci schema funcționează cu repetiție în 8 timpi: acționînd pe rînd releele X, Y, Z, T și dezacționîndu-le în aceeași ordine. Graficul este cel din figura 79.

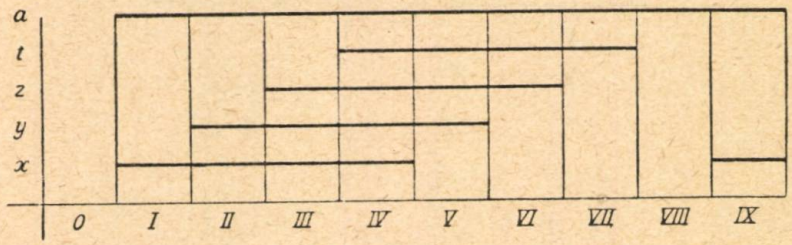


Fig. 79

Deranjamentul

$$x_0^{(1)} = 0, \quad y_0^{(1)} = 0, \quad z_0^{(1)} = 1, \quad t_0^{(1)} = 0,$$

dă evoluția

$$
\begin{array}{llll}
x_{\mathrm{I}}^{(1)} = 1, & y_{\mathrm{I}}^{(1)} = 0, & z_{\mathrm{I}}^{(1)} = 0, & t_{\mathrm{I}}^{(1)} = 1, \\
x_{\mathrm{II}}^{(1)} = 0, & y_{\mathrm{II}}^{(1)} = 1, & z_{\mathrm{II}}^{(1)} = 0, & t_{\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \\
x_{\mathrm{III}}^{(1)} = 1, & y_{\mathrm{III}}^{(1)} = 0, & z_{\mathrm{III}}^{(1)} = 1, & t_{\mathrm{III}}^{(1)} = 0, \\
x_{\mathrm{IV}}^{(1)} = 1, & y_{\mathrm{IV}}^{(1)} = 1, & z_{\mathrm{IV}}^{(1)} = 0, & t_{\mathrm{IV}}^{(1)} = 1, \\
x_{\mathrm{V}}^{(1)} = 0, & y_{\mathrm{V}}^{(1)} = 1, & z_{\mathrm{V}}^{(1)} = 1, & t_{\mathrm{V}}^{(1)} = 0, \\
x_{\mathrm{VI}}^{(1)} = 1, & y_{\mathrm{VI}}^{(1)} = 0, & z_{\mathrm{VI}}^{(1)} = 1, & t_{\mathrm{VI}}^{(1)} = 1, \\
x_{\mathrm{VII}}^{(1)} = 0, & y_{\mathrm{VII}}^{(1)} = 1, & z_{\mathrm{VII}}^{(1)} = 0, & t_{\mathrm{VII}}^{(1)} = 1, \\
x_{\mathrm{VIII}}^{(1)} = x_0^{(1)}, & y_{\mathrm{VIII}}^{(1)} = y_0^{(1)}, & z_{\mathrm{VIII}}^{(1)} = z_0, & t_{\mathrm{VIII}}^{(1)} = t_0,
\end{array} \qquad (\beta)
$$

deci dă tot o funcționare în 8 timpi. Graficul este cel din figura 80.

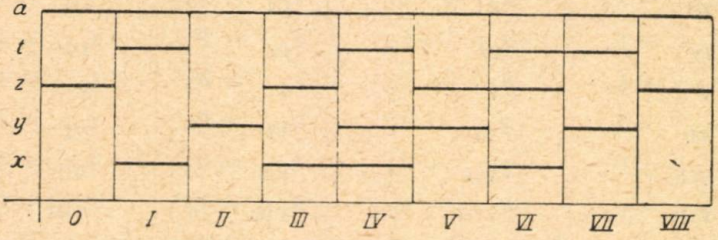


Fig. 80

Se observă că cele două funcționări (α) și (β) epuizează cele 16 poziții pe care le poate lua schema.

Exemplul XI. Să considerăm schema din figura 81, [I] *).
Ecuaţiile de recurenţă sînt

$$x_{N+1} = a\,(\bar{t}_N + y_N),$$
$$y_{N+1} = x_N\,(\bar{t}_N + z_N),$$
$$z_{N+1} = y_N\,\bar{t}_N,$$
$$t_{N+1} = z_N + x_N t_N.$$

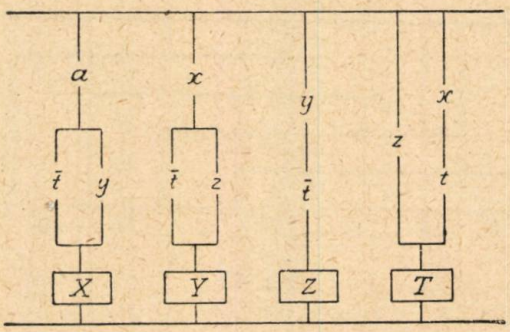


Fig. 81

Dacă a este acţionat, sistemul devine

$$x_{N+1} = \bar{t}_N + y_N,$$
$$y_{N+1} = x_N\,(\bar{t}_N + z_N),$$
$$z_{N+1} = y_N\,\bar{t}_N,$$
$$t_{N+1} = z_N + x_N t_N.$$

Pornind din poziţia de repaus avem evoluţia

$x_0 = 0$,	$y_0 = 0$,	$z_0 = 0$,	$t_0 = 0$,
$x_{\mathrm{I}} = 1$,	$y_{\mathrm{I}} = 0$,	$z_{\mathrm{I}} = 0$,	$t_{\mathrm{I}} = 0$,
$x_{\mathrm{II}} = 1$,	$y_{\mathrm{II}} = 1$,	$z_{\mathrm{II}} = 0$,	$t_{\mathrm{II}} = 0$,
$x_{\mathrm{III}} = 1$,	$y_{\mathrm{III}} = 1$,	$z_{\mathrm{III}} = 1$,	$t_{\mathrm{III}} = 0$,
$x_{\mathrm{IV}} = 1$,	$y_{\mathrm{IV}} = 1$,	$z_{\mathrm{IV}} = 1$,	$t_{\mathrm{IV}} = 1$,
$x_{\mathrm{V}} = 1$,	$y_{\mathrm{V}} = 1$,	$z_{\mathrm{V}} = 0$,	$t_{\mathrm{V}} = 1$,
$x_{\mathrm{VI}} = 1$,	$y_{\mathrm{VI}} = 0$,	$z_{\mathrm{VI}} = 0$,	$t_{\mathrm{VI}} = 1$,
$x_{\mathrm{VII}} = 0$,	$y_{\mathrm{VII}} = 0$,	$z_{\mathrm{VII}} = 0$,	$t_{\mathrm{VII}} = 1$,
$x_{\mathrm{VIII}} = x_0$,	$y_{\mathrm{VIII}} = y_0$,	$z_{\mathrm{VIII}} = z_0$,	$t_{\mathrm{VIII}} = t_0$,

deci schema are o evoluţie în 8 timpi; se conectează pe rînd releele X, Y, Z, T şi apoi se deconectează în ordinea Z, Y, X, T.

*) p. 99, fig. 53.

Dacă avem deranjamentul

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 1, \quad t_0 = 0,$$

el evoluează

$$x_I = 1, \quad y_I = 0, \quad z_I = 0, \quad t_I = 1,$$

deci intră în timpul VI al evoluției normale.

Dacă avem deranjamentul

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 1, \quad t_0 = 1,$$

atunci el evoluează

$$x_I = 0, \quad y_I = 0, \quad z_I = 0, \quad t_I = 1,$$

deci intră în timpul VII al evoluției normale.

Dacă avem deranjamentul

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 0, \quad t_0 = 0,$$

atunci el evoluează

$$x_I = 1, \quad y_I = 0, \quad z_I = 1, \quad t_I = 0,$$
$$x_{II} = 1, \quad y_{II} = 1, \quad z_{II} = 0, \quad t_{II} = 1,$$

deci intră în timpul V al evoluției normale.

Dacă avem deranjamentul

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 0, \quad t_0 = 1$$

atunci el evoluează

$$x_I = 1, \quad y_I = 0, \quad z_I = 0, \quad t_I = 0,$$

deci intră în timpul I al evoluției normale.

Dacă avem deranjamentul

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1, \quad t_0 = 1,$$

atunci el evoluează

$$x_I = 1, \quad y_I = 0, \quad z_I = 0, \quad t_I = 1,$$

deci intră în timpul VI al evoluției normale.

Dacă a este neacționat, sistemul (XII) devine

$$x_{N+1} = 0,$$
$$y_{N+1} = x_N (\bar{t}_N + z_N),$$
$$z_{N+1} = y_N \bar{t}_N,$$
$$t_{N+1} = z_N + x_N t_N,$$

şi el dă

$$x_{N+2} = 0, \quad x_{N+3} = 0, \quad x_{N+4} = 0,$$
$$y_{N+2} = 0, \quad y_{N+3} = 0, \quad y_{N+4} = 0,$$
$$z_{N+2} = x_N \bar{z}_N \bar{t}_N, \quad z_{N+3} = 0, \quad z_{N+4} = 0,$$
$$t_{N+2} = y_N \bar{t}_N, \quad t_{N+3} = x_N \bar{z}_N \bar{t}_N, \quad t_{N+4} = 0,$$

deci schema intră în repaus în cel mult 4 timpi.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ С РЕЛЕЙНЫМИ КОНТАКТАМИ МНОГОКРАТНОГО ДЕЙСТВИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Схема с релейными контактами многократного действия может быть описана в любом ее состоянии, когда известны значения 0 или 1 переменных $a,..., c$, соответствующих элементам приемки, $x, y,..., z$, соответствующих промежуточным элементам и $u,..., w$ исполнительных элементов. Переменные $a,..., w$ принимают значение 0, когда элемент не приведен в действие, и 1, когда элемент приведен в действие.

Если известно состояние элементов $a,..., c$ и состояние $x_N,... z_N$ промежуточных элементов, то в определенный момент выводится состояние x_{N+1}, а z_{N+1} — в следующий момент:

$$x_{N+1} = f\ (a,... c,\ x_N,..., z_N);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_{N+1} = h\ (a,..., c,\ x_N,...,z_N).$$

Эти возвратные уравнения отображают действие механизма.

Условия работы позволяют в свою очередь определить функции $f,..., g$, давая таким образом возможность синтезировать схему.

Автор приводит различные примеры применения этого метода.

THÉORIE ALGÉBRIQUE DU FONCTIONNEMENT DES SCHÉMAS À RELAIS À CONTACTS ÉCHELONNÉS

(RÉSUMÉ)

On peut décrire un schéma à relais et contacts pour chacun de ses états, lorsque l'on connaît les valeurs 0 ou 1 des variables $a, \ldots, c$, qui correspondent aux éléments récepteurs $x, y, \ldots, z$, correspondant aux éléments intermédiaires, $u, \ldots, w$ des éléments exécutifs. La valeur des variables $a, \ldots, w$ est 0, lorsque l'élément est non actionné, 1, lorsqu'il est actionné.

Si on connaît l'état des éléments $a, \ldots, c$ et l'état $x_N, \ldots, z_N$ des éléments intermédiaires, à un moment donné N, on déduit l'état $x_{N+1}, \ldots, z_{N+1}$ au moment suivant

$$x_{N+1} = f\ (a, \ldots, c,\ x_N, \ldots, z_N)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_{N+1} = h\ (a, \ldots, c,\ x_N, \ldots, z_N).$$

Ces équations de récurrence décrivent le fonctionnement du mécanisme. Réciproquement, les conditions de travail permettent de déterminer les fonctions $f, \ldots, g$, permettent donc la synthèse du schéma.

L'Auteur donne différents exemples d'application de cette méthode.

BIBLIOGRAFIE

1. M. A. Gavrilov, *Teoriia releino—kontaktnih shem.* Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, Moscova—Leningrad, 1950.
2. Gr. C. Moisil, *Lecţii asupra teoriei mecanismelor automate*, (profesate la I.C.E.T. — poligrafiate), Bucureşti, 1953—54.

NOTĂ ADĂOGATĂ LA CORECTURĂ. Acest articol, care cuprinde o parte din Lecţiile asupra teoriei algebrice a mecanismelor automate, ţinute de noi în februarie—august 1954, la Casa oamenilor de ştiinţă a Academiei R.P.R., era sub tipar cînd am luat cunoştinţă de următoarele studii ale lui V. I. Şestakov, creatorul teoriei algebrice a schemelor cu contacte şi relee:

Algebraiceskii metod analiza avtonomnîh sistem dvuhpozifionnîh rele. Avtomatika i telemehanika, 1953 t. XV, nr. 2 (acest articol nu se găsea în bibliotecile noastre).

Algebraiceskii metod sinteza avtonomnîh sistem dvuhpozifionnîh rele. Avtomatika i telemehanika, t. XV, nr. 4, iulie—august 1954, p. 310—324.

O preobrazovani monoticliceskoi posledovatelnosti v *vozvratnuiu*, Dokladî Akademia Nauk SSSR, t. XCVIII, nr. 4, octombrie 1954, p. 541—545.

Facem cuvenita menţiune.

1 iunie 1955. *Gr. C. M.*

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

ASUPRA UNOR NOI PROBLEME LA LIMITĂ PENTRU ANUMITE CLASE DE ECUAŢII INTEGRO-DIFERENŢIALE SAU CU DERIVATE PARŢIALE*)

DE

ŞERGIU VASILACHE

1. *Ecuaţii integro-diferenţiale liniare cu două variabile independente.* Fie ecuaţia

$$\sum_0^m{}_q \sum_0^n{}_p H_{pq}(x, y)\, \varphi^{(p+q)}_{x^p y^q}(x, y) = f(x, y) +$$

$$+ \lambda \int_a^x \int_b^y \sum_0^m{}_q \sum_0^n{}_p K_{pq}(x, y, u, v)\, \varphi^{(p+q)}_{u^p v^q}(u, v)\, du\, dv, \tag{1}$$

în care funcţiile $H_{pq}(x, y)$, $f(x, y)$, $K(x, y, u, v)$ sînt date, continue şi derivabile de atîtea ori cît este necesar, în domeniul (D) definit prin

$$a \leqslant u \leqslant x \leqslant a_1; \quad b \leqslant v \leqslant y \leqslant b_1.$$

Unele din funcţiile H_{pq} pot fi identic nule. $\varphi^{(p+q)}_{x^p y^q}(x, y)$ este derivata parţială de ordinul p în raport cu x şi de ordinul q în raport cu y, a funcţiei necunoscute $\varphi(x, y)$.

Dacă notăm prin $(HD\,\varphi)_{pq}$ operatorul diferenţial din membrul întîi, şi prin A_{xy} operaţia de integrare din membrul doi, (1) se scrie sub forma

$$(HD\,\varphi)_{pq} = f + A_{xy}(KD\,\varphi)_{pq}. \tag{2}$$

Ca şi în cazul funcţiilor de o singură variabilă, vom transforma ecuaţia (1) într-o ecuaţie integrală, în care funcţia necunoscută va fi $\varphi^{(n+m)}_{x^n y^m}(x, y)$, ceea ce se poate obţine dacă luăm pentru $\varphi_{(x,y)}$ desfăşurarea tayloriană

$$\varphi(x, y) = \sum_0^{n-1} \left(\varphi^{(s)}_{x^s}(x, y)\right)_{x=a} \frac{(x-a)^s}{s!} + \int_a^x \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}_{u^n}(u, y)\, du, \tag{3}$$

funcţiile

$$\left(\varphi^{(s)}_{x^s}(x, y)\right)_{x=a} \quad (s = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{4}$$

---

*) Lucrare prezentată Institutului de matematică la data de 24 noiembrie 1954.

fiind date pe segmentul $b \leqslant y \leqslant b_1$; $x = a$ şi derivabile în raport cu y pînă la ordinul m.

Pe de altă parte, dacă luăm pentru derivata $\varphi^{(n)}_{x^n}(x, y)$ dezvoltarea

$$\varphi^{(n)}_{x^n}(x, y) = \psi(x, y) = \sum_0^{m-1} \left(\psi^{(r)}_{y^r}(x, y)\right)_{y=b} \frac{(y-b)^r}{r!} + \int_b^y \frac{(y-v)^m}{(m-1)!} \psi^{(n)}_{v^m}(x, v)\, dv, \tag{5}$$

unde funcţiile

$$\left(\psi^{(r)}_{y^r}(x,y)\right)_{y=b} = \left(\varphi^{(n+r}_{x^n y^r}(x, y)\right)_{y=b} \quad (r = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{6}$$

sînt de asemenea date pe segmentul $a \leqslant u \leqslant x \leqslant a_1$, $y = b$, obţinem pentru $\varphi_{(x, y)}$ expresia

$$\varphi(x, y) = \sum_0^{n-1} \left(\varphi^{(s)}_{x^s}(x, y)\right)_{x=a} \frac{(x-a)^s}{s!} +$$

$$+ \int_a^x \sum_0^{n-1}{}_r \left(\varphi^{n+r}_{x^n y^r}(u, y)\right)_{y=b} \frac{(y-b)^r}{r!} \frac{(x-u)^{n-1}}{(x-1)!}\, du +$$

$$+ \int_a^x \int_b^y \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(y-v)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(n+m)}_{u^n v^m}(u, v)\, du\, dv. \tag{7}$$

Notînd în (7) termenii cunoscuţi prin $g(x, y)$ şi luînd

$$\Phi(u, v) = \varphi^{(n+m)}_{u^n v^m}(u, v), \tag{8}$$

obţinem prin derivare

$$\varphi^{(p+q)}_{x^p y^q}(x, y) = g^{(p+q)}_{x^p y^q}(x, y) +$$

$$+ \int_a^x \int_b^y \frac{(x-u)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \frac{(y-v)^{m-q-1}}{(m-q-1)!} \Phi(u, v)\, du\, dv \tag{9}$$

$$(p = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$(q = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

$$\varphi^{(n+q)}_{x^n y^q}(x, y) = g^{(n+q)}_{x^n y^p}(x, y) + \int_b^y \frac{(y-v)^{m-q-1}}{(m-q-1)!} \Phi(x, v)\, dv, \tag{10}$$

$$\varphi^{(p+m)}_{x^p y^m}(x, y) = g^{(p+m)}_{x^p y^m}(x, y) + \int_a^x \frac{(x-u)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \Phi(u, v)\, du, \tag{11}$$

de unde

$$(HD\,\varphi)_{pq} = F(x, y) + H_{nm}(x, y)\,\Phi(x, y) +$$

$$+ \int_a^x \sum_0^{n-1}{}_p H_{pm}(x, y) \frac{(x-u)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \Phi(u, y)\, du +$$

$$+ \int_b^y \sum_0^{m-1}{}_q H_{nq}(x, y) \frac{(y-v)^{m-q-1}}{(m-q-1)!} \Phi(x, v)\, dv + \tag{12}$$

$$+ \int_a^x \int_b^y \sum_0^{m-1}{}_q \sum_0^{n-1}{}_r H_{pq}(x, y) \frac{(x-u)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \frac{(y-v)^{m-q-1}}{m-q-1)!} \Phi(u, v)\, du\, dv$$

unde funcţia $F(x, y)$ este cunoscută.

Operatorul diferențial din membrul doi $(KD\,\varphi)_{pq}$ ne dă o expresie analogă

$$(KD\,\varphi)_{pq} = G(x, y, u, v) + K_{nm}(x, y, u, v)\,\Phi(u, v) + \\ + \int_a^z \sum_0^{n-1}{}_p K_{pm}(x, y, u, v) \frac{(u-u_1)^{n-p-1}}{(n-p-1)!}\,\Phi(u, y)\,du + \\ + \int_b^y \sum_0^{m-1}{}_q K_{nq}(x, y, u, v) \frac{(v-v_1)^{m-q-1}}{(m-q-1)!}\,\Phi(x, v)\,dv + \\ + \int_a^x \int_b^y \sum_0^{m-1}{}_q \sum_0^{n-1}{}_p K_{pq}(x, y) \frac{(u-u_1)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \frac{(v-v_1)^{m-q-1}}{(m-q-1)!}\,\Phi(u, v)\,du dv\,. \tag{13}$$

Aplicînd integralelor triple și integralei cvadruple din operatorul $A_{xy}(KD)_{pq}$ formula Dirichlet (deoarece putem interverti integrările), ecuația (1) se transformă în ecuația integrală

$$H_{nm}(x, y)\,\Phi(x, y) + \int_a^x \sum_0^{n-1}{}_p H_{pm}(x, y) \frac{(x-u)^{n-p-1}}{(n-p-1)!}\,\Phi(n, y)\,du + \\ + \int_b^y \sum_0^{m-1}{}_q H_{nq}(x, y) \frac{(y-v)^{m-q-1}}{(m-q-1)!}\,\Phi(x, v)\,dv + \\ + \int_a^x \int_b^y \sum_0^{m-1}{}_q \sum_0^{n-1}{}_p H_{pq}(x, y) \frac{(x-u)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \frac{(y-v)^{m-q-1}}{(m-q-1)!}\,\Phi(u, v)\,du\,dv = \tag{14}$$

$$= f(x, y) - F(x, y) + \lambda H(x, y) + \lambda \int_a^x \int_b^y [K_{nm}(x, y, u, v) + \\ + P(x, y, u, v)]\,\Phi(u, v)\,du\,dv\,,$$

unde s-a pus

$$H(x, y) = \int_a^x \int_b^y G(x, y, u, v)\,du\,dv$$

și

$$P(x, y, u, v) = \int_a^x \sum_0^{n-1}{}_p K_{pm}(x, y, u_1, v) \frac{(u_1-u)^{n-p-1}}{(n-p-1)!}\,du_1 + \\ + \int_a^y \sum_0^{m-1}{}_q K_{nq}(x, y, u, v_1) \frac{(v_1-v)^{m-q-1}}{(m-q-1)!}\,dv_1 + \\ + \int_a^x \int_b^y \sum_0^{m-1}{}_q \sum_0^{n-1}{}_p K_{pq}(x, y, u_1, v_1) \frac{(u_1-u)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \frac{(v_1-v)^{m-q-1}}{(m-q-1)!}\,du_1 dv_1\,. \tag{15}$$

Pentru $H_{nm}(x, y) \not\equiv 0$, soluția ecuației (14) este funcție întreagă de λ.

Dacă $H_{mm}(x, y) \equiv 0$, ecuația integrală este de prima speță, și cum pentru $x = a$, $y = b$, avem

$$F(a, b) = \sum_0^m{}_q \sum_0^n{}_p H_{pq}(a, b)\,\varphi_{a^p b^q}^{(p+q)}(a, b) = f(a, b) \text{ și } H(a, b) = 0,$$

vom putea deriva în raport cu x și cu y spre a obține o ecuație de speța a doua.

În acest caz însă, problema se complică din cauza funcțiilor $\Phi(x, v)$ *și* $\Phi(u, y)$ *din integralele simple; iar condițiile inițiale* (4) *și* (6) *nu mai sînt suficiente pentru determinarea soluției.*

Dacă avem însă

$$\left.\begin{aligned} H_{nq}(x, y) &\equiv 0 \quad (q = 0, 1, \ldots, m-1), \\ H_{pm}(x, y) &\equiv 0 \quad (p = 0, 1, \ldots, n-1), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

ecuația integrală nu conține decît integrala dublă, ceea ce conduce, derivînd în raport cu x și cu y, la ecuația de speța a doua

$$[H_{n-1,m-1}(x, y) - \lambda K_{nm}(x, y, x, y)]\,\Phi(x, y) =$$

$$= f''_{xy} - \lambda H''_{xy} + \int_a^x [\lambda K''_{nm_x}(x, y, u, y) + \lambda P'_x(x, y, u, y) +$$

$$+ Q'_x(x, y, u, y)]\,\Phi(u, y)\,du + \int_b^y [\lambda K'_{nm_y}(x, y, x, v) + \lambda P'_y(x, y, x, v) + \tag{17}$$

$$+ Q'_y(x, y, x, v)]\,\Phi(x, v)\,dv + \int_a^x \int_b^y [\lambda K'_{nm_{xy}}(x, y, u, v) + \lambda P''_{xy}(x, y, u, v) +$$

$$+ Q''_{xy}(x, y, u, v)]\,\Phi(u, v)\,du\,dv,$$

în care *intervalul lacunar* Λ [1] *) este dat de relația

$$H_{n-1,m-1}(x, y) - \lambda K_{nm}(x, y, x, y) = 0 \tag{18}$$

oricare ar fi $x \in [a, a_1)]$ și $y \in [b, b_1]$.

Dacă, în plus, $H_{n-1,m-1}(x, y \equiv 0, K_{nm}(x, y, x, y) \neq 0$ soluția este funcție întreagă de $\frac{1}{\lambda}$, cu $\lambda = 0$ punct singular esențial izolat.

În concluzie, *fiind dată o ecuație integro-diferențială de forma* (1) *dacă* $H_{nm}(xy) \neq 0$, *ecuația dată admite ca soluție o funcție întreagă de* λ, *ce satisface condițiile inițiale* (4) *și* (6).

Dacă $H_{nm}(xy) \equiv 0$, *și dacă în acest caz se caută o soluție de forma* (7), *cu condițiile inițiale* (4) *și* (6) *ecuația dată nu se poate rezolva decît dacă, și numai dacă, se dau în plus condițiile* (16), *ceea ce conduce la noul operator diferențial*

$$(HD\,\varphi)_{pq} = \sum_0^{m-1}{}_q \sum_0^{n-1}{}_p H_{pq}(x,y)\,\varphi_{x^p y^q}^{(p+q)}(x, y). \tag{19}$$

Rezultatele de mai sus ne permit să enunțăm:

Teorema 1. *Fiind dată o ecuație integro-diferențială liniară de forma*

$$\sum_0^m{}_h \sum_0^n{}_i H_{ih}(x, y)\,\varphi_{x^i y^h}^{(i+h)}(x, y) = f(x, y) +$$

$$+ \lambda \int_a^x \int_b^y \sum_0^q{}_s \sum_0^p{}_r K_{sr}(x, y, u, v)\,\varphi_{u^s v^r}^{(s+r)}(u, v)\,du\,dv, \tag{a}$$

*) p. 10.

unde funcţiile H_{pq}, f, K_{pq} *sînt date, continue şi derivabile* de atîtea ori cît este necesar în domeniul

$$a \leq u \leq x \leq a_1; \quad b \leq v \leq y \leq b_1,$$

dacă se caută o soluţie $\varphi(x, y)$ *astfel încît, pentru* $x = a$ $\left(\varphi^{(i)}_{x^i}(x, y)\right)_{x=a}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ *pe de o parte, iar pentru* $y = b$ $\left(\varphi^{(n+h)}_{x^n y^h}(x, y)\right)_{y=b}$ $(h = 0, 1, \ldots m-1)$ *pe de altă parte, să fie funcţii date de* y *(respectiv de* x*), pentru* $y \in [b, b_1]$ *(respectiv* $x \in [a, a_1]$*) funcţiile date de* y *fiind derivabile de* m *ori în raport cu* y*, atunci:*

1° *Pentru* $n \geq p$ *şi* $m \geq q$*, ecuaţia (a) admite o soluţie unică, ce este funcţie întreagă de parametrul* λ.

2° *Pentru* $n \leq p-1$ *şi* $m \leq q-1$*, ecuaţia (a) nu mai admite o soluţie unică şi care să satisfacă condiţiile iniţiale de mai sus, decît dacă avem, în plus*

$$\begin{aligned} H_{nh}(x, y) &= 0 \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, m-1), \\ H_{im}(x, y) &= 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{b}$$

În acest din urmă caz, pentru $n = p-1$ *şi* $m = q-1$*, soluţia nu este mărginită decît pentru* λ *diferit de valorile date de ecuaţia*

$$H_{p-1,\, q-1}(x, y) - \lambda K_{pq}(x, y, x, y) = 0,$$

aceste din urmă valori constituind spaţiul lacunar al soluţiilor.

3° *Pentru* $n \leq p-2$, $m \leq q-2$*, adică pentru* $H_{p-1,\, q-1}(x, y) = 0$, $K_{pq}(x, y, x, y) \neq 0$*, soluţia este funcţie întreagă de* $\dfrac{1}{\lambda}$ *cu* $\lambda = 0$*, punct singular esenţial izolat al soluţiilor.*

2. *Aplicaţii la ecuaţiile liniare cu derivate parţiale.*

Să considerăm o ecuaţie liniară cu derivate parţiale

$$\sum_0^m{}_q \sum_0^n{}_p H_{pq}(x, y)\, \varphi^{(p+q)}_{x^p y^q}(x, y) = f(x, y), \tag{20}$$

unde funcţiile $H_{pq}(x, y)$, $f(x, y)$ sînt date continue şi derivabile în domeniul (D)

$$a \leq x \leq a_1; \quad b \leq y \leq b_1.$$

Calculele de mai sus ne arată că, dacă luăm pentru funcţia necunoscută $\varphi(x, y)$ expresia (7), ecuaţia (20) se transformă într-o ecuaţie integrală în $\Phi(x, y) = \varphi^{(n+m)}_{x^n y^m}(x, y)$ de forma

$$\begin{aligned} H_{nm}(x, y)\, \Phi(x, y) = f(x, y) - F(x, y) - \\ - \int_a^x \sum_0^{n-1}{}_p H_{pm}(x, y)\, \frac{(x-u)^{n-p-1}}{(n-p-1)!}\, \Phi(u, v)\, du - \\ - \int_b^y \sum_0^{m-1}{}_q H_{nq}(x, y)\, \frac{(y-v)^{m-q-1}}{(m-q-1)!}\, \Phi(x, u)\, dv - \\ - \int_a^x \int_b^y \sum_0^{m-1}{}_q \sum_0^{n-1}{}_p H_{pq}(x, y) \frac{(x-u)^{n-p-1}}{n-p-1)!}\, \frac{(y-v)^{m-q-1}}{(m-q-1)} \Phi(u, v)\, du\, dv. \end{aligned} \tag{21}$$

Înlocuind în (7) $\varphi^{(n+m)}_{x^n y^m}(x, y)$ prin soluţia $\Phi(x, y)$ a ecuaţiei (21), obţinem soluţia $\varphi(x, y)$ a ecuaţiei liniare cu derivate parţiale, care satisface condiţiile iniţiale (4) şi (6).

Pe de altă parte, teorema unicității soluțiilor ecuațiilor integrale ne permite să enunțăm

Teorema 2. *Orice ecuație liniară cu derivate parțiale de forma* (20), *în care funcțiile* $H_{pq}(x, y)$ *și* $f(x, y)$ *sînt date, continue și derivabile* într-un domeniu

$$a \leqslant x \leqslant a_1; \qquad b \leqslant y \leqslant b_1,$$

admite în acest domeniu o soluție și numai una, astfel încît pentru $x = a$

$$\left(\varphi^{(s)}_{x^s}(x, y)\right)_{x=a} = h_s(y) \quad (s = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{S}$$

iar pentru $y = b$:

$$\left(\varphi^{(n+r)}_{x^n y^r}(x, y)\right)_{y=b} = g_r(x) \quad (r = 0,1, \ldots, m-1), \tag{V}$$

$h_s(y)$ *fiind funcții date continue și derivabile pentru* $y \in [b, b_1]$, iar $g_r(x)$ funcții continue pentru $x \in [a, a_1]$.

3. *Ecuații integro-diferențiale liniare cu un număr oarecare de variabile independente.*

Vom reaminti, în primul rînd, că ecuațiile de forma

$$u = f + Lu,$$

unde

$$f = f(x_0, x_1, \ldots, x_r); \quad u = u(x_0, x_1, \ldots, x_r),$$

$$Lu = \int \ldots \int \sum_{p_0, \ldots, p_n} K_{p_0 p_1 \ldots p_n}(x_0, \ldots, x_n; s_0, \ldots, s_n) \frac{\partial^{\Sigma p_i} u(s_0, \ldots, s_n)}{\partial s_0^{p_{n_0}} \ldots \partial s_n^{p_n}}$$

domeniul de integrare fiind hipersfera de rază

$$r = \sqrt{\sum_1^m{}_q (x_q - s_q)^2},$$

au fost studiate de S. Sobolev [2], care stabilește convergența și unicitatea soluției prin metoda aproximațiilor succesive.

Noi vom considera ecuația integro-diferențială mai generală

$$\sum_0^{h_1} \sum_0^{h_2} \ldots \sum_0^{h_n} H_{p_1 p_2 \ldots p_n}(M) \varphi^{(p_1 + \ldots + p_n)}_{x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}}(M) = \tag{22}$$

$$= f(M) + \lambda \int_{a_1}^{x_1} \ldots \int_{a_n}^{x_n} \sum_0^{h_1} \ldots \sum_0^{h_n} K_{p_1 \ldots p_n}(M) \varphi^{(p_1 + \ldots + p_n)}_{s_1^{p_1} \ldots s_n^{p_n}}(P)\, dP$$

unde M și P sînt punctele de coordonate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, iar $dP = ds_1\, ds_2 \ldots, ds_n$.

Funcțiile $H(M)$, $K(M, P)$, $f(M)$ sînt date, continue și derivabile ori de cîte ori este necesar, în domeniul real

$$a_i \leqslant s_i \leqslant x_i \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Putem de asemenea scrie ecuația (22) sub forma de operatori

$$(HD\,\varphi)_{p_1 p_2 \ldots p_n} = f(M) + \lambda A(M)(KD\,\varphi)_{p_1 p_2 \ldots p_n} \tag{23}$$

şi vom căuta o soluţie luînd succesiv

$$\varphi(M) = \sum_0^{h_1-1} \left(\varphi^{(q_1)}_{x_1^{q_1}}(x_1, y_2, \ldots, x_n) \right)_{x_1 = a_1} \frac{(x_1 - a_1)^{q_1}}{q_1!} +$$

$$+ \int_{a_1}^{x_1} \frac{(x_1 - s_1)^{h_1-1}}{(h_1-1)!} \varphi^{(h_1)}_{s_1^{h_1}}(s_1, x_2, \ldots, x_n)\, ds_1, \tag{24}$$

$$\varphi^{(h_1)}_{s_1^{h_1}}(s_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_0^{h_2-1} \left(\varphi^{(h_1+q_2)}_{s_1^{h_1} x_2^{q_1}}(s_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \right)_{x_2 = a_2} \frac{(x_2 - a_2)^{q_2}}{q_2!} +$$

$$+ \int_{a_2}^{x_2} \frac{(x_2 - s_2)^{h_2-1}}{(k_2-1)!} \varphi^{h_1+h_2}_{s_1^{h_1} s_2^{h_2}}(s_1, s_2, x_3, \ldots, x_n)\, ds_2$$

$$\varphi^{(h_1+\ldots+h_n)}_{s_1^{h_1} s_2^{h_2}, \ldots, s_n^{h}}(s_1, \ldots, s_{n-1}, x_n) = \int_{a_n}^{x_n} \frac{(x_n - s_n)^{h_{n-1}}}{(k_n-1)!} \varphi^{(h_1+,\ldots,+h_n+s)}(p)\, ds_n +$$

$$+ \sum_0^{h_n-1} \varphi^{(h_1+\ldots+h_n+q_n)}_{s^{h_1} s^{h_2} \ldots s^{h_n}}(s_1, \ldots, s_{(n-1)\, a_n}) \frac{(x_n - a_n)^{q_n}}{q_n!},$$

unde funcţiile

$$\left(\varphi^{(q_1)}_{x_1^{q_1}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right)_{x_1 = a_1} \quad (q_1 = 0, 1, \ldots, h_1 - 1),$$

$$\left(\varphi^{(h_1+q_2)}_{x_1^{q_1} x_2^{q_2}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right)_{x_2 = a_2} \quad (q_1 = 0, 1, \ldots, h_2 - 1), \tag{25}$$

$$\left(\varphi^{(h_1+,\ldots,+h_n+q_n)}_{x_1^{h_1} x_2^{h_2} x_n^{q_n}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \right)_{x_n = a_n} \quad (q_n = 0, 1, \ldots, h_n - 1)$$

sînt presupuse cunoscute.

Relaţiile (24) ne dau pentru $\varphi(M)$ expresia

$$\varphi(M) = g(M) + \int_{(Dn)} \Phi(P) \prod_1^n \frac{(x_i - s_i)^{h_i-1}}{(h_i-1)!}\, dP, \tag{26}$$

iar pentru derivata parţială $\varphi(p_1 + \ldots + p_n)$

$$\varphi^{(p_1+\ldots+p_n)}(M) = G(M) +$$

$$+ \int_{(Dn)} \Phi(P) \frac{(x_1 - s_1)^{h_1-p_1-1}}{(h_1-p_1-1)!} \ldots \frac{(x_n - s_n)^{h_n-p_n-1}}{(h_n-p_n-1)!}\, dP, \tag{27}$$

unde $\Phi(P) = \varphi^{(h_1+\ldots+h_n)}(P)$.

Indicii ordinelor derivatelor indicînd de asemenea şi indicii variabilelor, nu s-a mai notat în derivatele parţiale variabilele corespunzătoare.

Din relaţiile de mai sus se vede imediat că pentru operatorul $(HD\,\varphi)_{p_1 \ldots p_n}$ se obţine o expresie în care intră: n integrale simple; C_n^2 integrale duble; ..., C_n^p integrale p-uple; ..., $C_n^{n-1} = n$ integrale $(n-1)$-uple, şi o integrală n-uplă.

Vom avea deci

$$(HD\varphi)_{p_1\dots p_n} = F\ (M) + H_{h_1h_2\dots h_n}(M)\,\Phi(M) +$$

$$+\int_{a_1}^{x_1}\sum_{0}^{h_1-1}{}_{p_1} H_{p_1h_2\dots h_n}(M)\,\frac{(x_1-u_1)^{h_1-p_1-1}}{(h-p-1)!}\quad \Phi(u_1, x_2, \dots, x_n)\,du_1 +$$

$$+\int_{a_2}^{x_2}\sum_{0}^{h_2-1}{}_{p_2} H_{h_1p_2h_3\dots h_n}(M)\,\frac{(h_2-u_2)^{h_2-p_2-1}}{(h_2-p_2-1)!}\,\Phi(x_1, u_2, x_3, \dots, x_n)\,du_2 + \dots + \tag{28}$$

$$+ \dots +$$

$$+ H_{p_1p_2h_3\dots h_n}\,\frac{(x_1-u_1)^{h_1-p_1-1}}{(h_1-p_1-1)!}\,\frac{(x_2-u_2)^{h_2-p_2-1}}{(h_2-p_2-1)!}\,\Phi(u_1, u_2, \dots, x_n)$$

$$du_1du_2 + \dots +$$

$$+\int_{(M)0}^{h_1-1}{}_{p_1}\cdots\sum_{0}^{h_n-1}{}_{p_n} H_{p_1\dots p_n}(M)\,\prod_i^n\frac{(x_i-u_i)^{h_i-p_i-1}}{(h_i-p_i-1)!}\,\Phi(P)\,dP.$$

Ca şi în cazul ecuaţiilor cu două variabile,

α) dacă

$$H_{h_1\dots h_n}(M) \neq 0,$$

ecuaţia integrală în $\Phi(M)$ admite o soluţie unică, funcţie întreagă de λ, cu condiţiile iniţiale (25).

β) dacă

$$H_{h_i\dots h_n}(M) \equiv 0,$$

condiţiile iniţiale (25) nu ne permit să obţinem o soluţie, decît dacă avem în plus

$$\left.\begin{aligned}
H_{p_1h_2\dots h_n} &= 0 \qquad (p_1 = 0, 1, \dots, h_1-1),\\
H_{h_1p_2h_3\dots h_n} &= 0 \qquad (p_2 = 0, 1, \dots, h_2-1),\\
&\dots\dots\dots\\
H_{h_1h_2\dots p_n} &= 0 \qquad (p_n = 0, 1, \dots, h_n-1),\\
H_{p_1p_2h_3\dots h_n} &= 0 \qquad (p_1 = 0, 1, \dots, h_1-1),\\
&\qquad\quad (p_2 = 0, 1, \dots, h_2-1),\\
H_{p_1p_2\dots p_{n-1}h_n} &= 0,\\
H_{h_1p_2\dots p_n} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

În aceste condiţii, ecuaţia integrală de prima speţă corespunzătoare nu conţine decît integrala n-uplă.

Derivînd de n ori, în raport cu $x_1, x_2, \dots, x_n$, obţinem o ecuaţie integrală de speţa a doua, în care apare intervalul lacunar

$$H_{h_1-1\dots h_{n-1}-1}(M) + \lambda\,K_{h_1\dots h_n}(M,M) = 0.$$

Dacă în plus avem

$$H_{h_1-1,\dots h_n-1}(M) = 0$$

şi

$$K_{h1\ \dots\ h_n} \neq 0,$$

soluţiile sînt sînt funcţii întregi de $\frac{1}{\lambda}$, $\lambda = 0$ fiind punct singular esenţial izolat al acestor soluţii.

Aceste rezultate constituie generalizarea teoremei stabilite mai sus, în cazul ecuațiilor cu două variabile independente.

4. *Aplicație la ecuațiile liniare cu derivate parțiale de un ordin oarecare, cu un număr oarecare de variabile.*

Să considerăm ecuația liniară cu derivate parțiale

$$(HD\varphi)_{p_1 p_2 \dots p_n}(M) = f(M)$$

și să căutăm o soluție $\varphi(M)$ care să satisfacă condițiile inițiale (25).

Luînd pentru $\varphi(M)$ dezvoltarea (26), obținem o ecuație integrală în $\Phi(M) = \varphi^{(h_1+h_2\cdots+h_n)}(M)$, egalînd (28) cu $f(M)$, și care admite o soluție unică $\Phi(M)$.

Înlocuind $\Phi(P)$ prin această soluție în (26), obținem soluția unică $\varphi(M)$ a ecuației cu derivate parțiale (c), de unde deci:

Teorema 3. *Orice ecuație liniară cu derivate parțiale, de formă* (c) *de ordin finit oarecare și cu un număr finit oarecare de variabile independente, unde* $Hr_1 \dots r_n(M)$, $f(M)$ *sînt funcții date, continue într-un domeniu* (D_n)

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

admite în acest domeniu o soluție și numai una care să verifice condițiile inițiale

$$\left(\varphi^{(q_1)}_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right)_{x_1=a_1} = g_{q_1}(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

(V) $$(q_1 = 0, 1, 2, \dots, h_1 - 1),$$

$$\left(\varphi^{(h_1+q_2)}_{x_2^{h_1} x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right)_{x_2=a_2} = g_{q_2}(x_1, x_3, \dots, x_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots \qquad q_2 = 0, 1, 2, \dots, h_2 - 1,$$

$$\left(\varphi^{(h_1+h_2+\dots+h_{m-1}+q_n)}_{x_1^{h_1} \dots x_{n-1}^{h_{n-1}} x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\right)_{x_n=a_n} =$$

$$= g_{q_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (q_n = 0, 1, 2, \dots, h_n - 1),$$

funcțiile g_{q_i} fiind cunoscute.

5. *Exemple*

În exemplele care urmează, ne vom limita la ecuațiile integro-diferențiale liniare de ordinul doi, cu două variabile independente. Ecuațiile de ordin superior, cu două sau mai multe variabile independente, se pot trata prin aceleași metode.

a. *Ecuații integro-diferențiale*

α) Să considerăm în primul rînd ecuația

$$z(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^x \int_b^y K(x, y, s, t)\, z''_{st}(s, t)\, ds\, dt, \tag{30}$$

unde z este funcția necunoscută, z''_{xy} (xy) derivata secundă în raport cu x și y, $f(x, y)$, $K(x, y, s, t)$ funcții date continue și derivabile în domeniul (D_2)

$$a \leqslant s \leqslant x \leqslant a_1 \quad ; \quad b \leqslant t \leqslant y \leqslant b_1.$$

Din (30) se vede că avem

$$z(a, y) = f(a, y) \quad \text{și} \quad z(x, b) = f(x, b).$$

Luînd pe de altă parte

$$\left.\begin{aligned} z(x, y) &= z(a, y) + \int_a^x z'_s(s, y)\, ds = f(a, y) + \int_a^x z'_s(s, y)\, ds, \\ z'_s(s, y) &= z'(s, b) + \int_b^y z''_{st}(st)\, ds\, dt = f'(s, b) + \int_b^y z''_{st}(s, t)\, ds\, dt, \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

obținem

$$z(x, y) = f(a, y) + \int_a^x f'_s(s, b)\, ds + \int_a^x \int_b^y z''_{st}(s, t)\, ds\, dt,$$

de unde, înlocuind în (30) ecuația integrală de prima speță

$$\int_a^x \int_b^y z''_{st}(s, t)\, ds\, dt = f(x, y) - f(a, y) - \int_a^x f'_s(s, b)\, ds + \lambda + \int_b^y K(x, y, s, t)\, z''_{st}(s, t)\, ds\, dt. \quad (32)$$

Ecuația (32) fiind verificată pentru $x = a$, putem s-o derivăm în raport cu x, obținînd

$$\int_b^y z''_{st}(x, t)\, dt = f'_s(x, y) - f'_s(x, b) + \lambda \int_b^y K(x, y, s, t)\, z''_{st}(x, t)\, dt + \lambda \int_a^x \int_b^y K'_s(x, y, s, t)\, z''_{st}(s, t)\, ds\, dt.$$

Această din urmă ecuație fiind verificată pentru $y = b$, ne conduce prin derivare în raport cu y, la ecuația integrală de speța a doua

$$z''_{xy}(x, y)\left[1 - \lambda K(x, y, x, y)\right] = f''_{xy}(x, y) + \lambda \int_a^x K'_s(x, y, s, y)\, z''_{sy}(s, y)\, ds + \lambda \int_b^y K'_y(x, y, x, t)\, z''_{xt}(x, t)\, dt + \lambda \int_a^x \int_y^b K''_{st}(x, y, s, t)\, z''_{st}(s, t)\, ds\, dt. \quad (33)$$

Ecuația (33) admite o soluție finită pentru toate valorile lui λ diferite de cele cuprinse în spațiul lacunar

$$1 - \lambda K(x, y, x, y) = 0.$$

Remarcă. Ecuația (33) se poate obține derivînd direct ecuația (30) în raport cu x și y. Putem de asemenea integra prin părți membrul doi al ecuației (30), ceea ce ne conduce la o ecuație integrală în $z(xy)$ cu același spațiu lacunar pentru soluții.

β) Fie ecuația

$$z(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^x \int_b^y K(x, y, s, t)\, z\, z^{(n+m)}_{sn+m}(s, t)\, ds\, dt. \quad (34)$$

Dacă se caută soluția care să satisfacă condițiile (4) și (6), se obține ecuația integrală de prima speță

$$\int_a^x\int_b^y \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{(y-t)^{m-1}}{(m-1)!}\,Z(s,t)\,ds\,dt = \tag{35}$$

$$= F(x,y) + \lambda\int_a^x\int_b^y K(x,y,s,t)\,z(s,t)\,ds\,dt,$$

unde s-a pus

$$Z(x,y) = Z^{(n+m)}_{x^n y^m}$$

și (36)

$$F(x,y) = f(x,y) - \sum_0^{n-1}{}_p \frac{(x-a)^p}{p!}\,z^{(p)}_{a^p}(a,y) -$$

$$-\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_0^{m-1}{}_q \frac{(y-b)^q}{q!}\,z^{n+q}_{s^n}(s,b)\,ds.$$

Cum pentru $x = a$, avem $F(ay) = f(ay) - z(ay) = 0$, putem deriva ecuația (35) în raport cu x și obținem astfel o nouă ecuație de prima speță

$$\int_a^n\int_b^y \frac{(x-s)^{n-2}}{(n-2)!}\,\frac{(y-t)^{m-1}}{(m-1)!}\,Z(s\,t)\,dsdt = F'_x(x,y) + \tag{37}$$

$$+\lambda\int_b^y K(x,y,x,t)\,Z(x,t)\,dt + \lambda\int_a^x\int_b^y K'_x(x,y,s,t)\,Z(s,t)\,dsdt.$$

Pe de altă parte, ecuația (37) este de asemenea identic verificată pentru $y=b$, deoarece din (34) deducem

$$z'_x(x,b) = f'_x(x,b)$$

și cum

$$-\int_a^x \frac{(x-s)^{n-2}}{(n-2)!}\,z^{(n)}_{s^n}(s,b)\,ds = \sum_0^{n-1}{}_p \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!}\,z^{(p)}_{a^p}(a,b)$$

găsim deasemenea că $F'(x,b) = 0$.

Putem deci deriva ecuația (37) în raport cu y și obținem astfel ecuația integrală de speța a doua

$$\int_a^x\int_b^y \frac{(x-s)^{n-2}}{(n-2)!}\,\frac{(y-t)^{m-2}}{(m-2)!}\,Z(s,t)\,dsdt = F''_{xy} +$$

$$+\lambda K(x,y,x,y)\,Z(x,y) + \lambda\int_a^x K'_x(x,y,s,y)\,Z(s,y)\,ds + \tag{38}$$

$$+\lambda\int_b^y K'_y(x,y,x,t)\,Z(x,t)\,dt + \lambda\int_a^x\int_b^y K''_{xy}(x,y,s,t)\,Z(s,t)\,Z(s,t)\,ds\,dt.$$

Soluția acestei ecuații este funcția întreagă de $\frac{1}{\lambda}$, cu $\lambda = 0$ punct singular esențial izolat.

b) *Ecuații cu derivate parțiale*

α) Să considerăm ecuația cu derivate parțiale, liniară, de tip hiperbolic

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + r(x,y)\, z = f(x, y). \tag{39}$$

Se știe [3] că există pentru aceste ecuații patru probleme diferite de condiții la limite.

Să presupunem că funcțiile p, q, r, f sînt date și continue în domeniul (D_2):

$$a \leqslant x \leqslant a_1 \; ; \; b \leqslant y \leqslant b_1$$

și să căutăm o soluție, astfel încît să avem

$$\begin{aligned} z(a, y) &= h(y), \\ z'_x(x, b) &= g(x), \end{aligned} \tag{40}$$

funcțiile $h(y)$ și $g(x)$ fiind date continue pentru $y \in [b, b_1]$ (respectiv pentru $x \in [a, a_1]$.)

Găsim astfel

$$z(x, y) = h(y) + \int_a^x g(s)\, ds + \int_a^x \int_b^y z''_{st}(s,t)\, ds\, dt \tag{41}$$

și

$$\left.\begin{aligned} z'_x(x, y) &= g(x) + \int_b^y z''_{xt}(x, t)\, dt, \\ z'_y(x, y) &= h'(y) + \int_a^x z''_{sy}(s, y)\, ds. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Înlocuind în (39), obținem ecuația integrală

$$\begin{aligned} Z(x, y) + \int_a^x q(x, y)\, Z(s,y)\, ds + \int_b^y p(x, y)\, Z(x, t)\, dt + \\ + \int_a^x \int_b^y r(x, y)\, Z(s, t)\, ds\, dt = F(x, y), \end{aligned} \tag{43}$$

unde s-a pus

$$Z(x, y) = z''_{xy}(x, y)$$

și

$$F(x, y) = f(x, y) - p(x, y)\, g(x) - q(x, y)\, h'(y) - r(x, y)\left[h(y) + \int_a^x g(s)\, ds\right].$$

Conform teoriei ecuațiilor integrale, ecuația (43) admite o soluție unică.

Înlocuind $z''_{st}(s, t)$ prin această soluție în (41), obținem soluția ecuației derivate parțiale (39).

Deci, nu există decît o soluție și numai una, a ecuației cu derivate parțiale (39), care să satisfacă condițiile (40).

β) Să considerăm ecuația

$$H_{000}(M)\,u(M)+H_{100}(M)\,u'_x(M)+H_{010}(M)\,u'_y(M)+$$
$$+H_{001}(M)\,u'_z(M)+H_{110}(M)\,u''_{xy}(M)+H_{011}(M)\,u''_{yz}+ \tag{44}$$
$$+H_{101}(M)\,u''_{xz}(M)+H_{111}(M)\,u'''_{xyz}(M)=f(M),$$

în care M este punctul de coordonate x, y, z, iar $u_{pqr}(M)$,p,q,r = (0,1) și $f(M)$ sînt funcții continue în domeniul D

$$(x,\ y,\ z)\in[a,\ a_1]\times[b,b_1]\times[c,c_1].$$

Să căutăm o soluție a ecuației (44) care să verifice condițiile la limită

$$\begin{aligned} &u(a,\ y,\ z)=p(y,z),\\ &u'_x(x,\ b,\ z)=q(x,z),\\ &u''_{xy}(x,\ y,\ c)=r(x,y), \end{aligned} \tag{45}$$

p, q, r fiind funcții cunoscute, continue și derivabile în raport cu y și z, definite respectiv în

$$[b,\ b_1]\times[c,\ c_1]\ ,\ [a,\ a_1]\times[c,\ c_1]\ \text{și}\ [a,\ a_1]\times[b,\ b_1].$$

Relațiile (24), (26) și (27) ne dau

$$u(x,\ y,\ z)=p(y,z)+\int_a^x u'_s(s,\ y,\ z)\,ds,$$

$$u'_s(x,\ y,\ z)=q(s,z)+\int_b^y u''_{st}(s,\ t,\ z)\,dt,$$

$$u''_{st}(s,\ t,\ z)=r(s,t)+\int_c^t u'''_{ptu}(s,\ t,\ u)\,du,$$

de unde

$$u(x,\ y,\ z)=p(y,z)+\int_a^x q(s,z)\,ds+\int_a^x\int_b^y r(s,t)\,ds\,dt+ \tag{46}$$
$$+\int_a^x\int_b^y\int_c^t u'''_{stu}(s,\ t,\ u)\,ds\,dt\,du.$$

Derivînd (46) în raport cu x, y, z, obținem

$$\left.\begin{aligned} u'_x&=q(x,z)+\int_b^y r(x,t)\,dt+\int_b^y\int_c^z u'''_{xtu}(x,t,u)\,dt\,du,\\ u'_y&=p'_y+\int_a^x r(s,y)\,ds+\int_a^x\int_c^z u'''_{syu}(s,y,u)\,ds\,du,\\ u'_z&=p'_z+\int_a^x q(s,z)\,ds+\int_a^x\int_b^y u'''_{stz}(s,t,z)\,ds\,dt \end{aligned}\right\}$$

și

$$\left.\begin{aligned} u''_{xy} &= r(x, y) + \int_c^z u'''_{xyu}(x, y, u)\, du, \\ u''_{yz} &= p''_{yz}(y, z) + \int_a^x u'''_{syz}(s, y, z)\, ds, \\ u''_{zx} &= q(x, z) + \int_b^y u'''_{xtz}(x, t, z)\, dt. \end{aligned}\right\}$$

Înlocuind în (44) funcția $u(M)$ și derivatele parțiale prin expresiile de mai sus, obținem ecuația integrală în u'''_{xyz}

$$H_{000}(M)\left[p(y,z) + \int_a^x q(s,z)\, ds + \int_a^x \int_b^y r(s,t)\, ds\, dt + \int_a^x \int_b^y \int_c^z u'''_{stu}(s,t,u)\, ds\, dt\, du\right] +$$

$$+ H_{100}(M)\left[q(x,z) + \int_b^y r(x,t)\, dt + \int_b^y \int_c^z u'''_{xtu}(x,t,u)\, dt\, du\right] + H_{010}(M)\left[p'_y(y,z) + \right.$$

$$\left. \int_a^x r(s, y)\, ds + \int_a^x \int_c^z u'''_{syu}(s, y, u)\, ds\, du\right] + H_{001}(M)\left[p'_z(y, z) + \int_a^x q(s, z)\, ds + \right.$$

$$\left. + \int_a^x \int_b^y u'''_{stz}(s, t, z)\, ds\, dt\right] + H_{110}(M)\left[r(x, y) + \int_c^z u'''_{xyu}(x, y, u)\, du\right] +$$

$$+ H_{101}\left[q(x,z) + \int_b^y u'''_{xtz}(x, t, z)\, dt\right] +$$

$$+ H_{101}(M)\left[p'''_{yz}(y, z) + \int_a^x u'''_{syz}(s, y, z)\, ds\right] +$$

$$+ H_{111}(M)\, u'''_{xyz}(M) = f(M)$$

care se mai poate scrie sub forma

$$H_{111}(M)\, u'''_{xyz}(M) = F(M) - \int_a^x H_{011}(x, y, z)\, u'''_{syz}(s, y, z)\, ds -$$

$$- \int_b^y H_{101}(x, y, z)\, u'''_{xtz}(x, t, z)\, dt - \int_s^z H_{110}(x, y, z)\, u'''_{xyu}(x, y, u)\, du -$$

$$- \int_a^x \int_b^y H_{100}(x, y, z)\, u'''_{xtu}(x, t, u) dt\, du - \int_a^x \int_b^y H_{001}(x, y, z)\, u'''_{stz}(s, t, z)\, ds\, dt -$$

$$- \int_a^x \int_c^z H_{010}(x, y, z)\, u'''_{syu}(s, y, u)\, ds\, dt - \qquad (47)$$

$$- \int_a^x \int_b^y \int_c^z H_{000}(x, y, z)\, u'''_{stu}(s, t, u)\, ds\, dt\, du.$$

Dacă $H_{111}(M) \neq 0$ oricare ar fi $M \in (D)$, ecuația integrală (47) admite o soluție unică.

Soluția unică a ecuației (44) se obține înlocuind în (44) pe $u'''_{xyz}(M)$ prin soluția ecuației (47).

6. *Metoda de rezolvare prin integrare*

Atît condițiile (4) și (6) pentru ecuațiile cu două variabile independente, cît și condițiile (25) referitoare la ecuațiile integro-diferențiale sau cu derivate parțiale, cu un număr finit oarecare de variabile independente, sînt diferite de condițiile clasice ale problemei lui Cauchy.

Teoria ecuațiilor integrale ne arată că, dacă funcțiile cunoscute ce intră într-o asemenea ecuație integro-diferențială (sau într-o ecuație cu derivate parțiale) sînt continue în tot domeniul lor de definiție, ecuația corespunzătoare admite o soluție și *numai una* care satisface condițiile (4) și (6) sau (25).

Vom arăta acum că *aceste condiții sînt echivalente cu datele lui Cauchy, în raport cu fiecare din variabilele independente.*

Pentru aceasta vom considera cazul particular al unei ecuații cu derivate parțiale cu două variabile independente, de un ordin finit oarecare.

Problema generală a unei ecuații integro-diferențiale (sau cu derivate parțiale), cu un număr finit oarecare de variabile independente, se tratează în mod analog și nu prezintă alte dificultăți decît cele datorite calculelor mai complicate.

Să considerăm deci ecuația (20), a cărei soluție ce satisface condițiile la limită (4) și (6) se obține cu ajutorul soluției ecuației integrale (21).

Dacă scriem condițiile la limită (4) și (6) sub forma

$$\left.\begin{aligned} \left(\varphi^{(s)}_{x^s}(x, y)\right)_{x=a} &= p_s(y) \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \\ \left(\varphi^{(n+r)}_{x^n y^r}\right)_{y=b} &= q_r(x) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, m-1), \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

din relația (7) deducem pentru derivatele parțiale

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{j+k}_{x^j y^k}(x, y) &= \sum_{r}^{n-1}{}_{j} \frac{(x-a)^{r-j}}{(r-j)!}\, p^{k}_{r}(y) + \\ &\left(\begin{matrix}0 \leqslant j \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant k \leqslant m-1\end{matrix}\right) \quad + \sum_{k}^{m-1}{}_{r} \frac{(y-b)^{r-k}}{(r-k)!} \int_a^x \frac{(x-u)^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\, q_r(u)\, du + \\ &+ \int_a^x \int_b^y \frac{(x-u)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \frac{(y-v)^{m-k-1}}{(m-k-)!}\, \varphi^{(n+m)}_{m^n v^m}(u, v)\, du\, dv \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

și

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(n+k)}_{x^n y^k}(x, y) &= \sum_{k}^{m-1}{}_{r} \frac{(j-b)^{r-k}}{(r-k)!}\, q_r(x) + \int_b^y \frac{(y-v)^{m-k-1}}{(m-k-1)!}\, \varphi^{(n+m)}_{x^n v^m}(x, t)\, dv, \\ &\qquad\qquad 0 < k < m-1 \\ \varphi^{(j+m)}_{x^j y^m}(x, y) &= \sum_{j}^{n-1}{}_{r} \frac{(x-a)^{r+j}}{(r-j)!}\, p^{(m)}_{r}(y) + \int_a^x \frac{(x-s)^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\, \varphi^{(n+m)}_{u^m y^x}(u, y)\, du \\ &\qquad\qquad 0 \leqslant j \leqslant n-1 \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Dacă în relațiile (49) facem $j = 0$ și $y = b$, obținem

$$\left(\varphi^{(k)}_{y^k}(x, y)\right)_{y=b} = \sum_{0}^{n-1}{}_{r} \frac{(x-a)^r}{r!}\, p^{(k)}_{r}(b) + \int_a^x \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, q_k(u)\, du. \tag{51}$$

Vedem deci că $\left(\varphi_{y^k}^{(k)}(x, y)\right)_{y=b}^{0\leqslant k\leqslant m-1}$ este o funcție cunoscută ce se exprimă cu ajutorul funcțiilor date $(p_r(y))_{0\leqslant r\leqslant n-1}$ și $(q_k(x))_{0\leqslant k\leqslant m-1}$

Deci, în loc de condițiile la limită (48) putem considera condițiile la limită

$$\left(\varphi_{x^r}^{(r)} x, y)\right)_{x=a} = p_r(y) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{52}$$

și

$$\left(\varphi_{y^k}^{(k)}(x,y)\right)_{y=b} = r_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2\ldots, m-1) \tag{53}$$

ce se deduc din (48) cu ajutorul relațiilor (51).

Problema pe care ne-o punem acum este următoarea:

Să se determine soluția ecuației (20) *care pentru* $x = a$ *și* $y = b$ *satisface respectiv condițiile* (52) *și* (53).

Pentru aceasta, vom proceda ca și în cazul problemei lui Cauchy pentru ecuațiile integro-diferențiale cu o singură variabilă [1]*), adică vom integra ecuația (20) de n ori în raport cu x și apoi de m ori în raport cu y, ținînd seama la fiecare integrare respectiv de condițiile (52) și (53).

Să considerăm, de exemplu, în ecuația (20), termenul de ordinul cel mai mare, adică $H_{nm}(x_0y)\dfrac{\partial^{n+m}\varphi(x,y)}{\partial x^n\,\partial y^m}$.

O integrare de la a la x ne dă

$$I_{mn}^{(1)} = \int_a^x H_{mn}(s, y)\,\varphi_{s^n y^m}^{(n+m)}(s, y)\,ds = H_{nm}(x, y)\,\varphi_{x^{n-1}y^m}^{(n-1+m)}(x, y) -$$

$$- H_{nm}(a, y)\left(\varphi_{x^{n-1}y^m}^{(n-1+m}(x, y)\right)_{x=a} - \int_a^x H'_{nm_s}(s, y)\,\varphi_{s^{n-1}y^m}^{(n-1+m)}(s, y)\,ds.$$

Dar ținînd seama de (52), avem

$$\left(\varphi_{x^{n-1+m}y^m}^{(n-1+m)}(x, y)\right)_{x=a} = p_{n-1}^{(m)}(y).$$

De altă parte,

$$\int_a^x H'_{mn_s}(s,y)\,\varphi_{s^{n-1}y^m}^{(n-1+m)}(s,y)\,ds = H'_{mn_x}(x, y)\,\varphi_{x^{n-2}y^m}^{(n-2+m)} -$$

$$- H'_{mn_a}(a,y)\,\varphi_{a^{n-2}y^m}^{(n-2+m)}(a, y) - \int_a^x H''_{mn_{s^2}}(s, y)\,\varphi_{s^{n-2}y^m}^{(n-2+m)}(s,y)\,ds.$$

Dar

$$\varphi_{a^{n-2+m}y^m}^{(n-2+m)}(a, y) = p_{n-2}^{(m)}(y),$$

deci

$$I_{mn}^{(1)} = H_{mn}(x, y)\,\varphi_{x^{n-1}y^m}^{(n-1+m)}(x, y) - H_{mn}(a, y)\,p_{n-1}^{(m)}(y) -$$

$$- H'_{mn_x}(x, y)\,\varphi_{x^{n-2}y^m}^{(n-2+m)}(x, y) + H'_{mn_a}(a, y)\,p_{n-2}^{(m)}(y) +$$

$$+ \int_a^x H''_{mn_{s^2}}(x, y)\,\varphi_{s^{n-1}y^m}^{(n-2+m)}(s, y)\,ds.$$

*) p. 13

Continuînd aceleaşi operaţii, găsim

$$I_{mn}^{(1)} = H_{mn}(x, y)\,\varphi_{x^{n-1}y^m}^{(n-1+m)}(x, y) - H_{mn}(a, y)\,p_{n-1}^{(m)}(y) -$$

$$- H'_{mn_x}(x, y)\,\varphi_{x^{n-2}y^m}^{(n-2+m)}(x, y) + H_{mn_\alpha}^{+}(a, y)\,p_{n-2}^{(m)}(y) + H''_{mn_{x^2}}(x, y)\,\varphi_{x^{n-3}y^m}^{n-3+m}(x, y) -$$

$$- H''_{mn_{a^2}}(a, y)\,p_{m-3}^{(m)}(y) - H'''_{mn_{x^3}}(x, y)\,\varphi_{x^{n-4}y^m}^{(n-1+m)}(x, y) +$$

$$+ H'''_{mn_{a^3}}(a, y)\,p_{m-4}^{(m)}(y) + \ldots + (-1)^n \int_a^x H_{mn_s^n}^{(n)}(s, y)\,\varphi_{y^m}^{(m)}(s, y)\,ds.$$

O nouă integrare de la a la x ne dă, ţinînd seama de (52),

$$I_{mn}^{(2)} = \int_a^x I_{mn}^{(1)}(s, y)\,ds = H_{mn}(x, y)\,\varphi_{x^{n-2}y^m}^{n-2+m}(x, y) - H_{mn}(a, y)\,p_{n-2}^{(m)}(y) -$$

$$- \int_a^x H'_{mn_s}(s, y)\,\varphi_{s^{n-2}y^m}^{(n-2+m)}(s, y)\,ds - H_{mn}(a, y)\,p_{n-1}^{(m)}(y)(x - a) -$$

$$- \int_a^x H'_{mn_s}(s, y)\,\varphi_{s^{n-2}y^m}^{(n-2+m)}(s, y)\,ds + H'_{mn_a}(a, y)\,p_{n-2}^{(m)}(y)(x - a) +$$

$$+ \int_a^x H''_{mn}(s, y)\,\varphi_{s^{n-3}y^m}^{(n-3+m)}(s, y)\,ds - \ldots (-1)^n \int_a^x H_{m^n s^n}^{n}(s, y)(n, s)\,\varphi_{y^m}^{(m)}(s, y)\,ds.$$

Integrînd de n ori succesiv de la a la x, obţinem în cele din urmă o expresie în care intră ca prim termen $H_{mn}(x, y)\,\varphi_{y^m}^{(m)}(x, y)$, apoi termeni cu integrale de la a la x, în care funcţiile de sub semnul de integrare sînt produse dintre $\varphi_{y^m}^{(m)}(s, y)$ prin funcţii cunoscute şi, în sfîrşit, termeni formaţi din funcţii cunoscute.

Dacă integrăm această nouă expresie de m ori de la b la y, ţinînd seama la fiecare integrare de condiţiile (53), obţinem o expresie în care primul termen este $H_{mn}(x, y)\,\varphi(x, y)$, ceilalţi termeni fiind integrale de la a la x şi de la b la y din $\varphi(s, t)$ înmulţiţi cu funcţii cunoscute, sau termeni formaţi din funcţii cunoscute.

Aplicînd aceleaşi operaţii tuturor termenilor ecuaţiei (20), obţinem în cele din urmă o ecuaţie integrală de tip Volterra, de speţa a doua, în care funcţia necunoscută este $\varphi(x, y)$. Dacă $H_{mn}(x, y) \neq 0$ în tot domeniul său de existenţă, soluţia acestei ecuaţii este unică, dacă în plus funcţiile cunoscute sînt continue şi derivabile în domeniul lor de existenţă.

Pe de altă parte, condiţiile (48) şi (52) + (53) se pot deduce unele din altele, astfel încît şi problemele la limită corespunzătoare ne conduc fie la o ecuaţie integrală în care funcţia necunoscută este $\varphi_{x^n y^m}^{(n+m)}$ (dacă se consideră condiţiile (48)) fie la o ecuaţie integrală în $\varphi(x, y)$ (dacă se consideră condiţiile (52) + (53)).

Exemple

1. Să considerăm ecuaţia de tip hiperbolic (39). Am văzut mai sus că soluţia acestei ecuaţii care satisface condiţiile (40) se obţine cu ajutorul ecuaţiei integrale (43).

Pentru a aplica metoda de mai sus ecuației (39), vom integra a doua relație (40) de la a la x, ceea ce ne dă

$$\int_a^x z'_s(o, b) = z(x, b) - z(a, b) = z(x, b) - h(b),$$

de unde condițiile la limită

$$\left.\begin{aligned} z(a, y) &= h(y), \\ z(x, b) &= h(b) + \int_a^x g(s)\, ds = g_1(x). \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Prin urmare, în acest caz găsim o problemă cunoscută și anume: să se determine soluția ecuației (39) cînd se dau valorile funcției necunoscute pe caracteristicile $x = a$ și $y = b$.

Este ușor de văzut că, dacă integrăm ecuația (46) de la a la x și de la b la y, obținem, ținînd seamă de condițiile (61), ecuația integrală

$$z(x\,y) = g_1(x) + h(y) + h(b) + \int_a^x \int_b^y \left[\frac{\partial p\ (s, t)}{\partial s} + \frac{\partial q\,(s,t)}{\partial t} - r(s,t)\right] z(s,t)\, dsdt -$$

$$- \int_a^x q(s, y)\, z(s, y)\, ds - \int_b^y p(x, t)\, z(x, t)\, dt + \tag{55}$$

$$+ \int_a^x q\ (s, b)\, g_1(s)\, ds + \int_b^y p\ (a, t)\, h(t)\, dt.$$

Invers, problema căutării soluției ecuației (39) care satisface condițiile (54) se poate aduce la problema căutării soluției care satisface condițiile (40). Pentru aceasta este suficient să derivăm pe $z(x, b)$ în raport cu x, în a doua relație (54), pentru a obține condițiile (40).

Într-o lucrare anterioară [4]*) am arătat că soluția ecuației (39) care satisface condițiile (40) se poate obține de asemenea prin metoda lui Riemann, care pentru un arc de curbă format din două segmente ale caracteristicilor $x = a$ și $y = b$ [4]**) se scrie

$$Z_M = \int_a^x \int_b^y v(x\,y; s,t)\, f(s, t)\, dsdt + v(x, y, a,; y)\, h(y) +$$

$$+ \int_b^y h(t) p(a, t)\, v(x, y; a, t)\, dt - \int_y^b h(t)\, \frac{\partial v(x, y, a, t)}{\partial t}\, dt + \tag{56}$$

$$+ \int_a^x v\ (x,\ y\ ; s,b)\, q(s, b)\, z(s, b)\, ds + \int_a^x v(x, y; s, b)\, g(s)\, ds,$$

în care $v(x, y; \xi, \eta)$ este funcția lui Riemann.

---

*) p. 35.

**) În cazul unei asemenea curbe Γ, domeniul de integrare D este dreptunghiul $MPRQ$ și deci, în toate formulele din lucrarea mai sus citată trebuie să se înlocuiască $\iint_D . dxdy$ prin $\int_a^x \int_b^y . dxdy$.

Dacă presupunem că $z(x, b)$ este funcția necunoscută, atunci, derivînd ecuația (56) în raport cu x și făcînd apoi $y = b$, obținem pentru $z(x, b)$ ecuația integrală*)

$$q(x, b)\, z(x,b) + \int_a^x \frac{\partial v(x, b; s, b)}{\partial x}\, q(s,b)\, z(s, b)\, ds =$$

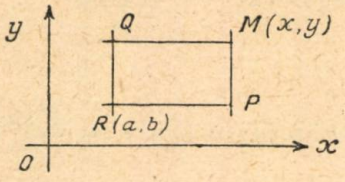


Fig. 1

$$= -\int_a^x \frac{\partial v(x, b; s, b)}{\partial x}\, g(s)\, ds - h(b)\, \frac{\partial (x, b\ ; a, b)}{\partial x}. \tag{57}$$

Dar

$$v(x\ y;\ x, y) = e^{\int_y^n p(x,v)\, dv}$$

și

$$v(x, y\ ; \xi, y) = e^{\int_x^\xi q(t,g)\, dt},$$

deci

$$\frac{\partial v\ (x,b;\ s,b)}{\partial x} = q\ (x, b)\, e^{\int_x^s q\,(t,b)\, dt}$$

și

$$\frac{\partial v(x, b;a,b)}{\partial x} = -q\ (x, b)\, e^{\int_x^a q\,(t,b)\, dt}.$$

Prin urmare, ecuația (56) se mai poate scrie după simplificare prin $q\ (x, b)$

$$z(x, b) - \int_a^x e^{\int_x^s q\,(t,b)\, dt}\, .\, q(s, b)\, z(s, b)\, ds =$$
$$= h(b)\, e^{\int_x^a q\,(t,b)\, dt} + \int_a^x e^{\int_x^s q\,(t,b)\, dt}\, g\ (s)\, ds. \tag{58}$$

Dar

$$q(s,b)\, e^{\int_x^s q(t,b)\, dt} = \frac{\partial v\ (x, b\ ;\ s, b)}{\partial s}.$$

Înlocuind în (58) și integrînd prin părți, obținem

$$z(x,\ b) = \left[v\ (x, b\ ; s, b)\, z\ (s, b) \right]_a^x - \int_a^x v\ (x, b\ ; s, b)\, \frac{\partial z\ (s, b)}{\partial s}\, ds +$$
$$+ h\ (b)\, e^{\int_a^x q\,(t,b)\, dt} + \int_a^x e^{\int_x^s q\,(t,b)\, dt}\, g\ (s)\, ds$$

*) În formele (7) și (8) din lucrarea mai sus citată, termenul cu integrala dublă trebuie suprimat, deoarece pentru $y = b$, el este egal cu zero.

sau, ținînd seama de relația $v(x, y, x, y) = 1$,

$$z(x, b) = z(x, b) - v(x, b; a, b)\, z(a, b) - \int_a^x v(x, b; s, b) \frac{\partial z(s, b)}{\partial s} ds + \\ + h(b)\, e^{\int_a^x q(t, b)\, dt} + \int_a^x e^{\int_x^s q(t, b)\, dt} \tag{59}$$

Dar

$$v(x, b; a, b)\, z(a, b) = h(b)\, e^{\int_x^a q(t, b)\, dt}$$

și

$$v(x, b; s, b) = e^{\int_x^s q(t, b)\, dt},$$

deci ecuația (59) se reduce la expresia

$$-\int_a^x e^{\int_x^s q(t, b)\, dt} \frac{\partial z(s, b)}{\partial s} ds + \int_a^x e^{\int_x^s q(t, b)\, dt} g(s)\, ds = 0,$$

care este identic satisfăcută dacă se ia ca soluție

$$z(x, b) = \int_a^x g(s)\, ds + h(b).$$

2° Să considerăm ecuația

$$z^{(4)}_{x^2y^2}(x, y) + a(x, y)\, z^{(2)}_{x^2}(x, y) + b(x, y)\, z'_y(x, y) + c(x, y)\, z(x, y) = f(x, y) \tag{60}$$

și să căutăm o soluție a acestei ecuații care să verifice condițiile la limită

$$\left.\begin{aligned} \left(z^{(r)}_{x^r}(x, y)\right)_{x = a} &= p_r(y) \qquad (r = 0, 1), \\ \left(z^{(k)}_{y^k}(x, y)\right)_{y = b} &= q_k(x) \qquad (k = 0, 1), \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

în care $p_r(y)$ și $q_k(x)$ sînt funcții continue și derivabile pînă la ordinul doi pentru $x \in [a, a_1]$ și $y \in [b, b_1]$.

Integrînd de două ori succesiv ecuația (60) de la a la x și ținînd seamă de (61), obținem ecuația

$$z^{(2)}_{y^2} = p_s^{(2)}(y) - r_1^{(2)}(y)(x - a) - a(x, y)\, z(x, y) + a(a, y)\, p_1(y)(x - a) + \\ + \int_a^x a_s'(s, y)(x - s)\, z(s, y)\, ds - \int_a^x (x - s)\, b(s, y) z'_s(s, y)\, dy - \\ \int_a^x (x - s) - c(s, y)\, z(s, y)\, ds + \int_a^x (x - s) f(s, y)\, ds. \tag{62}$$

Integrînd apoi de două ori succesiv ecuaţia (62) de la b la y şi ţinînd seama de condiţiile (61) obţinem ecuaţia integrală de tip Volterra, de speţa a doua

$$\left.\begin{aligned} z(x,y) &+ \int_b^y (y-t)\,a(x,t)\,z(x,t)\,dt + \int_a^x \int_b^y \{(x-s)(y-t)\,c(s,t) - a_s'(s,t)][- \\ &- [b_t'(s,t)(y-t) - b(s,t)]\,(x-s)\}\,z(s,t)\,ds\,dt = q_0(x) + q_1(x)(y-b) + \\ &+ p_0(y) - p_0(b) + p_0'(b)\,(y-b) + (x-a)\,[p_1(y) - p_2(b) + p_1'(b)(y-b)] + \\ &+ (x-a)\int_b^y (y-t)\,a(a,t)\,p_1(t)\,dt + (y-b)\int_a^x (x-s)\,b(s,b)\,q_0(s)\,ds + \\ &+ \int_a^x \int_b^y (x-s)(y-t)\,f(s,t)\,ds\,dt, \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

care se poate rezolva prin metodele clasice.

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ИЗВЕСТНЫХ КЛАССОВ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИЛИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

1. Автор рассматривает интегро-дифференциальные уравнения вида (1) и ищет решения, удовлетворяющие граничным условиям (4) и (6). При помощи преобразований (7) в (13) он преобразует (1) в интегральное уравнение (14), неизвестная которого есть $\Phi = \varphi^{(n+m)}_{x^n y^m}(x, y)$, каковое уравнение допускает решение, являющееся целой функцией параметра λ.

Если $H_{nm}(x, y) = 0$, интегральное уравнение (14) является уравнением 1-го разряда и условия (4), и (6) дают решение лишь тогда, когда удовлетворены условия (16). В этом случае, после деривации относительно x и y, получаем интегральное уравнение типа Вольтерра (17), в котором обнаруживаем появление «лакунарного пространства» (18).

Если $H_{n-1,\,m-1}(x, y) = 0, k_{nm}(x, y) \neq 0$, соответственное интегральное уравнение допускает единственное решение, удовлетворяющее условиям (4) и (6), причем это решение является целой функцией параметра $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Все эти результаты являются предметом теоремы 1.

2. Автор применяет предыдущие результаты к уравнениям с частными производными (20) и показывает, что существует лишь одно решение (20), удовлетворяющее условиям (4) и (6) (теорема 2).

3—4. Эти же результаты распространяются на интегро-дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными (d) и некоторым конечным числом независимых переменных.

Автор показывает, что существует лишь одно решение (22) соответственно (d), удовлетворяющее условиям (25).

Если в (22) имеем $Hh_1,\ h_2 \ldots\ h_n\,(M) = 0$ какого-либо условия, то (25) дают решение только тогда, когда имеем также и (29). В этом последнем случае в соответствующем интегральном уравнении появляется также «лакунарное пространство»:

$$Hh_1 - 1,\ h_2 - 1, \ldots,\ h_{n-1} - 1\,(M) + Kh_1 h_2 \ldots h_n\,(M,M) = 0,$$

Все эти результаты содержатся в теореме 3.

5. Автор использует предыдущие теоремы для решения интегро-дифференциальных уравнений (30) и (34) и уравнений с частными производными (39), (44).

6. Автор показывает, что условия (4) и (6), написанные в виде (48), эквивалентны условиям (52) и (53), выводимым из предшествующих при помощи (51), и ищет решение в (20), которое при $x = a$ и $y = b$ удовлетворяет условиям (52) и (53). Для этого он преобразует (20) в интегральное уравнение в $\varphi\,(x, y)$, интегрируя его n раз относительно x и m раз относительно y, с учетом при каждом интегрировании условия (52) (соответственно (53)).

Применение этого метода к уравнению (39), решение которого отыскивается, и которое может удовлетворить условиям (54), приводит к интегральному уравнению (55).

Автор показывает, что опубликованный ранее [4] метод Римана, примененный к (39), с предельными условиями (40), дает в качестве решения интегрального уравнения (56) выражение

$$z\,(x,\ b) = \int_{\alpha}^{n} g\,(s)\,ds + h\,(b),$$

причем значения g и h даны (54).

Рассматривается наконец уравнение с частными производными (60), решение которого, удовлетворяющее условиям (61), дано решением $z\ (x,\ y)$ интегрального уравнения (63).

Все эти результаты легко распространить на уравнения с некоторым конечным числом независимых переменных какого-либо конечного порядка.

SUR QUELQUES NOUVEAUX PROBLÈMES AUX LIMITES POUR CERTAINES CLASSES D'ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES OU AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

(RÉSUMÉ)

1. L'Auteur considère les équations intégro-différentielles de la forme (1), dont il cherche les solutions qui vérifient les conditions aux limites (4) et (6). Moyennant les transformations (7) à (13), il transforme (1) en une équation intégrale (14) dont l'inconnue est $\Phi = \varphi^{(n+m)}_{x^n y^m}\ (x,y)$, équation qui admet une solution, fonction entière du paramètre $\cdot$ Si $H_{nm} \equiv (x,y) \equiv 0$, l'équation intégrale (14) est de 1ère espèce et les conditions (4) et (6) ne donnent une solution que si l'on a satisfait les conditions (16). Dans ce cas, après dérivation par rapport à x et y, on obtient l'équation intégrale du type Volterra (17), où l'on voit apparaître « l'espace lacunaire » (18).

Si $H_{n-1,\,m-1}(x,y) \equiv 0$, $K_{nm}(x,y) \not\equiv 0$, l'équation intégrale correspondante admet une seule solution qui vérifie les conditions (4) et (6), cette solution étant fonction entière du paramètre $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Tous ces résultats font l'objet du théorème 1.

2. L'Auteur applique les résultats précédents aux équations aux dérivées partielles (20) et montre qu'il n'y a qu'une solution de (20) qui vérifie les conditions (4) et (6) (théorème 2).

3—4. Extension des mêmes résultats aux équations intégro-différentielles et aux équations aux dérivées partielles (d), à un nombre fini quelconque de variables indépendantes. L'Auteur montre qu'il n'existe qu'une seule solution de (22) (resp. (d) qui vérifie les conditions (25)).

Si dans (22) on a $H_{h_1,\,h_2 \ldots h_n}(M) = 0$, les conditions (25) ne donnent de solution que si l'on a, en outre, (29). Dans ce dernier cas, dans l'équation intégrale correspondante, il apparaît également « *l'espace lacunaire* »

$$H_{h_1} - 1,\ h_2 - 1, \ldots,\ h_{n-1} - 1(M) + \lambda K_{h_1 h_2 \ldots h_n}(M,\ M) = 0.$$

Tous ces résultats sont contenus dans le théorème 3.

5. L'Auteur applique les théorèmes précédents à la solution des équations intégro-différentielles (30) et (34), et aux équations aux dérivées partielles (39), (44).

6. L'Auteur montre que les conditions (4) et (6), écrites sous la forme (39), sont équivalentes aux conditions (52) et (53), qui se déduisent des précédentes, à l'aide de (51). Il cherche une solution de (20) qui, pour $x = a$ et $y = b$, vérifie les conditions (52) + (53). Pour ce faire, il transforme (20) en une équation intégrale en $\varphi(x, y)$ en l'intégrant n fois, par rapport à x, et m fois, par rapport à y, en tenant compte, à chaque intégration, des conditions (52) (resp. (53)).

Application de cette méthode à l'équation (39), dont on cherche une solution qui satisfasse aux conditions (54), ce qui conduit à l'équation intégrale (55).

L'Auteur montre que la méthode de Riemann, appliquée à (39), avec les conditions aux limites (40), méthode publiée antérieurement (v. 4), donne pour solution de l'équation intégrale (56) l'expression

$$z(x,b) = \int_d^n g(s)ds + h(b),$$

g et h ayant les valeurs données par (54).

Il considère enfin l'équation aux dérivées partielles (60) dont la solution, qui vérifie les conditions (61), est donnée par la solution $z(x, y)$ de l'équation intégrale (63).

Tous ces résultats s'étendent facilement aux équations à un nombre fini quelconque de variables indépendantes, d'ordre fini quelconque.

BIBLIOGRAFIE

1. Sergiu Vasilache, *Problema lui Cauchy şi repartiţia spectrală a valorilor parametrului λ în rezolvarea ecuaţiilor integro-diferenţiale.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, t. IV, nr. 1, ianuarie-februarie-martie 1952, p. 7.

2. S. Sobolev, *Sur une classe d'équations intégro-différentielles à plusieurs variables indépendantes.* C. R. Acad. U.R.S.S., t. 2, nr. 17, p. 451.
3. E. Picard, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles.* Gauthier-Villars, Paris, 1927.
4. Sergiu Vasilache, *O nouă problemă de frontieră pentru ecuațiile liniare cu derivate parțiale de tip hiperbolic.* Comunicările Acad. R.P.R., t. I, nr. 1, 1951, p. 35.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 1–2, 1955

CONTRIBUŢII LA TEORIA *KB*-LINEALELOR *)

DE

IVAN SINGER **)

CAPITOLUL I

PRELIMINARII

§ 1. *KB*-lineale. Funcţionale pozitive

Fie în mulţimea liniară E (cu scalari reali), pentru unele elemente ale ei, definită o relaţie $x > 0$ (0 = elementul nul al mulţimii liniare E). În baza acestei relaţii se introduce şi relaţia $x > y$: prin definiţie $x > y$, ("x este mai mare decît y"), dacă $x - y > 0$. Dacă sînt îndeplinite axiomele

I. $x > 0$ exclude $x = 0$,

II. $x > 0$, $y > 0$ implică $x + y > 0$,

III. pentru orice două elemente x şi y există sup (x, y) (adică cel mai mic dintre elementele z cu proprietatea că $z \geqslant x$, $z \geqslant y$),

IV. $x > 0$, $\alpha > 0$ implică $\alpha x > 0$,

atunci mulţimea liniară E se numeşte K-lineal [10] ***).

Definind, în mod obişnuit, pentru orice element x al K-linealului E partea pozitivă, partea negativă şi modulul lui prin

$$x_+ = \sup (x, 0),\ x_- = \sup (-x, 0),\ |x| = x_+ + x_-$$

avem următoarele proprietăţi cunoscute şi imediate:

$$x_+ \geqslant 0,\ x_- \geqslant 0,\ |x| \geqslant 0,\ x = x_+ - x_-$$

$$\sup (x_+, x_-) = \sup (x, -x) = |x|,\ \inf (x_+, x_-) = 0.$$

Un K-lineal E, care formează în acelaşi timp un spaţiu liniar normat, şi în care

$|x| \leqslant |y|$ implică $\|x\| \leqslant \|y\|$ («monotonia normei») *se numeşte KB-lineal* [10] ****).

Din monotonia normei rezultă proprietatea cunoscută:

$$\| |x| \| = \|x\| \text{ pentru orice } x \in E.$$

---

*) Lucrare prezentată Institutului de matematică la data de 24 noiembrie 1954.

**) Pentru sfaturile cu care au contribuit la îmbunătăţirea lucrării de faţă, mulţumesc tovarăşilor conf. G. Marinescu şi conf. C. Ionescu-Tulcea.

***) p. 39.

****) p. 211.

În lucrarea de față vom presupune că E este un KB-lineal. Nu presupunem însă că E este complet în sensul convergenței în normă. Vom nota cu E^* spațiul adjunct și cu Φ elementul nul din E^*.

O funcțională f definită pe KB-linealul E se numește *pozitivă* ($f > \Phi$), dacă *a)* $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \geqslant 0$ și *b)* există un $x > 0$, astfel încît $f(x) > 0$. Dacă funcționala f definită pe E este liniară *) și pozitivă, vom scrie $f > \Phi$.

Cum vom vedea, funcționalele liniare pozitive vor juca un rol fundamental în cele ce urmează. Dăm acum cîteva proprietăți ale lor, pe care le vom utiliza adeseori.

Lema 1.1. *Avem pentru orice* $x \in E$, $x \geqslant 0$

$$\| x \| = \sup_{\substack{\| f \| \leqslant 1 \\ f > \Phi}} | f(x) |.$$

Într-adevăr, prin relația $f > \Phi$ mulțimea E^* devine un KB-lineal [10] **), deci putem aplica o teoremă generală [10] ***), din care lema 1.1 rezultă imediat.

Mai mult, *pentru orice* $x \in E, x > 0$ *există o funcțională* $f > \Phi$ cu $\| f \| = 1$, *astfel încît* $f(x) = \| x \|$ [10] ****)

Lema 1.2. *Mulțimea tuturor funcționalelor liniare pozitive din* E^* *este o mulțime totală: dacă* $f(x) = 0$ *pentru orice* $f > \Phi$, *atunci* $x = 0$.

Într-adevăr, E^* fiind un KB-lineal, pentru orice $f \in E^*$ avem $f = f_+ - f_-$. Din ipoteză rezultă că pentru orice $f \in E^*$ avem $f(x) = f_+(x) - f_-(x) = 0$, de unde $x = 0$, ceea ce era de demonstrat.

Consecință. *Mulțimea tuturor funcționalelor liniare pozitive cu norma 1 din* E^* *este o mulțime totală.*

Lema 1.3. x *fiind un element oarecare din* E, *avem* $x \geqslant 0$ *atunci și numai atunci cînd* $f(x) \geqslant 0$ *pentru orice* $f > \Phi$.

Demonstrația acestei propoziții se află de exemplu în [10] *****).

Consecință. *Avem* $x \geqslant 0$ *atunci și numai atunci cînd* $f(x) \geqslant 0$ *pentru orice* $f > \Phi$ *cu norma* $\| f \| = 1$.

Cu ajutorul lemei 1.3, lema 1.2 se mai poate demonstra și astfel: dacă $f(x) = 0$ pentru orice $f > \Phi$, atunci, în baza lemei 1.3, $x \geqslant 0$, deci în baza lemei 1.1, $\| x \| = 0$, adică $x = 0$.

Spunem că elementul $u \in E$ este *strict pozitiv* (notăm $u \gg 0$), dacă există o sferă cu centrul în u formată numai din elemente pozitive, adică dacă există un $\rho > 0$, astfel încît $\| x - u \| \leqslant \rho$ implică $x \geqslant 0$. Evident, orice element strict pozitiv este pozitiv, dar nu orice element pozitiv este strict pozitiv.

Ca o întărire a lemei 1.3 avem

Lema 1.4. *Dacă* $\| x - u \| \leqslant \rho$ *implică* $x \geqslant 0$, *atunci* $f(u) \geqslant \rho \| f \|$ *pentru orice* $f \geqslant \Phi$. *Dacă spațiul* E *conține elemente strict pozitive și* $f(u) \geqslant \rho \| f \|$ *pentru orice* $f \geqslant \Phi$, *atunci* $\| x - u \| \leqslant \rho$ *implică* $x \geqslant 0$.

Demonstrația primei afirmații se află de exemplu în [15] ******). A doua afirmație rezultă astfel: să presupunem că spațiul E conține elemente strict pozitive și

*) Prin funcțională liniară vom înțelege întotdeauna funcționala aditivă și continuă în sensul convergenței în normă.

**) p. 348.

***) p. 258.

****) p. 347.

*****) p. 347.

******) p. 10.

$f(u) \geqslant \rho \| f \|$ pentru orice $f \geqslant \Phi$. Fie $y \in E$, $\| y \| \leqslant \rho$. Atunci $f(y) \leqslant \rho$ pentru orice $f > \Phi$ cu $\| f \| = 1$, deci $f(y) \leqslant \rho \| f \| \leqslant f(u)$ pentru orice $f > \Phi$ cu $\| f \| = 1$. În baza consecinței lemei 1,3, rezultă că $y \leqslant u$. Deci $\| y \| \leqslant \rho$ implică $y \geqslant u$. Punînd $y = u - x$, rezultă că $\| x - u \| \leqslant \rho$ implică $x \geqslant 0$, ceea ce era de demonstrat.

Consecință. *Dacă* $x \gg 0$, *atunci* $f(x) > 0$ *pentru orice* $f > \Phi$. *Dacă spațiul* E *conține elemente strict pozitive și* $f(x) > 0$ *pentru orice* $f > \Phi$, *atunci* $x \gg 0$.

Această propoziție se află demonstrată în [15] *), partea a doua fiind demonstrată cu o metodă mai complicată.

În partea a doua a consecinței lemei 1.4 (de altfel și în partea a doua a lemei 1.4), condiția ca spațiul E să conțină elemente strict pozitive este esențială. Vom da exemple în capitolul I, § 2.

Vom mai utiliza

Lema 1.5. *Pentru orice funcțională pozitivă* f *și orice element* $x \in E$, *avem*

$$| f(x) | \leqslant f(|x|).$$

Într-adevăr [10] **)

$$| f(x) | = | f(x_+) - f(x_-) | \leqslant | f(x_+) | + | f(x_-) | = f(x_+) + f(x_-) = f(|x|).$$

În sfîrșit, dăm

Lema 1.6. *Dacă spațiul* E *conține elemente strict pozitive și dacă o funcțională* f *definită pe* E *este aditivă și pozitivă, atunci ea este și liniară, adică* $f \in E^*$.

Demonstrația acestei proprietăți se află de exemplu în [15].

§ 2. Exemple de *KB*-lineale

În acest paragraf vom da cîteva exemple de *KB*-lineale, dintre cele utilizate mai frecvent. α fiind un număr ***) oarecare, vom nota

$$\alpha_+ = \begin{cases} \alpha, \text{ dacă } \alpha \geqslant 0 \\ 0, \text{ dacă } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \alpha_- = \begin{cases} 0, \text{ dacă } \alpha > 0 \\ |\alpha|, \text{ dacă } \alpha \leqslant 0 \end{cases}.$$

A) *Spații de funcții definite pe intervalul* [0,1] ****)

1) $C(0,1)$.

Elemente: toate funcțiile continue pe [0,1].

Liniarizarea: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $x + y = x(t) + y(t)$, $cx = cx(t)$.

Ordonarea: $x > 0$ dacă $x(t) \geqslant 0$ pentru orice $t \in [0,1]$ și există un $\tau \in [0,1]$, astfel încît $x(\tau) > 0$.

Avem $x_+(t) = [x(t)]_+$, $x_-(t) = [x(t)]_-$ și $|x|(t) = |x(t)|$.

Norma: $\| x \| = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$.

Rezultă că $x \gg 0$ dacă și numai dacă $x(t) > 0$ pentru orice $t \in [0,1]$.

Forma generală a funcționalelor liniare: $f(x) = \int_0^1 x(t)\, dg(t)$, unde $g(t)$ este o funcție cu variație mărginită pe [0,1] și $\| f \| = \operatorname{var}_0^1 g(t)$.

*) p. 13.

**) p. 230.

***) În întreaga lucrare, prin «număr» vom înțelege număr real și prin «funcție» vom înțelege funcție reală.

****) În tot cursul lucrării vom nota intervalul închis cu [ ], intervalul deschis cu ( ), și intervalul semideschis cu [ ), respectiv ( ].

Funcționalele liniare pozitive: $f(x) = \int_0^1 x(t)\, dg(t)$, unde $g(t)$ este monoton nedescrescătoare pe $[0,1]$.

2) $M_0(0,1)$.

Elemente: toate funcțiile mărginite pe $[0,1]$.
Liniarizarea și *ordonarea:* ca în $C(0,1)$.

Norma: $\| x \| = \sup_{t \in [0,1]} | x(t) |$.

Rezultă că $x \gg 0$ dacă și numai dacă $x(t) > 0$ pentru orice $t \in [0,1]$.
Evident $C(0,1)$ este un subspațiu *) al lui $M_0(0,1)$.

3) $V(0,1)$.

Elemente: toate funcțiile cu variație mărginită pe $[0,1]$.
Liniarizarea: ca în $C(0,1)$.
Ordonarea: $x > 0$ dacă $x(0) \geqslant 0$, $x(t) \not\equiv 0$ și $x(t)$ este nedescrescătoare pe $[0,1]$ ($\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) \geqslant 0$ pentru $t \in [0,1]$, $\Delta t > 0$, $t + \Delta t \in [0,1]$). Avem

$$x_+(t) = [x(0)]_+ + \operatorname{var}_0^t \operatorname{poz} x(\tau),$$

$$x_-(t) = [x(0)]_- + \operatorname{var}_0^t \operatorname{neg} x(\tau),$$

$$|x|(t) = |x(0)| + \operatorname{var}_0^t x(\tau).$$

Norma: $\| x \| = |x(0)| + \operatorname{var}_0^1 x(t)$.

Rezultă că spațiul $V(0,1)$ nu conține elemente strict pozitive.
Dintre subspațiile spațiului $C(0,1)$ menționăm:

4) $C[(0,1]; t_0)$.

Elemente: funcțiile continue care se anulează într-un punct dat $t_0 \in [0,1]$.
Liniarizarea, ordonarea și *norma:* ca în $C(0,1)$.
Rezultă că spațiul $C([0,1]; t_0)$ nu conține elemente strict pozitive.

5) $C([0,1]; t_0, t'_0; \lambda_0)$.

Elemente: funcțiile continue cu proprietatea că pentru o pereche dată t_0, $t'_0 \in [0,1]$ și un număr λ_0 dat $(0 \leqslant \lambda_0 \leqslant 1)$, avem $x(t_0) = \lambda_0 x(t'_0)$.
Liniarizarea, ordonarea și *norma:* ca în $C(0,1)$.
Dacă $\lambda_0 > 0$, spațiul $C([0,1]; t_0, t'_0; \lambda_0)$ conține elemente strict pozitive: $x \gg 0$ dacă și numai dacă $x(t) > 0$ pe $[0,1]$.

---

*) Prin subspațiu al unui spațiu E înțelegem o submulțime a lui E cu aceeași liniarizare, ordonare și normă, care formează un spațiu.

Dintre subspațiile spațiului $V(0,1)$ amintim:

6) $V([0,1];\ 0)$.

Elemente: funcțiile cu variație mărginită care se anulează în punctul 0. *Liniarizarea, ordonarea* și *norma:* ca în $V(0,1)$.

Spațiul $V([0,1];\ 0)$ nu conține elemente strict pozitive.

B) *Spații de clase de funcții echivalente definite pe intervalul* $[0,1]$.

1) $M(0,1)$.

Elemente: toate funcțiile mărginite a.p.t.*) și măsurabile pe $[0,1]$.

Liniarizarea: $z = x + y$ dacă $z(t) = x(t) + y(t)$ a.p.t. pe $[0,1]$ și $z = cx$ dacă $z(t) = cx(t)$ a.p.t. pe $[0,1]$.

Ordonarea: $x > 0$ dacă $x(t) \geqslant 0$ a.p.t. pe $[0,1]$ și există o mulțime de măsură pozitivă $E \subset [0,1]$, astfel încît $x(\tau) > 0$ pentru $\tau \in E$.

Norma: $\| x \| = \operatorname{ad}\max_{t \in [0,1]} |x(t)| = \inf_{\substack{E \subset [0,1] \\ mE = 1}} \sup_{t \in E} |x(t)|$.

Rezultă că funcțiile echivalente, adică funcțiile care diferă pe o mulțime de măsură nulă, trebuie considerate identice, ca elemente ale spațiului. De asemenea, rezultă că $x \gg 0$ atunci și numai atunci cînd $x(t) > 0$ a.p.t. pe $[0,1]$.

Forma generală a funcționalelor liniare: $f(x) = L\int x\, d\alpha$, unde $\alpha(E)$ este o funcție de mulțimea măsurabilă $E \subset [0,1]$, mărginită și aditivă în sens restrîns, anulîndu-se odată cu $m E$, și $\| f \| = V_\alpha[0,1]$ = variația totală a funcției α.

Integrala este luată în sens Radon**).

Funcționalele liniare pozitive: $f(x) = L\int x\, d\alpha$, unde $\alpha(E) \geqslant 0$ pentru orice mulțime măsurabilă $E \subset [0,1]$.

2) $L(0,1)$.

Elemente: toate funcțiile sumabile pe $[0,1]$.

Liniarizarea și *ordonarea:* ca în $M(0,1)$.

Norma: $\| x \| = \int_0^1 |x(t)|\, dt$.

Rezultă că spațiul $L(0,1)$ nu conține elemente strict pozitive.

Forma generală a funcționalelor liniare: $f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\, dt$, unde

$$\alpha(t) \in M(0,1) \text{ și } \| f \| = \operatorname{ad}\max_{t \in [0,1]} |\alpha(t)|.$$

Funcționalele liniare pozitive: $f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\, dt$, $\alpha(t) \in M(0,1)$, $\alpha(t) \geqslant 0$ a.p.t.

Rezultă că elementul $x(t) \equiv 1 \in L(0,1)$ se bucură de proprietatea că $f(x) > 0$ pentru orice $f > \Phi$, deci elementul $x(t) \equiv 1$ constituie un exemplu care ne

*) Notăm prescurtat «aproape peste tot» cu a.p.t.

**) Acest rezultat a fost găsit de G. M. Fihtenholț și L. V. Kantorovici [5] și simultan, independent de aceștia, de către T. H. Hildebrandt [7]. Folosim notația lui Hildebrandt, deoarece ea este aceeași și pentru spațiul m.

arată că condiția din partea a doua a lemei 1.4 și a consecinței lemei 1.4 este esențială. De altfel, orice altă funcție > 0 a.p.t. ne dă tot un astfel de exemplu.

După cum se știe, spațiul $L(0,1)$ este izometric și izomorf *) cu spațiul $A(0,1) \subset V([0,1]; 0)$ al tuturor funcțiilor absolut continue pe $[0,1]$ cu $x(0) = 0$ și cu liniarizarea, ordonarea și norma din $V([0,1];0)$ [10]**).

3) $L^p(0,1)$ $(p > 1)$ ***).

Elemente: toate funcțiile cu a p-a putere sumabilă pe $[0,1]$.

Liniarizarea și *ordonarea:* ca în $M(0,1)$.

Norma: $$\| x \| = \left\{ \int_0^1 | x(t) |^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Rezultă că spațiul $L^p(0,1)$ nu conține elemente strict pozitive.

Forma generală a funcționalelor liniare: $f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$, unde

$$\alpha(t) \in L^q(0,1), \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1\right) \text{ și } \| f \| = \left\{ \int_0^1 | x(t) |^q \, dt \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Funcționalele liniare pozitive: $f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt, \alpha(t) \in L^q(0,1), \alpha(t) \geqslant 0$ a.p.t.

Pentru elementul $x(t) \equiv 1$ este valabilă observația de la $L(0,1)$.

C) *Spațiile de șiruri și subspațiile lor de dimensiune finită*

1) m.

Elemente: toate șirurile $x = \{\xi_i\}$ mărginite (adică șirurile pentru care $\sup_n | \xi_n | < \infty$).

Liniarizarea: $x = \{\xi_i\}$, $y = \{\eta_i\}$, $x + y = \{\xi_i + \eta_i\}$ $cx = \{c\xi_i\}$.

Ordonarea: $x > 0$, dacă $\xi_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots$ și $\xi_k \neq 0$ pentru un k natural.

Avem $x_+ = \{(\xi_i)_+\}$, $x_- = \{(\xi_i)_-\}$, $| x | = \{| \xi_i |\}$.

Norma: $\| x \| = \sup_n | \xi_n |$.

Rezultă că $x \gg 0$ dacă și numai dacă $\xi_n > 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Forma generală a funcționalelor liniare: $f(x) = L\int x\,d\alpha$, unde $\alpha(E)$ este o funcție de mulțimea de numere naturale $E \subset \mathcal{N}$ ($\mathcal{N}$ = mulțimea tuturor numerelor naturale), mărginită și aditivă în sens restrîns, și $\| f \| = V_\alpha(\mathcal{N}) =$ variația totală a funcției α.

Funcționalele liniare pozitive: $f(x) = L\int x\,d\alpha$, unde $\alpha(E) \geqslant 0$ pentru orice mulțime de numere naturale $E \subset \mathcal{N}$. Se vede cu ușurință că spațiul m este izomorf și izometric cu subspațiul acelor funcții din $M_0(0,1)$ (respectiv $M(0,1)$) care iau valori constante (respectiv constante a.p.t.) pe fiecare interval $\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right]$.

2) m_k $(1 \leqslant k < \infty)$.

*) În «izomorfie» vom subînțelege întotdeauna și păstrarea ordonării.

**) p. 222.

***) Prin p vom înțelege întotdeauna un număr întreg pozitiv.

Elemente: toate grupurile ordonate de k numere

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}.$$

Liniarizarea și *ordonarea:* ca în m

Norma: $\| x \| = \max_{n=1,2,\ldots,k} | \xi_n |$.

Rezultă că $x \gg 0$ dacă și numai dacă

$$\xi_n > 0, \ (n = 1, 2, \ldots, k).$$

Forma generală a funcționalelor liniare: $f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i$, $\|f\| = \sum_{i=1}^{k} | c_i |$.

Funcționalele liniare pozitive: $f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i$, $c_i \geqslant 0$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Făcînd să-i corespundă fiecărui $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\} \in m_k$ elementul $x' = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, 0, 0, \ldots\} \in m$, se constată cu ușurință că, abstracție făcînd de o izomorfie și o izometrie, m_k este un subspațiu de dimensiune finită k al lui m.

3) c.

Elemente: toate șirurile $x = \{\xi_i\}$ convergente.
Liniarizarea, ordonarea și *norma:* ca în m.
Rezultă că $x \gg 0$ dacă și numai dacă $\xi_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Forma generală a funcționalelor liniare: $f(x) = c \lim_{n\to\infty} \xi_n + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_i$, unde $\{c, c_1, c_2, \ldots\} \in l$ (vezi 4) și $\| f \| = | c | + \sum_{i=1}^{\infty} | c_i |$.

Funcționalele liniare pozitive: $f(x) = c \lim_{n\to\infty} \xi_n + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_i$, unde $c, c_i \geqslant 0$, $(i = 1, 2, \ldots)$.
Evident și c este un subspațiu al lui m.

4) l.

Elemente: toate șirurile $x = \{\xi_i\}$ pentru care $\sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i | < \infty$.

Liniarizarea și *ordonarea:* ca în m.

Norma: $\| x \| = \sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i |$.

Rezultă că în l nu există elemente strict pozitive.

Forma generală a funcționalelor liniare: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_i$, unde $\{c_i\} \in m$ și $\| f \| = \sup_i | c_i |$.

Funcționalele liniare pozitive: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_i$, $\{c_i\} \in m$ unde $c_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Pentru orice element cu toate coordonatele pozitive este valabilă observația de la spațiul $L(0, 1)$.

5) l^p $(p > 1)$.

Elemente: toate şirurile $x = \{\xi_i\}$ pentru care $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$.

Liniarizarea şi ordonarea: ca în m.

Norma: $\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Rezultă că l^p nu conţine elemente strict pozitive.

Forma generală a funcţionalelor liniare: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_i$, unde $\{c_i\} \in l^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$ şi $\| f \| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$.

Funcţionalele liniare pozitive: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_i$, $\{c_i\} \in l^q$, $c_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Pentru orice element cu toate coordonatele pozitive este valabilă observaţia de la spaţiul $L(0, 1)$.

6) l_k $(1 \leqslant k < \infty)$.

Elemente: toate grupurile ordonate de k numere $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$.

Liniarizarea şi ordonarea: ca în m_k.

Norma: $\| x \| = \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|$.

Rezultă că $x \gg 0$ dacă şi numai dacă $\xi_n > 0$, $(n = 1, 2, \ldots, k)$.

Forma generală a funcţionalelor liniare: $f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i$, $\| f \| = \max_{n=1,2,\ldots,k} |c_n|$.

Funcţionalele liniare pozitive: $f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i$, $c_i \geqslant 0$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Abstracţie făcînd de o izomorfie şi o izometrie, l_k este un subspaţiu al lui l.

7) l_k^p $(p > 1, k \geqslant 1)$.

Elemente: toate grupurile ordonate de k numere $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$.

Liniarizarea şi ordonarea: ca în m_k.

Norma: $\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

$x \gg 0$ dacă şi numai dacă $\xi_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots, k)$.

Forma generală a funcţionalelor liniare: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_i$ cu $\| f \| = \left(\sum_{i=1}^{k} |c_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$.

Funcţionalele liniare pozitive: $f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i$, $c_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Abstracţie făcînd de o izomorfie şi o izometrie, l_k^p este un subspaţiu al lui l^p.

Pentru $p = 2$ obținem spațiile euclidiene. Vom nota și $l_k^2 = R_k$.

Avem $l_1^p = l_1^2 = R_1 = l_1 = m_1$ = spațiul tuturor numerelor reale, norma fiind modulul numărului. Ținînd seama de ordonarea din m_k, l_k și l_k^p, devin justificate notațiile α_+ și α_- introduse la începutul acestui paragraf.

În sfîrșit, observăm că rezultatele din lucrarea de față se pot extinde fără mare dificultate la *KB*-linealele complexe.

§ 3. Clase particulare de *KB*-lineale

M. G. Krein și S. G. Krein [12], [13] și, independent de ei, S. Kakutani [9], au introdus noțiunea de *spațiu de tip M* (sau *M*-spațiu abstract).

Să observăm că într-un *KB*-lineal oarecare

$$x, y \in E,\ x,\ y > 0 \text{ implică } \|\sup(x, y)\| \geqslant \max(\|x\|, \|y\|). \tag{1.1}$$

Într-adevăr, în baza monotoniei normei, avem $\|\sup(x, y)\| \geqslant \|x\|$ și $\|\sup(x, y)\| \geqslant \|y\|$, de unde relația (1.1) este imediată.

După M. G. Krein, S. G. Krein și S. Kakutani, *KB-linealul E se numește spațiu de tip M, dacă*

$$x, y \in E,\ x,\ y > 0 \text{ } \textit{implică} \text{ } \|\sup(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|). \tag{1.2}$$

Este evident că dacă E este un spațiu de tip M, atunci orice subspațiu al lui E este de asemenea de tip M.

Se verifică cu ușurință că spațiile $M(0,1)$, $M_0(0,1)$, deci și $C(0,1)$, de asemenea m, deci și m_k, c, sînt de tip M, iar spațiile $V(0,1)$, $V([0,1]; 0)$, $L^p(0,1)$ $(p \geqslant 1)$, l^p, l_k^p $(p \geqslant 1)$ nu sînt de tip M

Din definiție rezultă, ținînd seama de relațiile $\sup(x_+, x_-) = |x|$ și $\||x|\| = \|x\|$ (cap. I, § 1), că într-un spațiu E de tip M pentru orice $x \in E$ avem

$$\|x\| = \max(\|x_+\|, \|x_-\|). \tag{1.3}$$

Această formulă ne va fi utilă în capitolul III. Să observăm că într-un *KB*-lineal oarecare, putem afirma numai, că

$$\|x\| \geqslant \max(\|x_+\|, \|x_-\|).$$

H. F. Bohnenblust și S. Kakutani [4] au demonstrat că pentru ca spațiul E să fie de tip M, este *suficient* să fie îndeplinită condiția mai slabă decît (1.2).

$$x, y \in E,\ \inf(x, y) = 0 \text{ implică } \|\sup(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|) \tag{1.4}$$

(necesitatea condiției (1.4) este evidentă din definiție).

Ei au demonstrat această teoremă pe o cale indirectă, și au afirmat [4] *): «se pare că nu este posibil» să se stabilească implicația (1.4) $\rightarrow$ (1.2) pe cale directă.

Se știe [13], [15] că într-un *KB*-lineal oarecare, relațiile $x = u - v$, $u \geqslant 0$. $v \geqslant 0$ implică $u = x_+$, $v = x_-$, dacă și numai dacă $\inf(u, v) = 0$. În baza acestei propoziții, se vede cu ușurință că condiția (1.4) a lui Bohnenblust și Kakutani este echivalentă cu condiția ca pentru orice $x \in E$ să avem (1.3). Așadar, în baza teoremei lui Bohnenblust și Kakutani rezultă că relația (1.3) caracterizează spațiile de tip M.

*) p. 1026.

Vom da acum cîteva definiții și rezultate ale lui M. G. Krein, S. G. Krein și S. Kakutani în legătură cu *KB*-linealele de tip *M*, la care ne vom referi în lucrarea de față.

Fie deci E un *KB*-lineal de tip *M*.

Numim o funcțională $q \in E^*$ *funcțională elementară*, dacă $q \geqslant \Phi$ și dacă din $\Phi \leqslant f \leqslant q$, $f \in E^*$ rezultă că $f = cq$, $c \geqslant 0$.

Este important sensul geometric al noțiunii de funcțională elementară. Să notăm cu S_+^* mulțimea tuturor $f \in E^*$ cu proprietățile $f \geqslant \Phi$, $\| f \| \leqslant 1$; atunci [13] *mulțimea T a punctelor extreme ale mulțimii S_+^* este formată din punctul Φ și din mulțimea $\mathcal{S}$ a tuturor funcționalelor elementare care au norma 1.*

Mulțimea T a punctelor extreme ale lui S_+^* este deci nevidă, deoarece ea totdeauna conține pe Φ. Se pune problema, dacă se poate întîmpla pentru un spațiu de tip M ca Φ să fie singurul punct extrem al mulțimii S_+^*, adică mulțimea $\mathcal{S}$ să fie vidă.

Într-un caz particular, răspunsul este imediat. *Dacă mulțimea H a tuturor funcționalelor liniare pozitive cu norma 1 este regulat convexă* [16], *atunci mulțimea $\mathcal{S}$*, care în baza proprietății de mai sus este mulțimea punctelor extreme ale mulțimii H, *este și ea nevidă*, în virtutea teoremei lui M. G. Krein și D. P. Milman [14]. De altfel, tot în baza teoremei lui Krein și Milman rezultă că în acest caz S_+^* este cea mai mică mulțime convexă și slab închisă care conține pe $\mathcal{S} \cup \Phi$.

Ipoteza propoziției de mai sus nu are însă loc pentru orice spațiu de tip M. Într-adevăr, deși pentru orice spațiu de tip M mulțimea H este convexă (deoarece $f_1, f_2 > \Phi$, $\| f_1 \| = \| f_2 \| = 1$, $0 < t < 1$ implică $tf_1 + (1-t) f_2 > \Phi$ și $\| tf_1 + (1-t) f_2 \| = t + (1-t) = 1$), totuși, de exemplu pentru $C([0,1]; t_0)$, mulțimea H nu este slab închisă. Mulțimea H este sigur slab închisă, deci și regulat convexă, dacă spațiul E conține «element unitate» (a se vedea cap. III, § 1 și lema 3.7), deoarece în acest caz $f_n \in H$, $f_n \xrightarrow{sl} f$ implică (cap. III, § 1) $\| f \| = f(e) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(e) = \lim\limits_{n \to \infty} \| f_n \| = 1$.

Pentru cazul general, răspunsul la problema de mai sus rezultă din următoarea teoremă a lui M. G. Krein și S. G. Krein [13]: *Pentru fiecare $x > 0$ există o funcțională elementară q, astfel încît $q(x) = \| x \|$, $\| q \| = 1$.* Această teoremă este o întărire a propoziției enunțate în legătură cu lema 1.1. Din ea rezultă că *pentru orice spațiu de tip M mulțimea $\mathcal{S}$ este nevidă.*

Notînd cu Q închiderea mulțimii $\mathcal{S}$ în topologia slabă, avem [13] $\mathcal{S} \subset Q \subset S_+^*$ *și fiecare funcțională $f \in Q$ este elementară* (însă, evident, nu fiecare funcțională $f \in Q$ are, în general, norma $\| f \| = 1$). Pentru orice spațiu de tip M, mulțimea Q, ca și mulțimea $\mathcal{S}$, este nevidă.

Un criteriu practic pentru a recunoaște dacă o funcțională este elementară sau nu, este următorul [13]:

Pentru ca funcționala $q > \Phi$ să fie elementară, este necesar și suficient să avem

$$| q(x) | = q(| x |) \text{ pentru orice } x \in E. \tag{1.5}$$

Se vede cu ușurință că în această propoziție este esențială ipoteza că spațiul E este de tip M. Reamintim că pentru $f > \Phi$ oarecare, avem (lema 1.5) $| f(x) | \leqslant f(| x |)$.

În baza teoremei lui L. Alaoglu [2], mulțimea S_+^* este slab bicompactă. Rezultă că *mulțimea Q este slab bicompactă.*

Să vedem acum cîteva exemple concrete de funcționale elementare și de mulțime Q în KB-lineale particulare.

Pentru spațiul $C(0,1)$, de tip M, mulțimea Q este formată din toate funcționalele de forma

$$f_\xi(x) = x(\xi),$$

unde ξ este un punct fix $\in [0,1]$. Într-adevăr, pentru orice $\xi \in [0,1]$ și orice $x(t) \in C(0,1)$, avem

$$|x(\xi)| = |x|(\xi),$$

deci toate funcționalele f_ξ sînt elementare. Deoarece $\|f_\xi\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| =$ $= \sup_{\max |x(t)| \leqslant 1} |x(\xi)| = 1$, și nici o altă funcțională cu norma 1 din $[C(0,1)]^*$ nu se bucură de proprietatea (1.5), rezultă că $\mathcal{S} = \{f_\xi(x) = x(\xi)\}_{\xi \in [0,1]}$. Însă mulțimea $\{f_\xi(x) = x(\xi)\}_{\xi \in [0,1]}$ este slab închisă în $[C(0,1)]^*$, deci $\mathcal{S} = \overline{\mathcal{S}} = Q^*$). În acest caz, $\Phi \notin Q$ și norma fiecărei funcționale din Q este 1.

Pentru spațiul c, de tip M, mulțimea Q este

$$Q = \left\{ f_n(x) = \xi_n, \quad f_0(x) = \lim_{n \to \infty} \xi_n \right\}_{n = 1,2,\ldots}$$

Într-adevăr, pentru orice n întreg pozitiv și orice $x \in c$ avem

$$|f_n(x)| = |\xi_n| = f_n(|x|)$$

și totodată $|\lim_{n \to \infty} \xi_n| = \lim_{n \to \infty} |\xi_n|$, deci toate funcționalele f_n, f_0 sînt elementare. Deoarece $\|f_n\| = 1$, $\|f_0\| = 1$ și nici o altă funcțională cu norma 1 din c^* nu se bucură de proprietatea (1.5) și deoarece mulțimea considerată este slab închisă în c^*, afirmația noastră este adevărată. Totodată $\Phi \notin Q$ și norma fiecărei funcționale din Q este 1.

În mod analog, pentru spațiul m_k de tip M, avem

$$Q = \{f_n(x) = \xi_n\}_{n = 1,2,\ldots,k}.$$

Totodată, $\Phi \notin Q$ și norma fiecărei funcționale din Q este 1.

Să considerăm spațiul $C\left([0,1]; \frac{1}{2}\right) \cap C\left([0,1]; 0,1; \frac{1}{2}\right)$, de tip M, adică spațiul tuturor funcțiilor continue pe $[0,1]$ care se anulează în $\frac{1}{2}$ și care satisfac relația $x(0) = \frac{1}{2} x(1)$. Pentru acest spațiu avem

$$Q = \{f_\xi(x) = x(\xi)\}_{\xi \in [0,1]},$$

însă aici $f_{\frac{1}{2}}(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) = \Phi \in Q$ și $\|f_0\| = \frac{1}{2}\|f_1\| = \frac{1}{2}$.

Un spațiu important de tip M este spațiul $M(0,1)$. În baza celor precedente, mulțimea $\mathcal{S}$ *nu este* vidă. Totuși, ținînd seama de faptul că pentru spațiul $M(0,1)$ nu mai au sens funcționalele f_ξ de mai înainte, precum și de forma generală

*) Prin $\overline{\mathcal{A}}$ vom nota închiderea slabă a mulțimii $\mathcal{A} \subset E^*$. În general, în E^* vom considera topologia slabă introdusă prin convergența slabă a funcționalelor.

complicată a funcționalelor liniare pozitive, se vede că *nu putem da explicit* nici un element al mulțimii $\mathcal{S}$ și deci nici un element al mulțimii Q*). Aceasta ne arată un mare dezavantaj al mulțimii Q: chiar și în unele KB-lineale frecvente nu putem da explicit elementele mulțimii Q.

M. G. Krein, S. G. Krein și S. Kakutani nu consideră de loc *cazul cînd KB-linealul E nu este de tip M*. Este însă important să considerăm și acest caz și să ne punem problema: ce este mulțimea $\mathcal{S}$, mulțimea Q etc. în spațiile care nu sînt de tip M? Să observăm, în primul rînd, că în aceste spații caracterizarea (1.5) a funcționalelor elementare *nu mai este*, în general, valabilă. De asemenea, în general, *nu mai este* adevărată nici propoziția că mulțimea T a punctelor extreme ale mulțimii S_+^* este formată din punctul Φ și mulțimea $\mathcal{S}$. Iată un exemplu.

Să considerăm în spațiul $E = L(0,1)$ funcționala $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$. Avem, evident, $\| f \| = 1$. Funcționala f nu este elementară, deoarece $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ nu implică $\varphi = cf$ $\left(0 \leqslant \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt \leqslant \int_0^1 x(t)\,dt\right.$ nu implică $\left.\alpha(t) = c\right.$**). În același timp, f este punct extrem al mulțimii S_+^*. Într-adevăr, ipotezele $\int_0^1 x(t)\,dt =$

$= t\int_0^1 x(t)\,\alpha_1(t)\,dt + (1-t)\int_0^1 x(t)\,\alpha_2(t)\,dt$, $0 < t < 1$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t) \geqslant 0$ a.p.t., ad $\max_{t\in[0,1]} \alpha_1(t) = \text{ad} \max_{t\in[0,1]} \alpha_2(t) = 1$ implică $\alpha_1(t) \equiv \alpha_2(t) \equiv 1$. Prin urmare există puncte extreme ale mulțimii S_+^* care nu sînt funcționale elementare cu norma 1. La fel este și în spațiile $L^p(0,1)$ $(p > 1)$. Rezultă că funcționalele elementare, deci și mulțimea $\mathcal{S}$ și Q, își pierd importanța lor în cazul cînd E nu este de tip M.

Rezultatul fundamental al lui M. G. Krein, S. G. Krein [13] și S. Kakutani [9] este următoarea teoremă de reprezentare:

Fie E un KB-lineal de tip M și fie $C(Q)$ spațiul tuturor funcțiilor reale continue definite pe mulțimea Q, cu norma $\| X \| = \sup_{f\in Q} | X(f) |$. Atunci există o reprezentare liniară (aditivă și continuă) izomorfă și izometrică a spațiului E în spațiul $C(Q)$.

Se arată că această reprezentare se bucură și de proprietatea că *dacă xX, yY, atunci $\sup(x, y) \sup(X, Y)$*. Observăm că, și invers, această proprietate, împreună cu condiția ca E să fie un spațiu de tip M, sînt și necesare pentru izometria reprezentării, deoarece spațiul $C(Q)$ este de tip M.

O altă clasă particulară de KB-lineale, considerată tot de M. G. Krein, S. G. Krein [13] și S. Kakutani [8], [9], este clasa *KB-linealelor de tip L. KB-linealul E se numește spațiu de tip L, dacă*

$$x,\ y \in E,\ x > 0,\ y > 0 \text{ implică } \| x + y \| = \| x \| + \| y \|. \tag{1.6}$$

*) După cum vom vedea, spațiul $M(0,1)$ conține element unitate, deci $\overline{H} = H$ și prin urmare $\Phi \in Q$. Mai departe, funcționalele de forma $f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$, $\| f \| = \int_0^1 | \alpha(t) |\,dt$, evident, nu sînt elementare.

**) Mai mult, ținînd seama de forma generală a funcționalelor liniare definite pe $L(0,1)$, cu raționament analog rezultă că pe $L(0,1)$ nu există nici o funcțională elementară. Prin urmare, mulțimea $\mathcal{S}$ este vidă și mulțimea $Q = \overline{\mathcal{S}}$ este de asemenea vidă.

Evident, orice subspațiu al unui spațiu de tip L este de asemenea de tip L. De exemplu, spațiile $V(0,1)$, deci și $V([0,1];0)$, $L(0,1)$, de asemenea l, deci și l_k, sînt de tip L. Spațiile $C(0,1)$, $M_0(0,1)$, $M(0,1)$, c, m, m_k nu sînt de tip L. S. Kakutani a arătat [9] că *dacă spațiul E este de tip M, atunci spațiul adjunct E^* este de tip L și reciproc.*

În lucrarea de față vom întîlni și noțiunea de *spațiu strict normat*, introdusă de M. G. Krein ([1], § 9). *Spațiul liniar normat E se numește strict normat, dacă*

$$x, y \in E,\ x \neq \theta,\ y \neq \theta,\ \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \text{ implică } y = \alpha x,\ \alpha \neq 0. \quad (1.7)$$

De exemplu, orice spațiu hilbertian (abstract) $\mathcal{H}$, precum și orice spațiu $L^p(0,1)$, l^p, l_k^p $(p>1)$, este strict normat; spațiile $C(0,1)$, $L(0,1)$ ([1], § 9), $M_0(0,1)$ $M(0,1)$ m, c, m_k, l, l_k, nu sînt strict normate. Evident, orice subspațiu al unui spațiu strict normat este de asemenea strict normat *).

Este important următorul criteriu stabilit de M. G. Krein [19] **): *Pentru ca spațiul Banach E să fie strict normat, este necesar și suficient ca fiecare funcțională liniară $f(x)$ să-și atingă maximul în sfera unitate în cel mult un punct.*

Se pune problema, care este legătura între KB-linealele de tip M, KB-linealele de tip L și KB-linealele strict normate. În primul rînd, din exemplele precedente observăm că spațiul R_1 este în același timp de tip M, de tip L și strict normat. Mai departe, avem

Lema 1.7. *Cu excepția spațiului R_1, spațiile de tip M nu sînt de tip L.*

Demonstrație. Dacă E este de tip M, atunci, în virtutea relației (1.3), pentru orice $x \in E$ avem $\|x\| = \max(\|x_+\|, \|x_-\|)$. Dacă spațiul E este de tip L, atunci pentru orice $x \in E$ avem $\|x\| = \|x_+\| + \|x_-\|$. Evident, aceste două egalități se exclud reciproc dacă x este un element incomparabil cu θ. Ținînd seama de faptul că singurul spațiu (abstracție făcînd de un izomorfism și de o izometrie) care nu conține elemente incomparabile cu θ, adică care este total ordonat, este R_1, lema 1.7 este demonstrată.

Bineînțeles, nici spațiile de tip L nu pot fi de tip M.

Lema 1.8. *Cu excepția spațiului R_1, spațiile de tip L nu sînt strict normate.*

Demonstrație. Fie spațiul E de tip L, $x_1, x_2, \in E$, $x_1, x_2 > \theta$, $\|x_1\| = \|x_2\|$. Atunci $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$. Dacă E este în același timp și strict normat, atunci avem $x_1 = kx_2$, de unde, în baza ipotezei, $\|x_2\| = \|x_1\| = \|kx_1\|$, deci tot în baza ipotezei, $k = 1$, adică $x_1 = x_2$. Rezultă că, abstracție făcînd de un izomorfism și de o izometrie, $E = R_1$ și lema 1.8 este demonstrată.

Consecință. *Cu excepția spațiului R_1 spațiile de tip M nu pot avea spațiile adjuncte strict normate.*

Este probabil că avem și următoarea propoziție: *cu excepția spațiului R_1, spațiile de tip M nu sînt strict normate.* În capitolul III, § 2. vom arăta următoa-

*) Așa-numitele «spații cu sfera unitate tare convexă», considerate de K. Tatarkiewicz [20], nu sînt de fapt altceva decît spații strict normate. De asemenea, folosind terminologia lui K. Tatarkiewicz [20], putem defini spațiile de tip L ca fiind acele spații în care mulțimea elementelor nenegative este un «con de aditivitate», și spațiile strict normate, ca fiind acelea, în care conurile de aditivitate sînt semidreptele care trec prin elementul θ.

**) În [19] V. L. Šmulian scrie că acest criteriu al lui M. G. Krein se află în monografia lui N. I. Ahiezer și M. G. Krein, *O nekotorîh voprosah teorii momentov*, la p. 178—179. Această lucrare nu ne este însă accesibilă și de aceea facem trimitere la [19].

rea propoziție (care, în baza lemei 3.7, este mai particulară): *Cu excepția spațiului, R_1, spațiile care conțin element unitate nu sînt strict normate* (lema 3.8). De aici vom deduce și următoarea propoziție: *Cu excepția spațiului R_1, spațiile de tip M reflexive nu sînt strict normate.* De asemenea, rezultă și următoarea propoziție: *Dacă spațiul E este de tip M și $E \neq R_1$, atunci spațiile E^*, E^{**}, ... nu sînt strict normate.*

CAPITOLUL II

GENERALIZAREA NOȚIUNII DE VALOARE A UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

§ 1. Mulțimi pozitiv-totale normate de funcționale liniare

Vom începe prin a introduce o noțiune nouă, de care vom avea nevoie în cele ce urmează.

Definiția 2.1. *Fie E un KB-lineal oarecare. Vom spune că mulțimea $\mathcal{F}$ de funcționale liniare definite pe E este* **pozitiv-totală**, *dacă, $x \in E$ fiind un element oarecare, din relațiile*

$$f(x) \geqslant 0 \text{ pentru toți } f \in \mathcal{F}$$

rezultă

$$x \geqslant 0.$$

În orice KB-lineal E există o astfel de mulțime $\mathcal{F}$. Într-adevăr, lema 1.3 ne asigură că mulțimea tuturor funcționalelor liniare pozitive definite pe E este o mulțime pozitiv-totală. De altfel, se vede din definiție că mulțimea $\mathcal{F}$ conține numai funcționale pozitive.

În același timp, mulțimea $\mathcal{F}$ nu este unică; există submulțimi pozitiv-totale ale mulțimii tuturor funcționalelor liniare pozitive, de exemplu (consecința lemei 1.3) mulțimea H a tuturor funcționalelor liniare pozitive cu norma 1; în general, și această mulțime conține încă submulțimi pozitiv-totale: dacă o mulțime este pozitiv-totală atunci orice submulțime densă a ei este de asemenea pozitiv-totală.

Pe de altă parte, dacă $\mathcal{F}$ este o mulțime pozitiv-totală, atunci orice altă mulțime de funcționale liniare pozitive care conține pe $\mathcal{F}$ este de asemenea pozitiv-totală.

O proprietate importantă a mulțimilor $\mathcal{F}$ pozitiv-totale de funcționale liniare este

Lema 2.1. *Orice element $x \in E$ este univoc determinat de valorile $f(x)$, $f \in \mathcal{F}$. Mulțimea $\mathcal{F}$ este totală.*

Demonstrație. Să presupunem că există două elemente x și $y \in E$, astfel încît $f(x) = f(y)$ pentru toți $f \in \mathcal{F}$. Atunci, din relațiile $f(x - y) = 0$ pentru toți $f \in \mathcal{F}$, rezultă că $x - y \geqslant 0$ și din relațiile $f(y - x) = 0$, pentru toți $f \in \mathcal{F}$, rezultă că $y - x \geqslant 0$. Confruntînd aceste două inegalități, obținem $x - y = 0$, de unde $x = y$.

În particular, elementul x cu proprietățile

$$f(x) = 0 \text{ pentru toți } f \in \mathcal{F},$$

este univoc determinat. Însă elementul $0 \in E$ se bucură de aceste proprietăți; rezultă că $x = 0$ și mulțimea $\mathcal{F}$ este totală.

Observație. *Reciproca lemei 2.1 nu mai este adevărată*: nu orice mulțime totală *) este pozitiv-totală. Vom da un exemplu de mulțime totală de func-

*) Evident, totalitatea este echivalentă cu prima proprietate din lema 2.1: dacă $\mathcal{F}$ este totală, atunci orice element $x \in E$ este univoc determinat de valorile $f(x)$, $f \in \mathcal{F}$.

ționale liniare pozitive și avînd norma 1, care nu este pozitiv-totală. Să luăm spațiul m_2; mulțimea $\mathcal{F} = \left\{f_1(x) = \xi_1, f_2(x) = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2\right\}$ este o astfel de mulțime. Într-adevăr, ea este evident totală, dar pentru elementul $x = \{2, -1\} \in m_2$ avem $f_1(x) = 2 > 0$, $f_2(x) = \frac{1}{2} > 0$, adică $f(x) > 0$ pentru toți $f \in \mathcal{F}$, și totuși x nu este $\geqslant 0$.

După cele de mai sus, este natural să dăm și următoarea definiție: Spunem că o mulțime de funcționale liniare $\mathcal{F} \subset E^*$ este pozitiv-totală pe un subspațiu $E_1 \subset E$ dacă, x fiind un element oarecare din E_1, relațiile $f(x) \geqslant 0$ pentru toți $f \in \mathcal{F}$ implică $x \geqslant 0$. Atunci mulțimile pozitiv-totale definite mai sus nu sînt altceva, decît mulțimile pozitiv-totale pe tot spațiul E. Se pune, între altele, următoarea problemă: cum trebuie să fie subspațiul E_1 pentru ca, din faptul că o mulțime $\mathcal{F}$ este pozitiv-totală pe E_1, să rezulte că ea este pozitiv-totală? În lucrarea de față ne vom ocupa însă numai de mulțimi $\mathcal{F}$ pozitiv-totale pe tot spațiul E.

Acum putem să trecem la problema acestui paragraf.

Să considerăm un *KB*-lineal $G(\mathfrak{M})$, ale cărui elemente sînt funcții reale definite pe o mulțime oarecare $\mathfrak{M}$, liniarizarea și ordonarea fiind definite în modul obișnuit: $(x_1 + x_2)(t) = x_1(t) + x_2(t)$, $(cx)(t) = cx(t)$ și $x > 0$ dacă $x(t) \geqslant 0$ pentru orice $t \in \mathfrak{M}$ și $x(\tau) > 0$ pentru un $\tau \in \mathfrak{M}$.

Vom presupune despre *KB*-linealul $G(\mathfrak{M})$ că el este normat astfel, încît să conțină un element strict pozitiv.

Fixînd un punct $\xi \in \mathfrak{M}$, valoarea $x(\xi)$ a unei funcții $x(t) \in G(\mathfrak{M})$ în acest punct ξ este o funcțională definită pe $G(\mathfrak{M})$:

$$\varphi(x) = x(\xi). \tag{2.1}$$

Luînd un alt punct fix $\xi_1 \in \mathfrak{M}$, obținem astfel o altă funcțională definită pe $G(\mathfrak{M})$: $\varphi_1(x) = x(\xi_1)$ ș.a.m.d. Fie $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ mulțimea tuturor funcționalelor de forma (2.1)

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{M}} = \{\varphi_\xi\}_{\xi \in \mathfrak{M}}, \qquad \text{unde } \varphi_\xi(x) = x(\xi).$$

Dacă $\xi \in \mathfrak{M}$ este un punct cu proprietatea că $x(\xi) = 0$ pentru toți $x(t) \in G(\mathfrak{M})$, atunci $\varphi_\xi = \Phi$. Vom exclude aceste puncte ξ și vom considera numai mulțimea $F_{\mathfrak{M}_0}$, unde, $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ minus acești ξ. Mai departe, în loc de această mulțime ne va fi mai avantajos să considerăm mulțimea

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}_0} = \{f_\xi\}_{\xi \in \mathfrak{M}_0}, \text{ unde } f_\xi = c_{\varphi_\xi}\varphi_\xi,$$

c_{φ_ξ} fiind o constantă reală pozitivă, pe care o vom alege mai tîrziu, univoc determinată de funcționala φ_ξ.

Ne propunem acum să rezolvăm următoarea problemă: E fiind un *KB*-lineal oarecare, să definim o familie $\mathcal{F}$ de funcționale (definite pe E), astfel încît să obținem o generalizare convenabilă a mulțimii $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}_0}$.

Să observăm, în acest scop, următoarele proprietăți ale mulțimii $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}_0}$.

1° Fiecare $f_\xi \in \tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}_0}$ este o funcțională liniară și pozitivă. Într-adevăr,

$f_\xi(x_1 + x_2) = c_{\varphi_\xi}(x_1 + x_2)(\xi) = c_{\varphi_\xi} x_1(\xi) + c_{\varphi_\xi} x_2(\xi) = f_\xi(x_1) + f_\xi(x_2)$

și, dacă $x > 0$, atunci $f_\xi(x) = c_{\varphi_\xi} x(\xi) \geqslant 0$. Funcționala este deci aditivă și pozitivă și, prin urmare, în baza lemei 1.6, ea este liniară.

2° Avem $\|f_\xi\|=1$ pentru orice $f_\xi \in \mathcal{F}_{\mathfrak{M}_0}$ (adică pentru orice $\xi \in \mathfrak{M}_0$), dacă alegem constanta c_{φ_ξ} astfel: $c_{\varphi_\xi} = \dfrac{1}{\|\varphi\|_\xi}$.

3° Mulțimea $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}_0}$ este, evident, pozitiv-totală.

Fie acum E un KB-lineal oarecare. În baza observațiilor de mai sus, în cele ce urmează *vom considera în* E^* *o mulțime pozitiv-totală* $\mathcal{F}$ *de funcționale liniare pozitive cu norma* 1, sau, cum vom spune pe scurt, *o mulțime pozitiv-totală normată* (adeseori vom spune și *mulțime p.t.n.*).

În cazul particular $E = G(\mathfrak{M})$, putem lua $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathfrak{M}_0}$. Însă, cum am văzut, mai există și alte astfel de mulțimi $\mathcal{F}$, de exemplu orice mulțime $\mathcal{F}_M = \{f_\xi\}_{\xi \in M}$, unde M este o mulțime densă în $\mathfrak{M}_0$, sau orice mulțime de funcționale liniare pozitive care conține pe $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}_0}$. Mai mult, vom vedea că, în general, există mulțimi p.t.n. $\mathcal{F}$ cu proprietatea că $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_{\mathfrak{M}_0} = 0$. Deci, mulțimile p.t.n. constituie o generalizare a mulțimii $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}_0}$. Vom vedea în cele ce urmează că mulțimile p.t.n. constituie un instrument util în studiul KB-linealelor.

§ 2. Exemple de mulțimi pozitiv-totale normate pe *KB*-lineale particulare

Cum am văzut, pentru orice spațiu, mulțimea H a tuturor funcționalelor liniare pozitive cu norma 1 și orice submulțime (slab) densă a ei sînt mulțimi p.t.n. În acest paragraf vom da exemple de submulțimi nedense ale mulțimii H, care sînt mulțimi p.t.n.

A) Spații de funcții definite pe intervalul [0,1].

1) $C(0,1)$.

Cel mai important exemplu este mulțimea

$$\mathcal{F}_{[0,1]} = \{f_\xi(x) = x(\xi)\}_{\xi \in [0,1]}.$$

Evident, $\|f_\xi\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |f_\xi(x)| = \sup\limits_{\max |x(t)| \leqslant 1} |x(\xi)| = 1$, deci $\mathcal{F}_{[0,1]}$ este o mulțime p.t.n.

În baza observației din capitolul I, § 1, orice mulțime

$$\mathcal{F}_M = \{f_\xi(x) = x(\xi)\}_{\xi \in M} \quad (M \text{ densă pe } [0,1])$$

este de asemenea p.t.n. (De exemplu: $M = [0,1] - t_0$, $t_0 \in [0,1]$ sau mai mult, mulțimea $M_r = [0,1]$ minus toate punctele iraționale din [0,1], care este și numărabilă). Elementele din $\mathcal{F}_{[0,1]}$, $\mathcal{F}_M$ sînt liniar independente.

Arătăm acum, că în $C(0,1)$ există mulțimi p.t.n. care nu conțin nici o funcțională de forma $f_\xi(x) = x(\xi)$, adică nu au nici un element comun cu mulțimea $F_{[0,1]}$. O astfel de mulțime este de exemplu mulțimea

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{Z}} = \left\{g_{\xi,\eta}(x) = \frac{1}{\eta - \xi}\int_\xi^\eta x(t)\,dt\right\}_{\substack{\xi<\eta \\ \xi,\eta \in [0,1]}}$$

Să verificăm că mulțimea $\mathcal{F}_{\mathfrak{Z}}$ este p.t.n. Evident, $g_{\xi,\eta} > \Phi$ și $\|g_{\xi,\eta}\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \left|\dfrac{1}{\eta - \xi}\int_\xi^\eta x(t)\,dt\right| = 1$ pentru orice $\xi, \eta \in [0,1]$. Pe lîngă aceasta, mulțimea $\mathcal{F}_{\mathfrak{Z}}$ este pozitiv-totală. Într-adevăr, să presupunem că $g_{\xi,\eta}(x) = \dfrac{1}{\eta - \xi}\int_\xi^\eta x(t)\,dt \geqslant 0$ pentru orice $\xi, \eta \in [0,1]$ $(\xi < \eta)$ și există un $\zeta_0 \in [0,1]$, astfel încît $x(\zeta_0) < 0$. Atunci, funcția $x(t)$ fiind continuă pe intervalul [0,1], există un in-

terval $[\xi_0, \eta_0] \ni \zeta_0$, $[\xi_0, \eta_0] \subset [0,1]$, astfel încît $x(t) < 0$ pentru orice $t \in [\xi_0, \eta_0]$. Însă atunci

$$g_{\xi_0, \eta_0}(x) = \frac{1}{\eta_0 - \xi_0} \int_{\xi_0}^{\eta_0} x(t)\, dt < 0$$

și am ajuns în contradicție cu ipoteza. Mulțimea $\mathcal{F}_{\mathfrak{Af}}$ este așadar pozitiv-totală și astfel am demonstrat că mulțimea $\mathcal{F}_{\mathfrak{Af}}$ este p.t.n. Totodată, evident $\mathcal{F}_{[0,1]} \cap \mathcal{F}_{\mathfrak{Af}} = 0$ În același timp însă, dacă $\eta \to \xi$, atunci, pentru orice $x \in E$, $g_{\xi, \eta}(x) \to f_\xi(x)$, deci $g_{\xi, \eta} \xrightarrow{sl} f_\xi$ și prin urmare $\overline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{Af}} \supset \mathcal{F}_{[0,1]}$ *). Observăm că elementele din $\mathcal{F}_{\mathfrak{Af}}$ nu sînt liniar independente: dacă $[\xi, \eta] = [\xi, \zeta] \cup [\xi, \eta]$, atunci $g_{\xi, \eta} = \frac{\zeta - \xi}{\eta - \xi} g_{\xi, \zeta} + \frac{\eta - \zeta}{\eta - \xi} g_{\xi, \eta}$.

La fel ca în exemplul precedent, mulțimile

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{Z}'} = \left\{ g_{\xi, \eta}(x) = \frac{1}{\eta - \xi} \int_\xi^\eta x(t)\, dt \right\}_{\substack{\xi < \eta \\ \xi, \eta \in M}} \quad (M \text{ densă în } [0,1])$$

sînt de asemenea p.t.n. Ele se bucură toate de proprietatea că $\mathcal{F}_{[0,1]} \cap \mathcal{F}_{\mathfrak{Z}'} = 0$, $\mathcal{F}_{[0,1]} \subset \overline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{Z}'} = \overline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{Af}}$ și printre ele există și mulțimi numerabile. Reamintim că $\mathcal{F}_{[0,1]} = Q$. Nu insistăm asupra altor exemple din spațiul C (0,1).

2) C ($[0,1]; t_0$).

$$\mathcal{F} = \{ f_\xi(x) = x(\xi) \}_{\xi \in [0,1] - t_0}$$

$$\mathcal{F} = \left\{ g_{\xi, \eta}(x) = \frac{1}{\eta - \xi} \int_\xi^\eta x(t)\, dt \right\}_{\substack{\xi < \eta \\ \xi, \eta \in [0,1]}}.$$

3) C ($[0,1]; t_0, t_0'; \lambda_0$).

$$\mathcal{F} = \{ f_\xi(x) = x(\xi) \}_{\xi \in [0,1] - t_0},$$

$$\mathcal{F} = \left\{ g_{\xi, \eta}(x) = \frac{1}{\eta - \xi} \int_\xi^\eta x(t)\, dt \right\}_{\substack{\xi < \eta \\ \xi, \eta \in [0,1]}}.$$

4) $M_0(0,1)$.

Forma generală a funcționalelor liniare este complicată. Totuși, putem lua de exemplu

$$\mathcal{F} = \{ f_\xi(x) = x(\xi) \}_{\xi \in [0,1]}.$$

Observăm că, aici, spre deosebire de cazul spațiului $C(0,1)$, dacă scoatem un singur punct t_0 din $[0,1]$, mulțimea $\mathcal{F} = \{ f_\xi(x) = x(\xi) \}_{\xi \in [0,1] - t_0}$ nu mai este pozitiv-totală, deci nu mai este p.t.n.

Alte mulțimi p.t.n. sînt acele mulțimi de funcționale liniare pozitive cu norma 1, care conțin mulțimea $\mathcal{F}$, de exemplu

$$\mathcal{F}_1 = \{ f_\xi(x) = x(\xi),\ h\{\eta_n\}(x) = \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} x(\eta_n) \}_{\xi \in [0,1],\ \eta_n \in M} (M \subset [0,1]),$$

unde prin $\operatorname*{Lim}_{n \to \infty}$ am notat limita lui S. Banach [3].

*) De altfel, faptul că mulțimea $\mathcal{F}_{\mathfrak{Z}}$ este pozitiv-totală, s-ar fi putut demonstra și în baza acestei observații.

5) $V(0,1)$.

O mulțime p.t.n. este de exemplu

$$\mathcal{F}_V = \{f_0(x) = x(0),\ f_{\xi,\eta}(x) = x(\eta) - x(\xi)\}_{\substack{\xi<\eta \\ \xi,\eta\in[0,1]}}.$$

Într-adevăr, $\mathcal{F}_V$ este evident pozitiv-totală, și

$$\|f_0\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f_0(x)| = \sup_{|x(0)|+\operatorname{var} x(t)\leqslant 1} |x(0)| = 1,$$

$$\|f_{\xi,\eta}\| = \sup_{|x(0)|+\operatorname{var} x(t)\leqslant 1} |x(\eta) - x(\xi)| = 1,$$

deci $\mathcal{F}_V$ este o mulțime p.t.n.

Elementele din $\mathcal{F}_V$ nu sînt liniar independente, fiindcă pentru orice $\xi<\eta<\zeta$, $\xi,\ \eta,\ \zeta \in [0,1]$ avem $f_{\xi,\zeta} = f_{\xi,\eta} + f_{\eta,\zeta}$.

Mulțimile

$$\mathcal{F}_{V'} = \{f_0(x) = x(0),\ f_{\xi,\eta}(x) = x(\eta) - x(\xi)\}_{\substack{\xi<\eta \\ \xi,\eta\in M}} \quad (M \text{ densă pe } [0,1])$$

sînt de asemenea p.t.n. Nici elementele mulțimilor $\mathcal{F}_{V'}$ nu sînt liniar independente.

6) $V([0,1];\ 0)$.

$$\mathcal{F} = \{f_{\xi,\eta}(x) = x(\eta) - x(\xi)\}_{\substack{\xi<\eta \\ \xi,\eta\in[0,1]}}$$

Observațiile de la 5) sînt valabile și pentru acest caz.

B) *Spații de clase de funcții echivalente definite pe intervalul* $[0,1]$.

În aceste spații, noțiunea de valoare a unei funcții într-un punct: $x(\xi)$, $\xi \in [0,1]$, nu mai are sens determinat. Așadar, mulțimea $\mathcal{F}_{[0,1]}$, care joacă un rol fundamental în spațiile ale căror elemente sînt funcții, își pierde sensul pentru spațiile ale căror elemente sînt clase de funcții echivalente.

Cu toate acestea, vom arăta că și în aceste spații există mulțimi p.t.n. care nu sînt dense în mulțimea tuturor funcționalelor liniare pozitive cu norma 1.

1) $M(0,1)$.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{J}} = \left\{ f_E(x) = \frac{1}{mE}\int_E x(t)\,dt \right\}_{\substack{E\subset[0,1] \\ mE>0}}$$

(E parcurge toate mulțimile măsurabile neechivalente de măsură pozitivă din $[0,1]$ *)). Elementele acestei mulțimi se pot scrie și sub forma

$$f_E(x) = \frac{1}{mE}\int_0^1 x(t)\,\alpha_E(t)\,dt,$$

unde

$$\alpha_E(t) = \begin{cases} 1, & t\in E \\ 0, & t\notin E \end{cases}$$

este funcția caracteristică a mulțimii E. Mulțimea $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ este p.t.n. Într-adevăr, evident $f_E > \Phi$, $\|f_E\| = \frac{1}{mE}\int_0^1 |\alpha_E(t)|\,dt = 1$ pentru orice $f_E \in \mathcal{F}_{\mathcal{J}}$. Totodată mulțimea $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ este și pozitiv-totală, fiindcă dacă $f_E(x) \geqslant 0$ pentru toți $f_E \in \mathcal{F}_{\mathcal{J}}$,

*) Utilizăm notația E și pentru KB linealele generale și pentru mulțimile măsurabile de măsură pozitivă; aceasta nu va da loc la confuzii.

și am avea $x(t) < 0$ aproape pentru orice $t \in E_0$, unde E_0 [0,1] este o mulțime de măsură pozitivă, atunci ar rezulta că $f_E(x) < 0$, în contradicție cu ipoteza

În același timp, mulțimea $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$ nu coincide cu mulțimea tuturor funcționalelor liniare pozitive cu norma 1, fiindcă de exemplu funcționala

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt,$$

unde

$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}, & \frac{1}{2} < t \leqslant 1 \end{cases}$$

este liniară pozitivă, are norma 1 și nu aparține mulțimii $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$. Observăm că mulțimea $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$ (a se vedea la spațiul $C(0,1)$) este definită nu numai pentru orice $x(t) \in C(0,1)$, dar și pentru orice $x(t) \in M(0,1)$ (scriind $[\xi,\eta] = E$, $\eta - \xi = mE$) și avem $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$.

Funcționalele din $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$ nu sînt liniar independente: dacă $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = 0$, atunci $f_E = \frac{mE_1}{mE} f_{E_1} + \frac{mE_2}{mE} f_{E_2}$.

2) $L(0,1)$.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{Y}} = \left\{ f_E(x) = \int_E x(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha_E(t)\,dt \right\}_{\substack{E \subset [0,1] \\ mE > 0}}$$

Aici $\|f_E\| = \text{ad} \max_{[0,1]} |\alpha_E(t)| = 1$. Pozitiv-totalitatea mulțimii $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$ se arată la fel ca în cazul spațiului $M(0,1)$. Funcționalele din $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$ nu sînt liniar independente: dacă $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = 0$, atunci $f_E = f_{E_1} + f_{E_2}$.

3) $L^p(0,1)$ $(p > 1)$. $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{Y}_p} = \left\{ f_E(x) = \frac{1}{(mE)^{\frac{1}{q}}} \int_E x(t)\,dt = \frac{1}{(mE)^{\frac{1}{q}}} \int_0^1 x(t)\,\alpha_E(t)\,dt \right\}_{\substack{E \subset [0,1] \\ mE > 0}}$$

Aici $\|f_E\| = \frac{1}{(mE)^{\frac{1}{q}}} \left\{ \int_0^1 |\alpha_E(t)|^q dt \right\} = 1$. Funcționalele din $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}_p}$ nu sînt liniar independente.

C) *Spații de șiruri și subspațiile lor de dimensiune finită*

1) m.

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{M}} = \{ f_n(x) = \xi_n \}_{n=1,2,\ldots}$$

este evident o mulțime pozitiv-totală și $\|f_n\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f_n(x)| = \sup_{\sup_i |\xi_i| \leqslant 1} |\xi_n| = 1$,

deci $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ este o mulțime p.t.n. Nici o submulțime a lui $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ nu mai este pozitiv totală deci nu mai este p.t.n.

Vom introduce acum următoarea expresie: vom spune că funcționalele

$$\{f_\eta\}_{1 \leqslant \eta \leqslant}$$

(în particular $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$) sînt (∞)-liniar independente, dacă

$$\sum_{\eta=1} c_\eta f_\eta = \Phi \text{ implică } c_\eta = 0,\ \eta = 1,\ 2,\ldots$$

(în particular: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n = \Phi$ implică $c_n = 0,\ n = 1,\ 2,\ldots$), sumele luîndu-se în sensul convergenței slabe a funcționalelor.

De exemplu, elementele mulțimii $\mathcal{F}_{[0,1]}$ definită pe $C(0,1)$ sînt (∞)-liniar independente. Evident, dacă funcționalele $\{f_\eta\}_{1 \leqslant \eta \leqslant}$ (în particular $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$) sînt (∞)-liniar independente, atunci ele sînt și liniar independente, dar nu și invers.

Elementele din $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ sînt (∞)-liniar independente. Însă $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ nu este singura mulțime p.t.n. ale cărei elemente sînt (∞) — liniar independente. De exemplu, mulțimea

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{M},0} = \{f_n(x) = \xi_n,\ f_0(x) = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n\}_{n=1,2,\ldots},$$

unde $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$ este limita lui S. Banach [3], este tot o mulțime p.t.n. cu această proprietate (avem $\|f_0\| = \sup_{\sup |\xi_i| \leqslant 1} |\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n| = 1$, fiindcă $-\sup(-\xi_n) = \inf \xi_n \leqslant \underline{\lim}\, \xi_n \leqslant \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}}\, \xi_n \leqslant \overline{\lim}\, \xi_n \leqslant \sup \xi_n$. Totodată, $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$ nu este de forma $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_i$, fiindcă $-\sup(-\xi_n) = \inf \xi_n \leqslant \underline{\lim}\, \xi_n \leqslant \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_u \leqslant \underline{\lim}\, \xi_n \leqslant \sup \xi_n$ că nu avem decît să luăm un șir $\{\xi_n\}$ convergent și afirmația este evidentă). Dar nici $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ și $\mathcal{F}_{\mathfrak{M},0}$ nu sînt singurele mulțimi p.t.n. ale căror elemente sînt (∞)-liniar independente deoarece de aici ar rezulta că spațiul m este separabil, ceea ce este absurd 2) m.

Mulțimea $\mathcal{F}_{(k)} = \{f_n(x) = \xi_n\}_{n=1,2,\ldots,k}$ este p.t.n.

Deoarece în m_k orice funcțională liniară este de forma $f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i$, unde $\|f\| = \sum_{i=1}^{k} |c_i|$, avem și următoarele proprietăți:

Mulțimea $\mathcal{F}_{(k)}$ este singura mulțime p.t.n. ale cărei elemente sînt liniar independente. Mulțimea $\mathcal{F}_{(k)}$ constă dintr-un număr finit de elemente, deci este slab închisă. Reamintim că $\mathcal{F}_{(k)} = Q$.

Deși m_k este de dimensiune finită, există totuși mulțimi $\mathcal{F}$ p.t.n. care nu au nici un element comun cu mulțimea $\mathcal{F}_{(k)}$. O astfel de mulțime este de exemplu, pentru m_2, mulțimea

$$\mathcal{F} = \{f_1(x) = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2,\ f_2(x) = \frac{1}{4}\xi_1 + \frac{3}{4}\xi_2,\ f_3(x) = \frac{7}{8}\xi_1 + \frac{1}{8}\xi_2,$$

$$f_4(x) = \frac{1}{16}\xi_1 + \frac{15}{16}\xi_2,\ \ldots\}$$

care, după cum se verifică direct, este într-adevăr p.t.n. Prin urmare și în m_k intersecția tuturor mulțimilor p.t.n. este vidă. De altfel se poate arăta cu ușurință că mulțimi p.t.n. finite care nu au nici un element comun cu mulțimea $\mathcal{F}_{(k)}$ — mai mult, care nu conțin mulțimea $\mathcal{F}_{(k)}$ — nu există. Totodată se poate arăta că mulțimea

$$\mathcal{F} = \left\{ g_n(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i^{(n)} \xi_i \right\}_{n=1,2,\ldots}, \quad c_i^{(n)} \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k} c_i^{(n)} = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

este pozitiv-totală normată atunci și numai atunci cînd $\overline{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}_{(k)}$.

3) c.

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{X}} = \{ f_n(x) = \xi_n \}_{n=1,2,\ldots}$$

este evident o mulțime pozitiv-totală și $\|f_n\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f_n(x)| = \sup_{\sup_i |\xi_i| \leqslant 1} |\xi_n| = 1$, deci $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ este o mulțime p.t.n.

Ținînd seama de forma generală a funcționalelor liniare pozitive cu norma 1 definite pe c, este clar că singurele mulțimi p.t.n. ale căror elemente sînt (∞)-liniar independente sînt $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ și

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{X},0} = \{ f_n(x) = \xi_n, \; f_0(x) = \lim_{n \to \infty} \xi_n \}_{n=1,2,\ldots}.$$

Reamintim că $\mathcal{F}_{\mathfrak{X},0} = Q$.

4) l.

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{X}} = \{ f_n(x) = \xi_n \}_{n=1,2,\ldots}$$

este evident o mulțime pozitiv-totală și $\|f_n\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f_n(x)| = \sup_{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| \leqslant 1} |\xi_n| = 1$

deci $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ este o mulțime p.t.n. Ținînd seama de forma generală a funcționalelor liniare pozitive cu norma 1 definite pe l, este clar că singura mulțime p.t.n. ale cărei elemente sînt (∞)-liniar independente este $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$.

5) l^p $(p > 1)$.

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{X}} = \{ f_n(x) = \xi_n \}_{n=1,2,\ldots}$$

este evident o mulțime pozitiv-totală și $\|f_n\| = \sup_{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \leqslant 1} |\xi_n| = 1$, deci $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ este o mulțime p.t.n. La fel ca în cazul precedent, $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ este singura mulțime p.t.n. ale cărei elemente sînt (∞)-liniar independente.

6) l_k, l_k^p $(p > 1)$.

Mulțimea $\mathcal{F}_{(k)} = \{ f_n(x) = \xi_n \}_{n=1,2,\ldots,k}$ este p.t.n. și se bucură de aceleași proprietăți ca și în cazul spațiului m_k.

§ 3. Teorema de reprezentare

Fie E un KB-lineal oarecare și $\mathcal{F} \subset E^*$ o mulțime p.t.n. oarecare. Să considerăm spațiul $C(\mathcal{F})$ al tuturor funcțiilor reale continue definite pe $\mathcal{F}$, cu norma definită astfel: $\|X\| = \sup_{f \in \mathfrak{X}} |X(f)|$. Avem următoarea teoremă de reprezentare:

Teorema 2.1. *Există o reprezentare liniară (aditivă și continuă) izomorfă a spațiului E în spațiul $C(\mathcal{F})$.*

Demonstrație. Fie $x \in E$ și fie $X(f) = f(x)$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$. Atunci $X(f) \in C(\mathcal{F})$, deoarece din $f_n \xrightarrow{sl} f^*$) rezultă $f_n(x) \to f(x)$, adică $X(f_n) \to X(f)$. *Corespondența $x \longleftrightarrow X$ este cea căutată.*

Corespondența este liniară. Într-adevăr, $x_1 + x_2 \longleftrightarrow X_1 + X_2$ fiindcă $(X_1 + X_2)(f) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = X_1(f) + X_2(f)$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$ și $x_n \to x$ implică $X_n \to X$ deoarece $\| x_n - x \|_E \geqslant \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} | f(x_n - x) | = \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} | (X_n - X)(f) | = \| X_n - X \|_{C(\mathcal{F})}$

Corespondența este biunivocă. Într-adevăr, presupunînd că unui $x \in E$ dat îi corespund două funcții $X_1(f)$, $X_2(f) \in C(\mathcal{F})$, avem $X_1(f) = f(x)$ și $X_2(f) = f(x)$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, deci $X_1(f) = X_2(f)$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, adică $X_1 \equiv X_2$; invers, presupunînd că unui $X(f) \in C(\mathcal{F})$ dat îi corespund două elemente $x_1, x_2 \in E$, avem $X(f) = f(x_1) = f(x_2)$ pentru toți $f \in \mathcal{F}$, de unde, în baza lemei 2.1, $x_1 = x_2$.

În sfîrșit, corespondența păstrează ordonarea. Într-adevăr, dacă $x \in E$, $x > 0$, atunci $X(f) = f(x) \geqslant 0$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$ și $X(f) = f(x) \not\equiv 0$; invers, dacă $X(f) \in C(\mathcal{F})$, $X(f) \geqslant 0$ pentru toți $f \in \mathcal{F}$, $X(f) \not\equiv 0$, și dacă există un element $x \in E$ astfel încît $X(f) = f(x)$ pentru toți $f \in \mathcal{F}$, atunci, mulțimea $\mathcal{F}$ fiind pozitiv-totală rezultă $x > 0$.

Teorema 2.1. este demonstrată.

Vom studia, în primul rînd, problema izometriei reprezentării.

În general, reprezentarea din teorema 2.1 *nu este izometrică*:

$$\| x \|_E = \sup_{\| f \| \leqslant 1} | f(x) | \geqslant \sup_{f \in \mathcal{F}} | f(x) | = \sup_{f \in \mathcal{F}} | X(f) | = \| X \|_{C(\mathcal{F})} . \tag{2.2}$$

În cazul cînd reprezentarea se bucură și de proprietatea că $\sup(x, y) \longleftrightarrow \sup(X, Y)$, *pentru ca ea să fie izometrică, este necesar ca spațiul E să fie de tip M*, deoarece spațiul $C(\mathcal{F})$ este de tip M. Nu știm însă, dacă această condiție este și suficientă.

Dacă $\overline{\mathcal{F}} = Q$ (unde Q este mulțimea introdusă în capitolul I, § 3), *atunci suficiența condiției ne este asigurată de teorema de reprezentare a lui M. G. Krein, S. G. Krein* și *S. Kakutani.* Mai mult, în baza aceleiași tecreme de reprezentare rezultă că, *dacă $\overline{\mathcal{F}} \supset Q$, atunci condiția ca spațiul E să fie de tip M este suficientă pentru izometria reprezentării.* Într-adevăr, dacă spațiul E este de tip M și $\overline{\mathcal{F}} \supset Q$, atunci din inegalitatea (2.2) și din

$$\| x \|_E = \sup_{f \in Q} | f(x) | \leqslant \sup_{f \in \mathcal{F}} | f(x) | = \sup_{f \in \mathcal{F}} | X(f) | = \| X \|_{C(\mathcal{F})}$$

rezultă că reprezentarea este izometrică. Din această propoziție rezultă următoarea consecință: *Dacă $Q = \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{F} \text{ p.t.n.} \\ \mathcal{F} \subset E^*}} \mathcal{F}$, atunci pentru orice mulțime p.t.n. $\mathcal{F} \subset E^*$ condiția ca spațiul E să fie de tip M este suficientă pentru izometria reprezentării.*

Ipoteza acestei propoziții nu este însă satisfăcută în orice spațiu de tip M. Iată un exemplu. Fie $E = M(0,1)$ și $\mathcal{F} = \left\{ f_E(x) = \frac{1}{mE} \int_0^1 x(t)\, \alpha_E(t)\, dt \right\}_{\substack{E \leqslant [0,1] \\ mE > 0}}$. Avem $\mathcal{F} \cap Q = 0$, deoarece pentru orice E cu $mE > 0$ există un $x(t) \in M(0,1)$,

*) După cum am amintit și în cap. I, în E^* vom considera topologia slabă introdusă prin convergența slabă a funcționalelor.

astfel încît $|f_E(x)_p \neq f_E(|x|)$. Mai mult, avem și $\overline{\mathcal{F}} \cap Q = 0$, deoarece dacă funcționala $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x(t)\,\alpha_{E_n}(t)\,dt$ există pentru orice $x(t) \in M(0,1)$ și $F(x) \not\equiv 0$, atunci ea de asemenea nu satisface criteriul (1.5) al lui M. G. Krein. Ținînd seama de faptul că mulțimea Q nu este vidă (a se vedea cap. I, § 3), rezultă că, în spațiul $M(0,1)$, $Q \neq \cap\, \overline{\mathcal{F}}$. Cu toate acestea, reprezentarea din teorema (2.1) a spațiului $M(0,1)$ în spațiul $C(\mathcal{F})$, unde $\mathcal{F} \subset [M(0,1)]^*$ este o mulțime p.t.n. *oarecare*, este izometrică. Aceasta rezultă din teorema 3.6. În cazul general însă, după cum am mai amintit, problema rămîne deschisă.

Să vedem acum legătura dintre mulțimile p.t.n. definite de noi și mulțimile $\mathcal{S}$, Q și T definite de M. G. Krein, S. G. Krein și S. Kakutani (cap. I, § 3). Avem

Lema 2.2. *Dacă spațiul E este de tip M, atunci $\mathcal{S}$ este o mulțime p.t.n.*

Demonstrație. În primul rînd, avem prin definiție $f > \Phi$, $\|f\| = 1$ pentru orice $f \in \mathcal{S}$. Mai departe, mulțimea $\mathcal{S}$ este totală, fiindcă dacă $f(x) = 0$ pentru orice $f \in \mathcal{S}$, atunci, în baza teoremei de reprezentare a lui M. G. Krein, S. G. Krein și S. Kakutani, $\|x\| = \sup\limits_{f\in Q} |f(x)| = \sup\limits_{f\in\mathcal{S}} |f(x)| = 0$, deci $x = 0$.

Fie acum $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $f \in \mathcal{S}$. Atunci

$$f(|x|) = |f(x)| = f(x) \qquad \text{pentru orice } f \in \mathcal{S},$$

de unde

$$f(|x| - x) = 0 \qquad \text{pentru orice } f \in \mathcal{S}.$$

Mulțimea $\mathcal{S}$ fiind totală, rezultă că $|x| - x = 0$, adică $x = |x|$ și prin urmare $x \geqslant 0$. Mulțimea $\mathcal{S}$ este deci pozitiv-totală.

Lema 2.2 este demonstrată.

În ceea ce privește mulțimea Q, din lema 2.2 rezultă că *mulțimea Q este* pozitiv-totală. Însă, cum am văzut în capitolul I, § 3, *mulțimea Q nu este, în general, o mulțime normată* $\left(\text{exemple: } C([0,1];\, t_0),\ C\left([0,1];\, 0{,}1;\, \frac{1}{2}\right)\right)$.

În cazul particular, cînd E conține element unitate e (a se vedea cap. III, § 1), *mulțimea Q este și ea o mulțime p.t.n.* Pentru aceasta este suficient să arătăm că $\|f\| = 1$ pentru orice $f \in Q$. Fie $f \in Q$. Există un șir de funcționale $\{f_n\}$, $f_n \in \mathcal{S}$ (deci $\|f_n\| = 1$), astfel încît $f_n \xrightarrow{sl} f$. Avem (a se vedea cap. III, § 1, consecința teoremei 3.1) $\|f\| = f(e) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(e) = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = 1$ și afirmația este demonstrată.

Comparînd deci mulțimile $\mathcal{S}$, Q și T definite de Krein și Kakutani cu mulțimile p.t.n. introduse de noi, precum și reprezentarea Krein-Kakutani (cap. I, § 3) cu reprezentarea noastră, conchidem că mulțimile p.t.n. și reprezentarea noastră au următoarele avantaje:

1. Mulțimile $\mathcal{S}$ și Q au importanță numai pentru spațiile de tip M. Cum am văzut, proprietățile lor, studiate de Krein și Kakutani, sînt valabile pentru spații de tip M, dar nu se mențin pentru orice KB-lineal. Mai mult, există KB-lineale, în care mulțimile $\mathcal{S}$ și Q sînt vide. Teorema de reprezentare a lui M. G. Krein, S. G. Krein și S. Kakutani particularizează KB-linealul E.

Dimpotrivă, mulțimile p.t.n. au importanța lor în orice KB-lineal. În orice KB-lineal există mulțimi p.t.n. nevide nebanale. Reprezentarea noastră nu particularizează KB-linealul E.

2. Chiar și în unele KB-lineale de tip M frecvente, de exemplu în $M(0,1)$, nu cunoaștem explicit elementele mulțimilor $\mathcal{S}$, Q și T și nici spațiul $C(Q)$.

Dimpotrivă, mulțimi p.t.n. concrete se pot da în orice KB-lineal.

3. Dacă spațiul E este de tip M, atunci mulțimea $\mathcal{S}$ este p.t.n., și dacă E conține element unitate, atunci și mulțimea Q este p.t.n., iar dacă E este un KB-lineale oarecare, multimea T este p.t.n. Prin urmare, rezultatele privind mulțimile p.t.n. și reprezentarea lui E în $C(\mathcal{F})$ sînt valabile în particular și pentru mulțimile $\mathcal{S}$, Q și T și pentru reprezentarea lui E în $C(Q)$.

Faptul că mulțimea $\mathcal{F}$ nu este univoc determinată, nu constituie un dezavantaj pentru cele ce urmează. De asemenea, nu este dezavantaj nici faptul că în general reprezentarea lui E în $C(\mathcal{F})$ nu este izometrică. Mai departe, mulțimea Q este întotdeauna slab închisă și slab bicompactă. Mulțimile p.t.n. nu sînt în general nici slab închise, nici slab bicompacte, nici chiar în spațiile de tip M frecvente (de exemplu mulțimea $\mathcal{F} = \{f_\xi(x) = x(\xi)\}_{\xi \in (0,1)}$ de funcționale liniare definite pe $E = C(0,1)$). În schimb, ele au avantajul că $\|f\| = 1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$. De altfel, dacă $\mathcal{F} \subset E^*$ este o mulțime p.t.n., atunci mulțimea $\overline{\mathcal{F}}$ este întotdeauna slab închisă și slab bicompactă.

Să ne reîntoarcem acum la problema noțiunii de valoare a unei funcții într-un punct.

Fie E un KB-lineal oarecare și $\mathcal{F} \subset E^*$ o mulțime p.t.n. oarecare. Să notăm cu I imaginea spațiului E în $C(\mathcal{F})$. În baza izomorfismului corespondenței din teorema 2.1, I este o submulțime cu aceeași ordonare a spațiului $C(\mathcal{F})$, iar dacă corespondența este și izometrică, atunci I este un subspațiu al spațiului $C(\mathcal{F})$. În virtutea teoremei 2.1, reprezentarea $x \longleftrightarrow X$ a lui E pe I este un operator liniar; îl vom nota

$$X = U(x).$$

Operatorul U este pozitiv și operatorul invers U^{-1} este de asemenea pozitiv. Avem, folosind relația (2.2),

$$\|U\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|U(x)\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|X\| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|x\| = 1$$

și, dacă reprezentarea $x \longleftrightarrow X$ este izometrică,

$$\|U\| = 1.$$

Fiecărei funcționale liniare $F \in I^*$ îi corespunde o funcțională liniară $f_F \in E^*$ definită pentru fiecare $x \in E$ prin relația $f_F(x) = F(X)$ (operatorul care realizează corespondența $F \to f_F$ nu este altceva decît operatorul adjunct $U^*: f_F = U^*(F)$). Ne punem întrebarea: *ce funcționale din E^* corespund funcționalelor de forma $F(X) = X(f_0)$ ($f_0 \in \mathcal{F}$, f_0 fix) din I^*?*

Deoar ce prin definiția reprezentării $x \longleftrightarrow X$, avem $X(f) = f(x)$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$e, rezultă că *funcționalei $F(X) = X(f_0)$ ($f_0 \in \mathcal{F}$, f_0 fix) îi corespunde funcționala $f_0 \in \mathcal{F} \subset E^*$.*

În cazul cînd operatorul invers $x = U^{-1}(X)$ este continuu, deci liniar, operatorul $(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*$ este liniar și face să corespundă fiecărei funcționale $f_0 \in \mathcal{F} \subset E^*$ funcționala $F(X) = X(f_0)$ din I^*.

În sfîrșit, fie E un spațiu de funcții $G(\mathfrak{M})$. Cum am văzut, mulțimea $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}_0} = \{f_\xi\}_{\xi \in \mathfrak{M}_0}$ (a se vedea cap. II, § 1) este întotdeauna p.t.n. În același timp,

există spații $G(\mathfrak{M})$, chiar și de tip M, pentru care mulțimile $\mathcal{S}$, Q și T nu conțin *numai* funcționale de forma $f_\xi(x) = c_{\varphi_\xi}\ x\ (\xi)$. Iată un exemplu. Fie $D_1(0,1)$ spațiul funcțiilor mărginite definite pe $[0,1]$, care au cel mult discontinuități de prima speță, cu norma $\|x\| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$. Avem, evident, $C \subset D_1 \subset M_0$ și D_1 este de tip M. În timp ce mulțimea $\mathcal{F}_{[0,1]} = \{f_\xi(x) = x(\xi)\}_{\xi \in [0,1]}$ este p.t.n., mulțimile $\mathcal{S}$, Q și T conțin pe lîngă mulțimea $\mathcal{F}_{[0,1]}$ și toate funcționalele de forma $g_\xi(x) = x\ (\xi - 0)$, $h_\xi(x) = x\ (\xi + 0)$, $\xi \in [0,1]$. Așadar, chiar și pentru spațiile în care are sens noțiunea de valoare a unei funcții într-un punct, mulțimile p.t.n. dau o generalizare mai corespunzătoare, din anumite puncte de vedere, a acestei noțiuni, decît mulțimile $\mathcal{S}$, Q și T. În cele ce urmează, vom vedea că utilitatea mulțimilor p.t.n. se datorește tocmai faptului că ele dau o generalizare convenabilă a noțiunii de valoare a unei funcții într-un punct.

CAPITOLUL III

ELEMENTE CONSTANTE. ELEMENT UNITATE

§ 1. Noțiunea de element unitate

Fie E un *KB*-lineal, $\mathcal{F} \subset E^*$ o mulțime p.t.n. dată de funcționale liniare definite pe E.

Bazîndu-ne pe generalizarea din capitolul II a noțiunii de valoare a unei funcții într-un punct, dăm

Definiția 3.1. *Vom spune că elementul $x \in E$ este un element constant corespunzător numărului real K (notăm: $x \sim K$, dacă avem*

$$f(x) = K \text{ pentru orice } f \in \mathcal{F}$$

și

$$\|x\| = |K|.$$

Numim orice element ~ 1 element unitate (sau, pe scurt, unitate) al spațiului E și îl notăm cu e.

Din definiție se vede că 0 este element constant ~ 0. Definiția 3.1 nu asigură însă pentru orice *KB*-lineal E existența unui element constant $\neq 0$.

Condiția a doua din definiția 3.1 *este independentă de prima.* Să luăm de exemplu spațiul euclidian $R_2 = l_2^2$ și $\mathcal{F} = \{f_n(x) = \xi_n\}_{n=1,2}$. Atunci elementul $e = \{1,1\} \in R_2$ se bucură de proprietatea $f_1(e) = 1$, $f_2(e) = 1$, însă $\|e\| = \sqrt{2}$.

Pentru ca definiția 3.1 să ne dea o generalizare bună a noțiunii de funcție constantă, trebuie ca ea să fie *independentă de mulțimea $\mathcal{F}$* de la care pornim. Vom arăta (teorema 3.1) că acest lucru are într-adevăr loc. În acest scop observăm că avem următoarele proprietăți:

Lema 3.1. *K fiind un număr real oarecare fix, dacă există în E un element constant $\sim K$, atunci el este unic.*

Afirmația rezultă imediat din lema 2.1.

În particular, dacă există element unitate $e \in E$, atunci el este unic.

Lema 3.2. *Un spațiu care conține constanta e conține toate constantele, adică pentru orice K real există un element constant $\sim K$; acest element este elementul Ke.*

Într-adevăr, din faptul că $f(e)=1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, rezultă că $f(Ke)=Kf(e)=K$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$. În același timp, din $\|e\|=1$ rezultă $\|Ke\|=|K|\cdot\|e\|=|K|$. Prin urmare, $Ke \sim K$ (evident, $Ke \in E$). Lema este demonstrată; totodată am arătat că pentru orice element constant x avem $x=\pm\|x\|.e$.

Se vede la fel că un spațiu care conține un element constant oarecare $\neq 0$, conține toate constantele. Rezultă că, pentru ca un spațiu să conțină toate constantele, este necesar și suficient să conțină elementul e, sau un alt element constant oarecare $\neq 0$.

Lema 3.3. $e > 0$.

Aceasta rezultă imediat din faptul că mulțimea $\mathcal{F}$ este pozitiv-totală.

Din lemele 3.2 și 3.3 rezultă că orice element constant $\neq 0$ este sau > 0, sau < 0, adică mulțimea tuturor elementelor constante este total ordonată. Vom nota cu $\mathcal{K}$ această mulțime. Evident, $\mathcal{K}$ este un subspațiu, izomorf și izometric cu R_1.

Lema 3.4. $\|x-e\| \leqslant 1$ *implică* $x \geqslant 0$.

Demonstrație. Fie $\|x-e\| \leqslant 1$. Atunci $|f(x-e)| \leqslant 1$ pentru orice $f \geqslant \Phi$ cu $\|f\| \leqslant 1$, deci, în particular, pentru orice $f \in \mathcal{F}$. Prin urmare, $|f(x)-f(e)| = |f(x)-1| \leqslant 1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$. De aici rezultă că $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, deci, mulțimea $\mathcal{F}$ fiind pozitiv-totală, $x \geqslant 0$, ceea ce era de demonstrat.

Consecința 1. $e \gg 0$.

Consecința 2. $\|x-e\| \leqslant 1$ *implică* $x \leqslant 2e$.

Într-adevăr, în baza lemei 3.4,

$\|(2e-x)-e\| = \|e-x\| = \|x-e\| \leqslant 1$ implică $2e-x \geqslant 0$, adică $x \leqslant 2e$.

Observație. Cu același raționament, ca mai sus, obținem și următoarea propoziție mai tare: $\|x-e\| < 1$ implică $0 \ll x \ll 2e$.

Să mai observăm că demonstrația lemei 3.4 nu folosește proprietatea că $\|e\|=1$. Vom utiliza acest fapt în capitolul IV (a se vedea lema 4.3).

Lema 3.5. *Dacă un element* $e \in E$ *se bucură de proprietățile a)* $\|e\|=1$ *și b)* $\|x-e\| \leqslant 1$ *implică* $x \geqslant 0$, *atunci pentru orice* $f \geqslant \Phi$ *avem* $f(e)=\|f\|$.

Demonstrație. În baza condiției *a)* pentru orice $f \in E^*$, deci și pentru orice $f \geqslant \Phi$, avem

$$f(e) \leqslant |f(e)| \leqslant \|f\|\cdot\|e\| = \|f\|.$$

Pe de altă parte, în baza condiției *b)* și utilizînd lema 1.4 rezultă că pentru orice $f \geqslant \Phi$ avem

$$f(e) \geqslant \|f\|.$$

Confruntînd cele două inegalități, rezultă că $f(e)=\|f\|$ pentru orice $f \geqslant \Phi$. Lema este demonstrată.

Observație. Lema 3.5, sub o formă mai puțin precisă, se află și în lucrarea [11] a lui J. L. Kelley și R. L. Vaught (ei au presupus și condiția *c)* $e > 0$, neobservînd că ea rezultă din *b)* (și că de fapt ea nu este necesară în demonstrație). Ei se mărginesc să o observe în treacăt (nici nu folosesc noțiunea de element unitate), pentru a o utiliza apoi la probleme de altă natură.

Este adevărată și reciproca lemei 3.5. Într-adevăr, fie $\mathcal{F} \subset E^*$ o mulțime p.t.n. Dacă $f(e)=\|f\|$ pentru orice $f \geqslant \Phi$, atunci, în particular, $f(e)=1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$ și $\|e\| = \sup_{\substack{\|f\| \leqslant 1 \\ f > \Phi}} |f(e)| = \sup_{\substack{\|f\| \leqslant 1 \\ f > \Phi}} \|f\| = 1$, deci e este elementul unitate al spațiului E, și afirmația rezultă din lema 3.4.

Acum putem demonstra:

T e o r e m a 3.1. *Dacă $x \sim K$ relativ la o mulțime p.t.n. dată $\mathcal{F} \subset E^*$, atunci $f(x) = K$ pentru orice funcțională liniară pozitivă cu norma $\|f\| = 1$; cu alte cuvinte, elementul $\sim K$ nu depinde de mulțimea p.t.n. $\mathcal{F}$ de la care pornim.*

Demonstrație. Ținînd seama de lema 3.2, este suficient să demonstrăm teorema pentru elementul $e \sim 1$. Fie deci $\mathcal{F} \subset E^*$ o mulțime p.t.n. dată, $f(e) = 1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, și $\|e\| = 1$. Ținînd seama de lema 3.4, rezultă că elementul $e \in E$ satisface ipotezele din lema 3.5. Aplicînd lema 3.5, rezultă că $f(e) = 1$ pentru orice $f > \Phi$ cu $\|f\| = 1$, ceea ce era de demonstrat.

O b s e r v a ț i e. Putem da o altă demonstrație mai simplă a teoremei 3.1. Să observăm că avem următoarea proprietate: *Dacă $e \in E$, $e \sim 1$, atunci $\|x\| \leqslant 1$ implică $|x| \leqslant e$*, adică dintre elementele cu norma $\leqslant 1$ cel mai mare este elementul unitate e și cel mai mic este elementul $-e$. Într-adevăr, dacă $\|x\| \leqslant 1$, atunci $\| |x| \| \leqslant 1$, deci $f(|x|) \leqslant 1 = f(e)$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, de unde, mulțimea $\mathcal{F}$ fiind pozitiv-totală, $|x| \leqslant e$, ceea ce era de arătat.

Fie acum $e \sim 1$, $f > \Phi$, $\|f\| = 1$. În baza proprietății arătate, pentru orice $x \in E$ cu $\|x\| \leqslant 1$ avem $|x| \leqslant e$, de unde, în baza lemei 1.5, $|f(x)| \leqslant f(|x|) \leqslant f(e)$. Ținînd seama de faptul că $\|e\| = 1$ prin definiție, obținem $1 = \|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = f(e)$, ceea ce era de demonstrat.

Am preferat totuși să folosim lema 3.4 în loc de această proprietate, deoarece ea are avantajul că pune în evidență pozitivitatea strictă a elementului unitate.

Reciproca teoremei 3.1 este de asemenea adevărată. Într-adevăr, dacă $f(e) = 1$ pentru orice funcțională liniară pozitivă cu norma 1 și $\mathcal{F} \subset E^*$ este o mulțime p.t.n. dată, atunci, în particular, $f(e) = 1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$. În același timp, $f(e) = \|f\|$ pentru orice $f > \Phi$ și, prin urmare, $\|e\| = \sup_{\substack{\|f\| \leqslant 1 \\ f > \Phi}} |f(e)| = \sup_{\substack{\|f\| \leqslant 1 \\ f > \Phi}} \|f\| = 1$.

Afirmația este demonstrată.

Definiția 3.1 este prin urmare echivalentă cu:

D e f i n i ț i a 3.2. *Spunem că elementul $y \in E$ este un element constant corespunzător numărului real K (notăm $y \sim K$), dacă avem $f(y) = K$ pentru orice funcțională liniară pozitivă f cu norma $\|f\| = 1$.*

Definiția 3.1 este mai utilizabilă practic decît definiția 3.2, deoarece în timp ce mulțimile p.t.n. sînt simple, în unele *KB*-lineale (chiar cu element unitate, de exemplu $M_0(0,1)$, $M(0,1)$, m) forma generală a funcționalelor liniare este complicată.

Un alt criteriu practic bun, care rezultă cu ușurință din cele precedente și care are avantajul că nu folosește spațiul adjunct, este

L e m a 3.6. *Pentru ca elementul $e \in E$ să fie elementul unitate al KB-linealului E, este necesar și suficient să îndeplinească condițiile a) $\|e\| = 1$ și b) $\|x - e\| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$.*

Această propoziție permite următoarea caracterizare geometrică a elementului unitate: elementul $e \in E$ este elementul unitate al *KB*-linealului E, dacă și numai dacă *a)* e aparține frontierei sferei unitate a lui E, *b)* sfera de rază 1 cu centrul în e constă numai din elemente pozitive.

Situația din spațiile $R_2 = l_2^2, l_2$ și m_2 se poate urmări pe figurile 1, 2, 3. Pe fiecare din aceste figuri este arătată sfera unitate a spațiului, sfera de rază 1 cu centrul în $\{1,1\}$ și o porțiune hașurată. Porțiunea hașurată, împreună cu frontiera ei, este mulțimea acelor puncte din spațiu care satisfac condiția *b)* (ele-

mentele pozitive sînt punctele din primul cadran şi de pe frontiera lui). În spaţiile R_2 şi l_2 nici unul din aceste puncte nu aparţine sferei unitate, deci în aceste spaţii nu există element unitate. În spaţiul m_2 însă, colţul $\{1,1\}$ al porţiunii haşurate aparţine şi sferei unitate şi, prin urmare, este elementul unitate al spaţiului. Vom mai reveni la figurile 1, 2, 3, cînd vom studia proprietăţile elementului $\{1,1\}$ din aceste spaţii (cap. IV, § 1).

Amintim şi următoarea consecinţă imediată a teoremei 3.1: *Pentru orice* $f \in E^*$, $f > \Phi$ *avem*

$$\|f\| = f(e).$$

Am folosit această proprietate în capitolul I, § 3, unde am observat cu ajutorul ei că, dacă $E \ni e$, atunci mulţimea H a tuturor funcţionalelor liniare pozitive cu norma 1 este slab închisă, precum şi în capitolul II, § 3, unde am observat cu

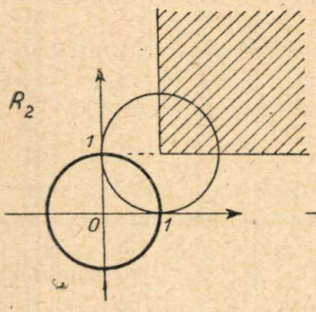


Fig. 1

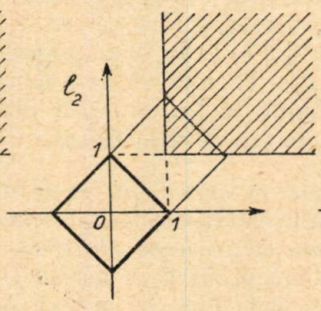


Fig. 2

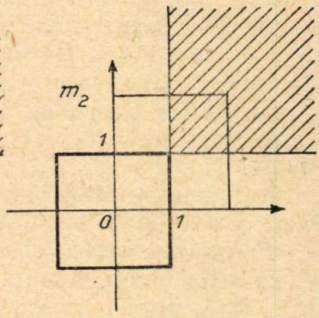


Fig. 3

ajutorul ei că dacă $E \ni e$, atunci Q este o mulţime p.t.n. Din această proprietate mai rezultă între altele că, dacă $E \ni e$, atunci spaţiul adjunct E^* este de tip L, adică

$$f_1, f_2 \geqslant \Phi \text{ implică } \|f_1 + f_2\| = \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Într-adevăr, $\|f_1 + f_2\| = (f_1 + f_2)(e) = f_1(e) + f_2(e) = \|f_1\| + \|f_2\|$. De altfel, cum am văzut (cap. I, § 3), această proprietate a spaţiului adjunct are loc nu numai pentru spaţiile cu element unitate, ci şi pentru orice spaţiu de tip M.

Să vedem acum care dintre spaţiile concrete conţin element unitate şi ce este elementul unitate în fiecare din ele.

L e m a 3.7. *Dacă* $E \ni e$, *atunci* E este *un spaţiu de tip* M.

Demonstraţie. Fie $E \ni e$, şi $\mathcal{F} \subset E^*$ o mulţime p.t.n. oarecare. Fie, mai departe, $x, y \in E$, $x > 0$, $y > 0$. Atunci pentru orice $f \in \mathcal{F}$ avem

$$f(x - \|x\| \cdot e) = f(x) - \|x\| \cdot f(e) = f(x) - \|x\| \leqslant 0,$$

de unde, mulţimea $\mathcal{F}$ fiind pozitiv totală, rezultă că

$$x \leqslant \|x\| . e.$$

La fel,

$$y \leqslant \|y\| . e.$$

Din aceste inegalităţi obţinem

$$x \leqslant \max(\|x\|, \|y\|) \cdot e,$$

$$y \leqslant \max(x\|, \|y\|) \cdot e,$$

deci, în baza definiției elementului sup (x, y),

$$\sup(x, y) \leqslant \max(\|x\|, \|y\|) \cdot e.$$

Folosind lema 3.3, monotonia normei și relația $\|e\| = 1$, rezultă că

$$\|\sup(x, y)\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|).$$

Comparînd această inegalitate cu inegalitatea (1.1), valabilă în orice *KB*-lineal, obținem (1.2), deci spațiul E este de tip M.

Lema 3.7 este demonstrată.

Spații de tip M care conțin element unitate sînt de exemplu $C(0,1)$, $M_0(0,1)$, $M(0,1)$, c, m și m_k. Se vede cu ușurință că în spațiile $C(0,1)$, $M_0(0,1)$, $M(0,1)$ elementul e este funcția $e(t) \equiv 1$ (respectiv $e(t) \equiv 1$ a.p.t.). În spațiile c și m elementul unitate este șirul staționar $e = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$, iar în spațiile m_k avem $e = \{1, 1, \ldots, 1\}$.

Reciproca lemei 3.7 *nu este adevărată*: nu orice spațiu de tip M conține element unitate. De exemplu, în spațiile $C([0,1]; t_0)$ $C([0,1]; t_0, t_0'; \lambda_0)$ nu există element unitate. În aceste exemple, funcția $e(t) \equiv 1$ nici nu aparține spațiului.

Dintre consecințele lemei 3.7. menționăm:

1) Din lema 3.7 și lema 1.7 rezultă că, *cu excepția spațiului* R_1, *spațiile de tip* L *nu conțin element unitate.* Deci, spațiile $V(0,1)$, $V([0,1]; 0)$, $L(0,1)$, l, l_k $(k > 1)$ nu conțin element unitate.

2) Din lema 3.7 și consecința lemei 1.8 rezultă că, *cu excepția spațiului* R_1, *KB-linealele cu spațiile adjuncte strict normate nu conțin element unitate.* Deci, spațiile $L^p(0,1)$, l^p $(p > 1)$, l_k^p $(p > 1, k > 1)$ nu conțin element unitate. De altfel, în baza criteriului de strict normare al lui M. G. Krein (a se vedea cap. I, § 3), este adevărată și următoarea propoziție mai generală: *Fie* E *un spațiu liniar normat oarecare, cu spațiul adjunct* E^* *strict normat,* $e \in E$ *un element cu* $\|e\| = 1$ *și* f_1, $f_2 \in E^*$ *două funcționale liniare cu* $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$. *Dacă* $f_1(e) = f_2(e) = 1$, *atunci* $f_1 = f_2$.

Lema 3.8. *Cu excepția spațiului* R_1, *în KB-linealele strict normate nu există element unitate.*

Demonstrație. Să presupunem că spațiul E conține element unitate e. Arătăm că spațiul E nu este strict normat. Spațiul E fiind (în baza lemei 3.7) de tip M, putem lua (în baza lemei 2.2) drept mulțime p.t.n. mulțimea $\mathfrak{F} = \mathcal{S}$. Fie $x \in E$, $x > 0$, $\|x\| = \|e\| = 1$, $x \neq e$. Atunci, în baza teoremei lui M. G. Krein și S. G. Krein (a se vedea cap. I, § 3), există o funcțională $f_0 \in \mathcal{S}$ astfel, încît $f_0(x) = \|x\| = 1$. Avem deci $f_0(x) = f_0(e) = 1 = \|f_0\|$ pentru $x \neq e$ cu $\|x\| = \|e\| = 1$. În baza criteriului de strict normare a lui M. G. Krein, rezultă că spațiul E nu este strict normat și lema 3.8 este demonstrată.

Am amintit lema 3.8 și în capitolul I, § 3, unde am afirmat-o sub următoarea formă: cu excepția spațiului R_1, spațiile care conțin element unitate nu sînt strict normate.

Vom mai reveni asupra problemei, care sînt spațiile cu element unitate, și în paragraful 3.

După cele precedente, este natural să introducem noțiunile de *funcțională liniară constantă și funcțională liniară unitate.* Prin funcțională liniară unitate vom înțelege elementul $\varepsilon \in E^*$ cu proprietatea că $\varepsilon(x) = 1$ pentru orice $x > 0$ cu $\|x\| = 1$. Observînd că mulțimea elementelor $x \in E$, $x > 0$ cu $\|x\| = 1$, considerate ca funcționale definite pe E^*, este p.t.n. în E^{**}, (deoarece dacă $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in E$, $x > 0$ cu $\|x\| = 1$, atunci $f > \Phi$) și că $\|\varepsilon\| = 1$, rezultă că funcționala liniară unitate este elementul unitate al spațiului adjunct E^*.

În baza lemei 3.7 avem

Lema 3.9. *Dacă printre funcționalele liniare definite pe un KB-lineal E există funcționala liniară unitate, atunci E este un spațiu de tip L.*

Într-adevăr, în acest caz E^* este de tip M, deci, în baza rezultatului lui S. Kakutani (cap. I, § 3), E^{**} este de tip L. Deoarece E este un subspațiu al lui E^{**} ([10], p. 350), rezultă că și E este de tip L, și lema 3.9 este demonstrată.

Spre deosebire de cazul lemei 3.7, *reciproca lemei 3.9 este de asemenea adevărată.* Într-adevăr, dacă E este un spațiu de tip L, atunci funcționala

$$\varepsilon(x) = \|x_+\| - \|x_-\|$$

este funcționala liniară unitate: faptul că $\varepsilon \in E^*$ rezultă cu ușurință din ipoteza că E este de tip L și, evident, $\varepsilon(x) = 1$ pentru orice $x > 0$ cu $\|x\| = 1$.

Așadar, elementul unitate al spațiului adjunct nu poate fi altceva decît funcționala $\varepsilon(x) = \|x_+\| - \|x_-\|$. De exemplu, pe $L(0,1)$ funcționala liniară unitate este $\varepsilon(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$, pe $V(0,1)$ și $V([0,1];0)$ funcționala liniară unitate este $\varepsilon(x) = x(1)$ etc.

Din lema 3.9 rezultă și următoarea propoziție: *Dacă spațiul E este de tip M, atunci spațiul E^{**} conține element unitate.* De aici obținem propoziția: *Dacă spațiul E este de tip M și este reflexiv, atunci el conține element unitate.* Reciproca acestei propoziții nu este adevărată: spațiul $C(0,1)$ conține element unitate (și prin urmare este de tip M), dar nu este reflexiv.

Din ultimele două propoziții, ținînd seama de consecința lemei 1.8 și de lema 3.8, rezultă următoarele consecințe amintite și în capitolul I, § 3: *Dacă spațiul E este de tip M, atunci spațiile E^*, E^{**}, ... nu sînt strict normate. Dacă spațiul E ($E \neq R_1$) este de tip M și este reflexiv, atunci el nu este strict normat.*

§ 2. Alte definiții ale noțiunii de element unitate

Dăm noțiunea de *element unitate în sensul lui Kakutani.* S. Kakutani [9] numește element unitate un element $e \in E$ care se bucură de proprietățile

$$\alpha)\ \|e\| = 1,\ \beta)\ \|x\| \leqslant 1 \text{ implică } x \leqslant e,\ \gamma)\ e > 0.$$

Avem, în primul rînd, două observații în legătură cu această definiție a lui S. Kakutani:

1) Condițiile $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ nu sînt independente: $\beta)$ implică $\gamma)$. Într-adevăr, fie $x \in E$, $x > 0$. Atunci $y = \dfrac{x}{\|x\|} > 0$, și, în baza lui $\beta)$, $y \leqslant e$. Deci $0 < y < e$, de unde $e > 0$.

2) Din condiția $\beta)$ a lui S. Kakutani rezultă, că

$$\|x\| \leqslant 1 \text{ implică } -e \leqslant x \leqslant e.$$

Într-adevăr, $\|x\| \leqslant 1$ implică $\|-x\| \leqslant 1$, ceea ce la rîndul ei implică $-x \leqslant e$, adică $x \geqslant -e$.

Să comparăm acum noțiunea de element unitate (în sensul nostru) cu noțiunea de element unitate în sensul lui Kakutani.

Teorema 3.2. *Elementul unitate în sensul lui Kakutani coincide cu elementul unitate în sensul nostru.*

Demonstrație. Să presupunem că $e \in E$ este element unitate în sensul lui Kakutani. Atunci, punînd $e - x = y$, din $\|y - e\| \leqslant 1$, adică din $\|x\| \leqslant 1$, rezultă $x \leqslant e$, adică $e - y \leqslant e$, de unde $y \geqslant 0$. Prin urmare, $\|y - e\| \leqslant 1$

implică $y \geqslant 0$. Ținînd seama și de condiția α) și aplicînd lema 3.6, rezultă că e este element unitate în sensul nostru.

Invers, dacă e este element unitate în sensul nostru, atunci punînd $e - x = y$, din $\|y\| \leqslant 1$, adică din $\|x - e\| \leqslant 1$, rezultă, în baza lemei 3.6, că $x \geqslant 0$, adică $e - y \geqslant 0$, de unde $y \leqslant e$. Prin urmare, $\|y\| \leqslant 1$ implică $y \leqslant e$, deci e este element unitate și în sensul lui Kakutani.

Teorema 3.2 este demonstrată.

O altă demonstrație a teoremei 3.2 se poate obține din observația de la teorema 3.1.

O b s e r v a ț i e. Deși definiția lui S. K a k u t a n i nu folosește spațiul adjunct, definiția 3.1 a elementului unitate este mai naturală, deoarece pornește de la generalizarea noțiunii de valoarea unei funcții într-un punct. Totodată, din același motiv, ea permite un studiu mai aprofundat al spațiilor cu element unitate.

Să vedem acum noțiunea de *element unitate în sensul lui Krein*. M. G. K r e i n și S. G. K r e i n ([12], [13]) numesc element unitate un element $e \in E$, $e > 0$, care se bucură de proprietatea că pentru orice $x \in E$, $x \neq 0$, mulțimea numerelor pozitive λ pentru care $-\lambda e < x < \lambda e$ este nevidă și are marginea inferioară > 0. Notînd $\|x\|_e = \inf\limits_{\substack{\lambda > 0 \\ -\lambda e < x < \lambda e}} \lambda$, se vede cu ușurință că $\|x\|_e$ satisface axiomele normei.

Condiția ca pentru orice $x \in E$ mulțimea $\Lambda(x) = \{\lambda \mid \lambda > 0, -\lambda e < x < \lambda e\}$ să fie nevidă este necesară pentru ca $\|x\|_e = \inf\limits_{\lambda \in \Lambda(x)} \lambda$ să aibă sens pentru fiecare $x \in E$, iar condiția ca pentru orice $x \neq 0$ să avem $\inf\limits_{\lambda \in \Lambda(x)} \lambda > 0$ este pusă pentru ca să avem asigurată îndeplinirea primei axiome a normei. Observăm că aceste două condiții ale lui K r e i n nu sînt independente, a doua fiind o consecință a primei. Într-adevăr, deoarece $\|x\|_e = \inf\limits_{\substack{\lambda > 0 \\ |x| \leqslant e}} \lambda$, rezultă că pentru orice $x \in E$ avem $|x| \leqslant \|x\|_e . e$, deci dacă $\|x\|_e = 0$, atunci $|x| = 0$ și prin urmare $\|x\|_e = 0$ implică $x = 0$. Rezultă că $\inf\limits_{\lambda \in \Lambda(x)} \lambda > 0$ pentru orice $x \neq 0$, ceea ce ne-am propus să arătăm.

Spre deosebire de elementul unitate în sensul nostru, dacă există un element unitate în sensul lui Krein $e \in E$, atunci există o infinitate de astfel de elemente și toate normele $\|x\|_e$ sînt topologic echivalente. Elementul e fiind fixat, notăm cu E_e spațiul liniar semiordonat E normat cu ajutorul lui $\|x\|_e$*). În general, norma inițială $\|x\|_E$ din spațiul E nu coincide cu norma $\|x\|_e$ «indusă» de elementul e, adică $E \neq E_e$. De exemplu, luînd $E = R_2$ și $e = \{1,1\}$, obținem $E_e = m_2$. Luînd $e = \{1,2\}$, obținem $\|x\|_e = \inf\limits_{\substack{\lambda > 0 \\ -\lambda e < x < \lambda e}} \lambda = \inf\limits_{\substack{\lambda > 0 \\ -\lambda < \xi_1 < \lambda \\ -2\lambda < \xi_2 < 2\lambda}} \lambda = \max\left(|\xi_1|, \frac{|\xi_2|}{2}\right)$. În ceea ce privește legătura dintre elementul unitate în sensul nostru și elementul unitate în sensul lui Krein, avem

T e o r e m a 3.3 *Elementul unitate în sensul nostru $e \in E$ este element unitate în sensul lui Krein și $E = E_e$. Invers, dacă $e \in E$ este element unitate în sensul lui Krein și $E = E_e$, atunci e este element unitate în sensul nostru.*

D e m o n s t r a ț i e. Fie $e \in E$ elementul unitate în sensul nostru. Dacă $\lambda > 0$, $-\lambda e < x < \lambda e$, atunci din $x < \lambda e$, $-x < \lambda e$ rezultă, în baza relației $|x| = \sup(x_1, -x)$ (cap. I, § 1), că $|x| \leqslant \lambda e$.

*) Așa-numitele K-spații de elemente mărginite ([10], pag. 212) sînt exemple de spații E_e; nu orice spațiu E_e este însă K-spațiu. Orice spațiu E_e poate fi considerat ca fiind un K-lineal de elemente mărginite și reciproc.

De aici, în baza relațiilor $\|e\| = 1$, $e > 0$ și a monotoni normei, obținem

$$\|x\| = \| \, |x| \, \| \leqslant \|\lambda e\| = \lambda \, \|e\| = \lambda,$$

și prin urmare

$$\|x\| \leqslant \inf_{\substack{\lambda>0 \\ -\lambda e < x < \lambda e}} \lambda = \|x\|_e.$$

Arătăm și inegalitatea opusă. Fie $\|x\| \leqslant \tau$. Atunci, e fiind în baza teoremei 3.2 element unitate și în sensul lui Kakutani, rezultă $-\tau e \leqslant x \leqslant \tau e$, deci $\|x\|_e = \inf_{\substack{\lambda>0 \\ -\lambda e < x < \lambda e}} \lambda \leqslant \tau$. Așadar, pentru orice $\tau > 0$, $\|x\| \leqslant \tau$ implică $\|x\|_e \leqslant \tau$, adică $\|x\|_e \leqslant \|x\|$. Rezultă că $\|x\| = \|x\|_e$, adică $E = E_e$ și prima afirmație este demonstrată.

Invers, fie acum e un element unitate în sensul lui Krein și fie $E = E_e$. Arătăm că e este element unitate în sensul lui Kakutani, de unde, în baza teoremei 3.2, va rezulta că e este element unitate și în sensul nostru. Avem $\|e\| = \|e\|_e = \inf_{\substack{\lambda>0 \\ -\lambda e < e < \lambda e}} \lambda = 1$ și implicația $\inf_{\substack{\lambda>0 \\ -\lambda e < x < \lambda e}} \lambda = \|x\|_e = \|x\| \leqslant 1 \rightarrow x \leqslant e$ este de asemenea evidentă.

Teorema 3.3. este demonstrată.

Din teorema 3.3 și lema 3.7 rezultă că toate spațiile E_e sînt de tip M. Prin urmare, spațiile care nu sînt de tip M nu pot fi spații E_e. Din teorema 3.3 nu rezultă însă că dacă spațiul E are unitate în sensul lui Krein, atunci el are unitate și în sensul nostru. Această afirmație nu este adevărată, după cum se vede din exemplul $E = R_2$. Condiția $E = E_e$ din partea a doua a teoremei 3.3 este esențială.

Deși există și în spații în care unitatea în sensul nostru nu există (de exemplu în $E = R_2$; bineînțeles $E \neq E_e$), totuși, nici unitate în sensul lui Krein nu există în orice spațiu. De exemplu, în $L(0,1)$, pentru funcția $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, mulțimea numerelor $\lambda > 0$, pentru care $-\lambda e < x < \lambda e$, este vidă pentru orice $e(t)$ mărginit, și funcție $e(t)$ nemărginită evident nu poate fi unitate în sensul lui Krein. Nici spațiul $V([0,1]; 0)$ nu conține unitate în sensul lui Krein. Avem

Teorema 3.3′. *Dacă spațiul E conține elemente strict pozitive, atunci el conține și element unitate în sensul lui Krein. Orice element strict pozitiv $e \in E$ este unitate în sensul lui Krein.*

Demonstrație. Fie $e \gg 0$. Să notăm pentru orice $x \in E$

$$\Lambda(x) = \{\lambda \mid \lambda > 0, \; -\lambda e < x < \lambda e\}.$$

Trebuie să arătăm că pentru orice $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, avem $\inf_{\lambda \in \Lambda(x)} \lambda \neq 0$. Deoarece $e \gg 0$, există un $\rho > 0$ astfel încît

$$\| x \| \leqslant \rho \text{ implică } |x| \leqslant e.$$

Fie x_0 un element oarecare din E. Atunci $\| x_0 \| = \lambda_0$, unde $\lambda_0 > 0$. Rezultă că $\left\| \frac{x_0}{\lambda_0} \right\| = \rho$, de unde $\left| \frac{x_0}{\lambda_0} \right| = \frac{|x_0|}{\lambda_0} \leqslant e$, adică $|x_0| \leqslant \lambda_0 e$ și, prin urmare, pentru orice $\lambda_1 > \lambda_0$ avem $\lambda_1 \in \Lambda(x_0)$. Așadar, pentru orice $x_0 \in E$, $\Lambda(x_0) \neq 0$.

Teorema este demonstrată*).

Inversa teoremei 3.3′ nu este adevărată. Putem afirma doar atît, că dacă $e \in E$ este un element unitate în sensul lui Krein, atunci $e \gg 0$ în sensul normei din E_e; de aici nu rezultă, în general, că $e \gg 0$ și în sensul normei din E.

În sfîrșit, o altă noțiune de element unitate, des utilizată în teoria spațiilor liniare semiordonate, a fost introdusă de H. Freudenthal [6]. Elementul unitate în sensul lui Freudenthal $u \in E$ este definit prin condiția

$$x > 0 \text{ implică } \inf(x, u) > 0.$$

Nici unitatea în sensul lui Freudenthal nu este univoc determinată: dacă în E există o unitate în sensul lui Freudenthal, atunci există o infinitate. Mai departe, din definiție rezultă, pentru orice unitate în sensul lui Freudenthal, că $u > 0$.

S. Kakutani a demonstrat [9] următoarea teoremă: *Elementul unitate în sensul lui Kakutani este element unitate în sensul lui Freudenthal, dar element unitate în sensul lui Freudenthal poate să existe chiar și atunci, cînd elementul unitate în sensul lui Kakutani nu există.* De exemplu, în spațiile $C([0,1]; 0)$ sau $C\left([0,1]; 0{,}1; \frac{1}{2}\right)$ există element unitate în sensul lui Freudenthal, dar nu există elementul unitate în sensul lui Kakutani. Acest fenomen este și normal, deoarece definiția lui H. Freudenthal folosește numai ordonarea, pe cînd definiția lui S. Kakutani folosește și norma. În baza teoremei 3.2 și a teoremei de mai sus a lui S. Kakutani, avem următoarea propoziție: *Elementul unitate în sensul nostru este element unitate în sensul lui Freudenthal, dar element unitate în sensul lui Freudenthal poate să existe chiar și atunci cînd elementul unitate în sensul nostru nu există.*

Mai departe, *unitatea în sensul lui Krein este în același timp și unitate în sensul lui Freudenthal.* Aceasta rezultă din teorema 3.3 și din propoziția de mai sus. *Reciproca nu este adevărată:* spațiile $L(0,1)$, $V([0,1]; 0)$ conțin element unitate în sensul lui Freudenthal, de exemplu $u(t) \equiv 1 \in L(0,1)$, respectiv $u(t) = t \in V([0,1]; 0)$, dar nu conțin unitate în sensul lui Krein.

După cum se știe, nici unitate în sensul lui Freudenthal nu există în orice spațiu. De exemplu, în spațiul $V(0,1)$ nu există unitate în sensul lui Freudenthal. S. Kakutani a construit [9] un exemplu de spațiu de tip M, care nu conține unitate în sensul lui Freudenthal.

Se pune problema, să găsim condiții pentru ca un element $u \in E$ să fie unitate în sensul lui Freudenthal. Am văzut că, condiția $u > 0$ este necesară. Ea nu este suficientă, după cum ne arată exemplul elementului $u = \{1,0\} \in m_2$: luînd $x = \{0,1\} > 0$ avem $\inf(x, u) = 0$. O condiție suficientă ne dă

Lema 3.10. *Dacă spațiul E conține elemente strict pozitive, orice element strict pozitiv este unitate în sensul lui Freudenthal.*

Afirmația rezultă imediat din teorema 3.3′ și din observația că orice element unitate în sensul lui Krein este element unitate și în sensul lui Freudenthal.

---

*) Condiția $e \geqslant 0$ înseamnă că mulțimea convexă închisă și centralsimetrică în raport cu 0, $P = \{x \mid |x| \leqslant e\}$, conține o vecinătate $\|x\| \leqslant \rho$ a originii, deci este un corp convex centralsimetric în raport cu originea. În acest caz norma $\|x\|_e = \inf_{\lambda \in \Lambda(x)} \lambda$ nu este altceva, decît funcționala minkowskiană a corpului convex P: $\|x\|_e = \inf_{\substack{\lambda > 0 \\ \frac{1}{\lambda} x \in P}} \lambda$, și corpul P este chiar sfera unitate a spațiului.

Condiția din lema 3.10 *nu este necesară.* De exemplu, o funcție continuă $x(t) \in C(0,1)$ care se anulează într-un singur punct $t_0 \in [0,1]$, este unitate în sensul lui Freudenthal a spațiului $C(0,1)$.

Se pune problema să găsim alte condiții, valabile și pentru spațiile care nu conțin elemente strict pozitive. Avem

Lema 3.11. *Fie E un spațiu de tip M. Pentru ca un element $u \in E$ să fie unitate în sensul lui Freudenthal, este suficient să avem $f(u) > 0$ pentru orice $f > \Phi$.*

Afirmația rezultă din teorema de reprezentare a lui M. G. Krein, S. G. Krein și S. Kakutani (a se vedea cap. I, § 3), ținînd seama de izomorfia structurală a reprezentării și de faptul că afirmația este evident adevărată pentru spațiul $C(Q)$.

În spațiile de tip M care conțin elemente strict pozitive, lema 3.11 rezultă din lema 3.10, în baza consecinței lemei 1.4. Pentru spațiile de tip M, care nu conțin elemente strict pozitive (de exemplu $C([0,1]; t_0)$ etc.), lema 3.11 se poate aplica cu succes, în timp ce lema 3.10 nu se poate aplica.

Să observăm că afirmația din lema 3.11 se menține și pentru unele spații fără elemente strict pozitive, care nu sînt de tip M*), de exemplu pentru spațiile $L(0,1)$, $L^p(0,1)$, l, l_k l^p l_k^p $(p > 1, k > 1)$. Mai mult, spre deosebire de lema 3.10, criteriul din lema 3.11 se poate aplica și la unele spații liniare semiordonate care nu sînt normabile (bineînțeles, precizînd ce înțelegem prin funcțională liniară)**), de exemplu la spațiul $S(0,1)$, al tuturor funcțiilor măsurabile pe $[0,1]$ (cu ordonarea obișnuită) și la spațiul s al tuturor șirurilor de numere reale (cu ordonarea obișnuită).

Din lema 3.11 rezultă că proprietatea este adevărată pentru orice KB-lineal E cu proprietatea că reprezentarea $x \longleftrightarrow X$ din teorema 2.1 a lui E în $C(\mathcal{T})$ este «structural izomorfă» (adică $\sup(x, y) \longleftrightarrow \sup(X, Y)$, deoarece spațiul $C(\mathcal{T})$ este de tip M. Pentru cazul general însă, problema rămîne deschisă.

Condiția din lema 3.11 *nu este necesară* pentru ca un element $u \in E$ să fie unitate în sensul lui Freudenthal. De exemplu o funcție continuă $x(t) \in C(0,1)$ care se anulează într-un singur punct $t_0 \in [0,1]$ este unitate în sensul lui Freudenthal a spațiului $C(0,1)$. Există însă spații în care condiția este necesară, de exemplu spațiile $M_0(0,1)$, $D_1(0,1)$. O condiție suficientă mai slabă ne dă următoarea propoziție, care rezultă cu același raționament ca lema 3.11: *Fie E un spațiu de tip M. Pentru ca un element $u \in E$ să fie unitate în sensul lui Freudenthal, este suficient să avem $f(u) > 0$ pentru orice $f \in H_0$, unde H_0 este o mulțime de funcționale (slab) densă în mulțimea H a tuturor funcționalelor liniare pozitive cu norma* 1. Condiția din această propoziție este necesară și în spațiul $C(0,1)$.

Legătura dintre diferitele noțiuni de element unitate este arătată în tabloul de la p. 125.

În cele ce urmează, prin «element unitate» vom înțelege elementul unitate în sensul nostru (adică în sensul definiției 3.1 sau 3.2).

---

*) De fapt, după cum se vede din demonstația lemei 3.11, pentru spațiile de tip M este suficient să presupunem că $f(u) > 0$ pentru orice $f \in \mathcal{S}$. Am enunțat criteriul sub forma din lema 3.11, tocmai pentru ca să fie aplicabil și la alte spații.

**) Ar fi interesant de văzut generalizarea proprietăților studiate în această lucrare pentru spații vectoriale topologice local convexe semiordonate. Aceasta se poate face considerînd în loc de $\|x\|$ funcționala $\sup_{d \in D} \|x\|_d$, unde D este sistemul dirijat asociat spațiului și $\|x\|_d$ sînt seminormele corespunzătoare.

§ 3. Proprietățile KB-linealelor cu element unitate

În *KB*-linealele care conțin element unitate, avem următoarea *teoremă de medie:*

T e o r e m a 3.4. *Fie* $\mathfrak{F} \subset E^*$ *o mulțime p.t.n. oarecare. Pentru orice* $x \in E$ *și orice funcțională liniară pozitivă* φ *cu norma* $\| \varphi \| = 1$, *avem*

$$\inf_{f \in \mathfrak{F}} f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \sup_{f \in \mathfrak{F}} f(x).$$

Demonstrație. În baza lemei 3.2 există un element constant $x_1 \in \mathfrak{K}$, astfel încît $x_1 \sim \sup_{f \in \mathfrak{F}} f(x)$. Avem $f(x_1 - x) \geqslant 0$ pentru orice $f \ni \mathfrak{F}$. de unde, mulțimea $\mathfrak{F}$ fiind pozitiv totală, $x_1 - x \geqslant \theta$ și prin urmare $\varphi(x_1) \geqslant \varphi(x)$ pentru orice funcțională liniară pozitivă cu $\| \varphi \| = 1$. Însă, în baza teoremei 3.1, $\varphi(x_1) = \sup_{f \in F} f(x)$, deci $\varphi(x) \leqslant \sup_{f \in F} f(x)$ pentru orice funcțională liniară pozitivă φ cu norma $\| \varphi \| = 1$. La fel se arată și inegalitatea $\inf_{f \in \mathfrak{F}} f(x) \leqslant \varphi(x)$.

Evident, teorema 3.1 poate fi obținută ca o consecință a teoremei 3.4.

Să vedem acum ce dă teorema 3.4 în diferitele KB-lineale particulare.

a) Pentru spațiul $C(0,1)$ să luăm $\mathfrak{F} = \{ f_\xi(x) = x(\xi) \}_{\xi \in [0,1]}$. Avem $\varphi(x) = \int_0^1 x(t)\, dg(t)$, $dg(t) \geqslant 0$, $\operatorname{var}_0^1 g(t) = g(1) = g(0) = 1$, deci teorema de medie 3.3 afirmă că

$$\inf_{\xi \in [0,1]} x(\xi) \leqslant \int_0^1 x(t)\, dg(t) < \sup_{\xi \in [0,1]} x(\xi), \quad (dg(t) \geqslant 0, \operatorname{var}_0^1 g(t) = 1),$$

ceea ce nu este altceva decît cunoscuta teoremă de medie pentru integrala Stieltjes.

b) Fie R un spațiu topologic normal și fie $C(R)$ spațiul tuturor funcțiilor reale mărginite și continue $x(p)$ definite pe R, cu norma $\| x \| = \sup_{p \in R} | x(p) |$. Atunci mulțimea de funcționale liniare $\mathfrak{F}_R = \{ f_{p_0}(x) = x(p_0) \}_{p_0 \in R} \subset [C(R)]^*$ este p.t.n. Ținînd seama de faptul că așa-numitele «valori medii» considerate de A. A. M a r k o v [17] nu sînt altceva în esență, decît funcționalele liniare pozitive cu norma 1, din teorema de medie 3.4 obținem următoarea teoremă a lui A. A. M a r k o v [17]: *Pentru orice funcție* $x(p) \in C(R)$ *și orice «valoare medie»* $\varphi \in [C(R)]^*$ avem $\inf_{p \in R} x(p) \leqslant \varphi(x) \leqslant \sup_{p \in R} x(p)$.

c) Pentru spațiul $M(0,1)$ vom lua $\mathfrak{F} = \left\{ f_E(x) = \frac{1}{mE} \int_0^1 x(t)\, \alpha_E(t)\, dt = \right.$

$\left. = \frac{1}{mE} \int_E x(t)\, dt \right\}$. Avem (a se vedea cap. I. § 2) $\varphi(x) = L \int_+ x\, d\alpha$, unde $\alpha(E)$ este o funcție de mulțimea măsurabilă $E \subset [0,1]$, pozitivă, mărginită și aditivă în sens restrîns, anulîndu-se o dată cu mE, și $\| \varphi \| = V_\alpha([0,1]) = 1$ (integrala este luată în sens Radon). Pentru orice astfel de funcție de mulțime $\alpha(E)$ și orice $x(t) \in M(0,1)$ avem deci, în baza teoremei de medie 3.4,

$$\inf_{\substack{E \subseteq [0,1] \\ mE > 0}} \frac{1}{mE} \int_E x(t)\, dt \leqslant L \int x\, d\alpha \leqslant \sup_{\substack{E \subseteq [0,1] \\ mE > 0}} \frac{1}{mE} \int_E x(t)\, dt, \tag{3.1}$$

ceea ce este un rezultat nou.

În particular, pentru orice $x(t) \in M(0,1)$ și orice $\alpha(t) \in L(0,1)$ cu $\alpha(t) \geqslant 0$ a.p.t., $\int_0^1 \alpha(t)\,dt = 1$, avem

$$\inf_{\substack{E \subseteq [0,1] \\ mE > 0}} \frac{1}{mE} \int_E x(t)\,dt \leqslant \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt \leqslant \sup_{\substack{E \subseteq [0,1] \\ mE > 0}} \frac{1}{mE} \int_E x(t)\,dt.$$

d) Pentru spațiul c, luînd $\mathfrak{F} = \{f_n(x) = \xi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ și ținînd seama de faptul că $\varphi(x) = c \lim_{n\infty} \xi_n + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_i$, $c, c_i \geqslant 0$, $c + \sum_{i=1}^{\infty} c_i = 1$, obținem din teorema 3.4

$$\inf_n \xi_n \leqslant c \lim_{n\to\infty} \xi_n + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_i \leqslant \sup_n \xi_n \quad (c, c_i \geqslant 0, \quad c + \sum_{i=1}^{\infty} c_i = 1),$$

ceea ce este o proprietate banală.

e) În spațiul m vom lua tot $\mathfrak{F} = \{f_n(x) = \xi_n\}_{n=1,2,\ldots}$. Avem $\varphi(x) = L\int x\,d\alpha$, unde $\alpha(E)$ este o funcție de mulțimea de numere naturale $E \subset \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$ = mulțimea tuturor numerelor naturale) pozitivă, mărginită și aditivă în sens restrîns, și $\|\varphi\| = V_\alpha(\mathfrak{N}) = 1$. Pentru orice astfel de funcție $\alpha(E)$ avem deci, în baza teoremei de medie 3.4,

$$\inf_n \xi_n \leqslant L\int x\,d\alpha \leqslant \sup_n \xi_n,$$

ceea ce este un rezultat nou. În particular, pentru elementele $x \in m$ convergente regăsim relația de la *c)*. De asemenea, pentru funcționala particulară $\varphi(x) = \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$ (unde Lim înseamnă limita lui Banach), relația $\inf_n \xi_n \leqslant \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \sup_n \xi_n$ ce se obține din teorema 3.4 este evidentă din $\lim_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \xi_n$.

În *KB*-linealele care nu conțin element unitate, teorema 3.4 poate să nu mai fie adevărată. Am văzut, de exemplu, că spațiul euclidian R_2 nu conține element unitate. Funcționala

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_2$$

este liniară pozitivă și $\|\varphi\| = 1$. Totuși,

$$\varphi(\{1,1\}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 1 = \max(\xi_1, \xi_2) = \sup_{f \in F} f(x),$$

$$\varphi(\{-1, 1\}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < -1 = \min.(\xi_1, \xi_2) = \inf_{f \in F} f(x),$$

deci în R_2 nu are loc teorema de medie.

Avem, mai departe

L e m a 3.12. *Fie* $e \in E$ *și fie* $\mathcal{F} \subset E^*$ *o mulțime p.t.n. Pentru ca funcționala* φ *definită pe* E *să aparțină mulțimii* H, *este necesar și suficient ca ea să fie aditivă și să avem* $\varphi(x) \leqslant \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x)$ *pentru orice* $x \in E$.

Într-adevăr, necesitatea primei condiții este evidentă și necesitatea celeilalte condiții rezultă imediat din teorema 3.4. Invers, presupunînd condițiile îndeplinite, rezultă

$$-\varphi(x) = \varphi(-x) \leqslant \sup_{f \in \mathcal{F}} f(-x) = -\inf_{f \in \mathcal{F}} f(x) \text{ pentru orice } x \in E,$$

adică

$$\inf_{f \in \mathcal{F}} f(x) \leqslant \varphi(x) \text{ pentru orice } x \in E,$$

de unde $\varphi \in H$ rezultă cu ușurință. Lema 3.12 este demonstrată.

Am văzut în demonstrația teoremei 3.4 că pentru orice $x \in E$ avem $x - [\inf_{f \in \mathcal{F}} f(x)]\, e \geqslant 0$. Utilizînd acest fapt, demonstrăm

L e m a 3.13. *Dacă* $E \ni e$, $\varphi_1, \varphi_2 \in H$, $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$, *atunci* $\varphi_1 = \varphi_2$.

Demonstrație. Fie $x \in E$ și $\mathcal{F} \subset E^*$ o mulțime p.t.n. oarecare. Atunci, $\mathcal{F}$ fiind o mulțime p.t.n., $x - [\inf_{f \in \mathcal{F}} f(x)]\, e \geqslant 0$. Prin urmare, în baza ipotezei $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$, avem

$$\varphi_1(x - [\inf_{f \in \mathcal{F}} f(x)]\, e) \leqslant \varphi_2(x - [\inf_{f \in \mathcal{F}} f(x)]\, e) \text{ pentru orice } x \in E,$$

de unde, în baza ipotezei $\varphi_1, \varphi_2, \in H$ și a teoremei 3.1, rezultă că

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \text{ pentru } \textit{orice } x \in E.$$

În particular, punînd $-x$ în loc de x, obținem $\varphi_1(-x) \leqslant \varphi_2(-x)$, adică

$$\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \text{ pentru orice } x \in E.$$

Confruntînd cele două inegalități, rezultă $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ pentru orice $x \in E$, de unde $\varphi_1 = \varphi_2$.

Lema 3.13 este demonstrată.

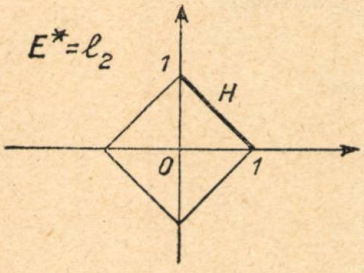


Fig. 4

Geometric lema 3.13 exprimă faptul că, dacă $E \ni e$, atunci pe porțiunea pozitivă a suprafeței sferei unitate a spațiului adjunct nu există elemente comparabile. De exemplu, pentru $E = m_2$ avem $E^* = l_2$, și pe figura 4 se vede că H (H = segmentul care unește punctele $\{1,0\}, \{0,1\} \in l_2$) nu conține elemente comparabile.

Trecem acum la alte proprietăți. Să observăm că avem

L e m a 3.14. *Fie* E *un KB-lineal* **oarecare** *și* $x \in E$. *Dacă* $f_1(x) = a > 0$ *și* $f_2(x) = b < 0$, *unde* $f_1 > \Phi$, $f_2 > \Phi$, $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$, atunci există o *funcțională* $f > \Phi$ *cu* $\|f\| = 1$, *astfel încît* $f(x) = 0$.

Demonstrație.

$$f = \frac{f_1 - \frac{a}{b} f_2}{\|f_1 - \frac{a}{b} f_2\|}.$$

Observație. În cazul particular cînd $f_1\, f_2 \in \mathcal{F}$, unde $\mathcal{F} \subset E^*$ este o mulțime p.t.n. oarecare, nu putem afirma întotdeauna că $f \in \mathcal{F}$. De exemplu, în spațiul m_2 în mod sigur $f \notin \mathcal{F}$, dacă luăm $\mathcal{F} = \{f_n(x) = \xi_n\}_{n=1,2}$. Pe de altă parte, luînd de exemplu $E = C(0,1)$ și $\mathcal{F} = \{f_\xi(x) = x(\xi)\}_{\xi \in [0,1]}$, există și un $f \in \mathcal{F}$, astfel încît $f(x) = 0$.

Cu ajutorul lemei 3.14 putem demonstra pentru spațiile cu element unitate

Teorema 3.5. *Fie E un KB-lineal cu element unitate și $x \in E$. Dacă $f_1(x) = a$, $f_2(x) = b$, unde $f_1 > \Phi$, $f_2 > \Phi$, $\| f_1 \| = \| f_2 \| = 1$, și dacă $a < c < b$, atunci există o funcțională $f > \Phi$ cu $\| f \| = 1$, astfel încît $f(x) = c$.*

Demonstrație. Fie $x_1 \in \mathcal{K}$, $x_1 \sim c$, $y = x - x_1$. Atunci $f_1(y) = a - c < 0$, $f_2(y) = b - c > 0$, deci, în baza lemei 3.11, există un $f > \Phi$ cu $\| f \| = 1$, astfel încît $f(y) = 0$, adică $f(x) = f(x_1) = c$, ceea ce era de demonstrat.

Pentru cazul particular $f_1 \in \mathcal{F}$, $f_2 \in \mathcal{F}$ este valabilă aceeași observație ca la lema 3.14.

Este fundamentală

Teorema 3.6. *Dacă $E \ni e$, atunci pentru orice element $x \in E$ avem*

$$\| x \| = \sup_{f \in \mathcal{F}} | f(x) |, \tag{3.2}$$

unde $\mathcal{F} \subset E^*$ este o mulțime p.t.n. oarecare.

Demonstrație. Fie $x \in E$, $x \geqslant 0$, $x_1 \sim \sup_{f \in \mathcal{F}} | f(x) |$. Atunci, pentru orice funcțională liniară pozitivă φ cu norma $\| \varphi \| = 1$, avem $\varphi(x_1) = \sup_{f \in \mathcal{F}} | f(x) |$ și, afară de aceasta,

$$\| x_1 \| = \sup_{f \in \mathcal{F}} | f(x) \leqslant \sup_{\substack{\| f \| \leqslant 1 \\ f > \Phi}} | f(x) | = \| x \|. \tag{3.3}$$

În particular, pentru orice $\varphi \in \mathcal{F}$ avem

$$\varphi(x_1 - x) = \varphi(x_1) - \varphi(x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} | f(x) | = \varphi(x) \geqslant 0,$$

de unde, mulțimea $\mathcal{F}$ fiind pozitiv-totală, $x_1 - x \geqslant 0$, adică

$$x_1 \geqslant x.$$

Însă, x fiind $\geqslant 0$, avem $x = | x |$, $x_1 = | x_1 |$, deci

$$| x_1 | \geqslant | x |,$$

și, prin urmare, în baza monotoniei normei,

$$\| x_1 \| \geqslant \| x \|.$$

Confruntînd această inegalitate cu (3.3), obținem

$$\| x \| = \| x_1 \| = \sup_{f \in \mathcal{F}} | f(x) |$$

și am demonstrat astfel relația (3.2) pentru elementele $\geqslant 0$.

Arătăm acum că pentru orice $x \in E$, $M = \max \left(\sup_{f \in \mathcal{F}} f(x_+), \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x_-) \right) = \sup_{f \in F} | f(x) |$. Deoarece $x_+ \geqslant x$, $x_- \geqslant -x$, avem $f(x_+) \geqslant f(x)$ și $f(x_-) \geqslant -f(x)$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, deci $M \geqslant \sup_{f \in \mathcal{F}} | f(x) |$. Să presupunem — prin absurd — că

$M > \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|$. Atunci există un $f_1 \in \mathcal{F}$ pentru care sau $f_1(x_+) > \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|$, sau $f_1(x_-) > \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|$. Să presupunem primul caz; în al doilea, raționamentul este analog. Fie $x_1 \in \mathfrak{R}$, $x_1 \sim \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|$. Atunci

$$x_1 \geqslant x, \; x_1 \geqslant 0, \text{ deci } x_1 \geqslant x_+;$$

pe de altă parte, din $f_1(x_+) > \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} |f(x)| = f_1(x_1)$ rezultă că

$$x_+ \text{ nu este } \leqslant x_1.$$

Am ajuns la o contradicție. Rezultă că $M = \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|$, ceea ce este tocmai relația căutată.

Acum teorema rezultă ușor. Într-adevăr, în baza celor demonstrate,

$$\| x \| = \max (\| x_+ \|, \| x_- \|) = \max (\sup_{f \in F} f(x_+), \sup_{f \in F} f(x_-)) = \sup_{f \in F} |f(x)|,$$

ceea ce era de demonstrat.

De exemplu, pentru $E = M(0,1)$ regăsim relația

$$\operatorname{ad} \max_{[0,1]} |x(t)| = \sup_{\substack{E \subset [0,1] \\ mE > 0}} \frac{1}{mE} \left| \int_E x(t)\, dt \right|. \tag{3.4}$$

Pentru funcțiile continue avem și relația

$$\max_{[0,1]} |x(t)| = \sup_{\substack{\xi < \eta \\ \xi, \eta \in [0,1]}} \frac{1}{\eta - \xi} \left| \int_\xi^\eta x(t)\, dt \right|,$$

care rezultă și direct din teorema de medie.

Teorema 3.6 exprimă că dacă $E \ni e$, atunci reprezentarea $x \longleftrightarrow X$ din teorema 2.1 a *KB*-linealului E în spațiul $C(\mathcal{F})$ este izometrică, *oricare ar fi* mulțimea p.t.n. $\mathcal{F} \subset E^*$. Ținînd seama de lema 3.7, se vede că în cazul particular cînd $\mathcal{F} = Q$ (am văzut în capitolul II, § 2 că, în spațiile cu element unitate, Q este întotdeauna o mulțime p.t.n.), afirmația rezultă din teorema de reprezentare a lui Krein și Kakutani. Teorema 3.6., fiind valabilă pentru orice mulțime p.t.n. $\mathcal{F}$, este mai generală. Pentru a vedea importanța teoremei 3.6 este destul să ne reamintim avantajele mulțimilor p.t.n. față de mulțimea Q (a se vedea cap. II, § 3). Pe de altă parte, după cum am amintit, rămîne deschisă problema dacă din ipoteza mai slabă că spațiul este de tip M, rezultă sau nu relația (3.2).

Să observăm că dacă $E \not\ni e$, atunci relația (3.2) poate să nu mai fie adevărată. Să luăm de exemplu spațiul R_2 și $\mathcal{F} = \{f_n(x) = \xi_n\}_{n=1,2}$. Atunci pentru elementul $x = \{1, 1\} \in R_2$ avem

$$\| x \| = \sqrt{2} \text{ și } \sup_{f \in F} |f(x)| = 1.$$

Cu alte cuvinte, în acest caz, reprezentarea $x \longleftrightarrow X$ nu este izometrică.

Am văzut că în orice *KB*-lineal E avem

$$\max (\|x_+\|, \| x_- \|) \leqslant \| x \|$$

și

$$\sup_{f \in F} |f(x)| \leqslant \| x \|$$

În ceea ce privește compararea cantităților din membrii stîngi, din cele precedente rezultă că pentru orice KB-lineal E avem

$$\sup_{f\in F} |f(x)| \leqslant \max\left(\sup_{f\in F} f(x_+), \sup_{f\in F} f(x) \leqslant \max\left(\|x_+\|, \|x_-\|\right)\right). \tag{3.5}$$

În sfîrșit, mai amintim că, după cum vom vedea în § 4, relația $\max\left(\sup_{f\in F} f(x_+), \sup_{f\in F} f(x) = \sup_{f\in F} |f(x)|\right.$ este adevărată și în spații mai generale, în așa-numitele spații cu cvasiconstante.

În § 1 am căutat să vedem, care sînt spațiile cu element unitate, bineînțeles dintre spațiile mai frecvente. Cu ajutorul teoremei 3.6, putem completa rezultatele din § 1 cu următoarea propoziție: *Dacă E este un spațiu de șiruri în care $\|f_n\| = 1$ $n = 1, 2, \ldots$ $(f_n(x) = \xi_n,\ n = 1, 2, \ldots)$ și $E \ni e$, atunci sau $E = m$, sau E este un subspațiu al lui m. Dacă E este de dimensiune $k\ (< \infty)$, $\|f_n\| = 1$, $n = 1, 2, \ldots, k$ și $E \ni e$, atunci $E = m_k$. Dacă $E \ni e$ este un spațiu de funcții definite pe intervalul $[0,1]$, în care $\|f_\xi\| = 1\ (f_\xi(x) = x(\xi),\ \xi \in [0,1])$, atunci sau $E = M_0(0,1)$ sau E este un subspațiu al lui $M_0\ (0, 1)$.*

Într-adevăr, pentru orice spațiu de șiruri, $\mathfrak{F}_N = \{f_n(x) = \xi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ este o mulțime pozitiv-totală și prin ipoteză normată și m este cel mai mare spațiu de șiruri în care $\sup_{f\in\mathfrak{F}_N} |f(x)| = \sup_n |\xi_n|$ există pentru orice $x = \{\xi_i\}$. A doua afirmație rezultă imediat din teorema 3.6 și afirmația a treia rezultă la fel ca prima afirmație.

Dacă E este un spațiu de clase de funcții echivalente definite a.p.t. pe intervalul $[0, 1]$ și $E \ni e$, atunci problema rămîne deschisă. Am văzut că, în spațiul $M(0, 1)$, $\sup_{f\in\mathfrak{F}} |f(x)|$ există întotdeauna și este egal cu $\|x\| = \operatorname{ad}\max_{[0,1]} |x(t)|$. Nu știm însă, dacă și reciproc din faptul că E este de tip M, $E \ni e$ și pentru orice $x \in E$ $\sup_{f\in\mathfrak{F}} |f(x)| < \infty$, unde $\mathfrak{F}$ este o mulțime p.t.n. de funcționale liniare definite pe $M\ (0,1)$ $\left(\text{de exemplu } \mathfrak{F} = \left\{f_E(x) = \frac{1}{mE}\int_E x(t)\,dt\right\}_{E\subseteq[0,1],\ mE>0}\right)$, rezultă oare că $E = M$ și $\sup_{f\in\mathfrak{F}} |f(x)| = \operatorname{ad}\max_{[0,1]} |x(t)|$. Aceasta rămîne de văzut.

Evident, concluziile din propoziția de mai sus sînt adevărate nu numai pentru spațiile de tip M care conțin element unitate, ci și pentru orice spațiu de tip M pentru care reprezentarea din teorema 2.1 este izometrică (de exemplu pentru $C\left([0, 1,]; t_0\right)$, $C\left([0,\ 1];\ 0{,}1;\ \frac{1}{2}\right)$ etc.). Nu știm însă dacă în propoziția de mai sus ipoteza $E \ni e$ poate fi înlocuită cu ipoteza mai slabă că VE este de tip M.

În completare la lema 3.4 dăm

L e m a 3.15. *Dacă $E \ni e$, atunci*

$$e = \inf_{\|x-u\|\leqslant 1 \to x\geqslant 0} u\ ^*. \tag{3.6}$$

În capitolul IV vom demonstra o propoziție mai generală (lema 4.6) din care aceasta rezultă ca un caz particular.

Putem să considerăm că în cele ce preced am atașat fiecărui element $x \in E$ trei mulțimi de numere, sau trei mulțimi de puncte de pe dreapta numerelor,

$$M_1 = \{(fx)\}_{f\in\mathfrak{F}},\quad M_2 = \{f(x)\}_{f\in H} \text{ și } M_3 = \{f(x)\}_{f\in S_+^*}.$$

* Prin $\to$ notăm implicația.

Pentru orice $x \in E$ avem evident $M_1 \subset M_2 \subset M_3$. Mulțimile M_1, M_2, M_3 *sînt mărginite* pentru orice $x \in E$, deoarece $|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| \leqslant \|x\|$. Pentru elementele $\geqslant 0$, M_1, M_2, M_3 sînt mulțimi de numere nenegative. Invers, dacă pentru un $x \in E$ una dintre mulțimile M_1, M_2, sau M_3 este formată numai din numere nenegative, atunci $x \geqslant 0$.

Pentru spațiile E care conțin element unitate, teoremele din acest paragraf ne permit să stabilim cîteva proprietăți ale mulțimilor M_1, M_2 și M_3. Din definiția 3.1 rezultă că *pentru elementele constante mulțimea* M_1 *se reduce la un singur punct* pe dreapta numerelor. *Inversa acestei propoziții nu este adevărată*, după cum ne arată exemplul spațiului R_2, dacă luăm $\mathcal{F} = \{f_n(x) = \xi_n\}_{n=1,2}$.

Din teorema 3.1 rezultă că *pentru elementele constante și mulțimea* M_2 *se reduce la un punct*. Reciproca teoremei 3.1 ne arată că *dacă pentru un* $x \in E$ *mulțimea* M_2 *se reduce la un singur punct, atunci* $x \in \mathcal{K}$. În sfîrșit, este evident că mulțimea M_3 se reduce la un singur punct dacă și numai dacă $x = 0$.

Teorema 3.5 ne arată că, *dacă* $E \ni e$, *atunci pentru orice* $x \in E$ *mulțimea* M_2 *este un interval* (care se reduce la un singur punct atunci și numai atunci cînd $x \in \mathcal{K}$). După cum rezultă din teorema 3.4 capetele intervalului M_2 coincid cu capetele mulțimii M_1, (adică cu $\sup M_1$ și $\inf M_1$). Dacă notăm

$$|M_1| = \{|f(x)|\}_{f \in \mathcal{F}}, \quad |M_2| = \{|f(x)|\}_{f \in H}, \quad |M_3| = \{|f(x)|\}_{f \in S_+^*},$$

atunci teorema 3.6 exprimă că $\sup |M_1| = \sup |M_2| = \sup |M_3|$. De aici rezultă că *una dintre capetele mulțimii* M_3 *coincide cu un capăt al mulțimii* M_1 și, prin urmare, *și cu un capăt al mulțimii* M_2. Se vede cu ușurință că *celălalt capăt în general nu coincide*. De exemplu, dacă $x \in \mathcal{K}$, $x > 0$, atunci coincid capetele de sus și nu coincid capetele de jos, iar dacă $x \in \mathcal{K}$, $x < 0$, atunci coincid capetele de jos și nu coincid capetele de sus ($f(-e) = -\|f\| \geqslant -1$). După cum se știe (a se vedea observația de la lema 1.1), dacă E este un KB-lineal oarecare și $x \in E$, $x > \Phi$, atunci există o funcțională $f > \Phi$ cu $\|f\| = 1$ astfel încît $f(x) = \|x\|$. Rezultă că *în orice* KB *— lineal mulțimea* M_3 *își conține cel puțin unul dintre capete*. Mai mult, ținînd seama de teorema 3.7, rezultă că *dacă* $E \ni e$, *atunci intervalul* M_2 *este cel puțin semiînchis*.

CAPITOLUL IV

SPAȚII CU ELEMENT CVASIUNITATE

§ 1. Elemente cvasiconstante. Element cvasiunitate

Unele dintre proprietățile spațiilor cu element unitate sînt valabile și în spații mai generale, în așa-numitele spații cu element cvasiunitate. Introducem această noțiune prin

Definiția 4.1. *Spunem că elementul* $x \in E$ *este un element cvasiconstant, corespunzător numărului real* K *relativ la mulțimea* p.t.n. $\overset{\mathcal{F}}{\sim} \subset E^*$. *(notăm* $x \overset{\mathcal{F}}{\sim} K$*). dacă avem*

$$f(x) = K \text{ pentru orice } f \in \mathcal{F}.$$

În particular, numim element cvasiunitate relativ la mulțimea $\mathcal{F}$ *orice element* $\overset{\mathcal{F}}{\sim} 1^*)$.

Din definiția 4.1 se vede că 0 este element cvasiconstant $\underset{\mathfrak{F}}{\sim}0$ relativ la orice mulțime p.t.n. $\mathfrak{F} \cup E^*$. Tot din definiția 4.1 se vede că dacă elementul $e \in E$ este element cvasiunitate al spațiului E relativ la două mulțimi $\mathfrak{F}_1$ și $\mathfrak{F}_2$, atunci el este element cvasiunitate și relativ la reuniunea lor $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$, care este de asemenea o mulțime p.t.n. Considerînd deci reuniunea $\mathfrak{F}$ a tuturor mulțimilor p.t.n. relativ la care un element dat $e \in E$ este cvasiunitate, se pot întîmpla următoarele trei cazuri: *a)* Mulțimea $\mathfrak{F}$ este vidă. În acest caz elementul e nu este element cvasiunitate relativ la nici o mulțime p.t.n. $\mathfrak{F} \subset E^*$; *b)* Mulțimea $\mathfrak{F}$ nu este vidă și nu coincide cu mulțimea tuturor funcționalelor liniare pozitive cu norma 1. In acest caz elementul e este element cvasiunitate relativ la mulțimea $\mathfrak{F}$ și nu este element unitate; *c)* Mulțimea $\mathfrak{F}$ coincide cu mulțimea tuturor funcționalelor liniare pozitive cu norma 1. Atunci elementul e este element cvasiunitate relativ la orice mulțime p.t.n., deci este în același timp elementul unitate al spațiului E.

Cu ajutorul mulțimilor M_1 și M_2 considerate în capitolul III, § 3, cele trei cazuri posibile se exprimă astfel: Pentru elementul $e \in E$ *a)* mulțimea M_1 nu se reduce la punctul 1; *b)* mulțimea M_1 se reduce la punctul 1 dar mulțimea M_2 nu se reduce la acest punct; *c)* mulțimea M_2, deci și mulțimea M_1 se reduc la același punct 1.

Vedem deci că noțiunea de cvasiconstantă este mai generală decît noțiunea de constantă: orice constantă este și cvasiconstantă, dar nu orice cvasiconstantă este constantă. Constantele pot fi considerate drept cvasiconstante relativ la mulțimea tuturor funcționalelor liniare pozitive cu norma 1.

Pentru ca un element cvasiunitate să fie element unitate, este necesar și suficient ca el să aibă norma 1.

Spații care nu conțin element cvasiunitate relativ la nici o mulțime p.t.n. $\mathfrak{F} \subset E^*$ sînt de exemplu $L^p(0,1)$, l^p, $(p > 1)$, $C[0,1]$; $t_0)$, $L(0,1)$, l, $V([0,1];0)$, $V(0,1)$. Spații care conțin element cvasiunitate dar nu conțin element unitate sînt de exemplu spațiile R_n și, mai general, l_n^p $(p \geqq 1)$.

Am văzut că unitatea în sensul nostru este în același timp și cvasiunitate, dar cvasiunitatea nu este întotdeauna unitate în sensul nostru. Această propoziție este valabilă și pentru unitatea în sensul lui Kakutani, ea fiind în baza teoremei 3.2 echivalentă cu unitatea în sensul nostru. Rezultă, de asemenea, în baza teoremei 3.3, că unitatea în sensul lui Krein este cvasiunitate pentru spațiul E_e, relativ la orice mulțime p.t.n. $\mathfrak{F} \subset E_e^*$. Mai departe, unitatea în sensul lui Krein poate să fie în același timp cvasiunitate și pentru spațiul E, cînd $E \neq E_e$. Aceasta are loc de exemplu în $E = R_2$ pentru $e = \{1,1\}$ $(E_e = m_2)$ și $\mathfrak{F} = \{f_n(x) = \xi_n\}_{n=1,2,}$ și nu are loc de exemplu în spațiul $C\left([0,1]; 0,1; \frac{1}{2}\right)$. În sfîrșit, unitatea în sensul lui Freudenthal este mai generală decît cvasiunitatea, ea putînd să existe și atunci, cînd cvasiunitate nu există. Acesta are loc de exemplu în spațiul $L(0,1)$. Ceva mai tîrziu vom vedea că cvasiunitatea este întotdeauna unitate

*) Și alți autori folosesc termenul «cvasiunitate», dar în alt sens. De exemplu, în [21], B. Z. Vulih înțelege prin element cvasiunitate o noțiune legată de unitatea în sensul lui Freudenthal: notînd cu $u \in E$ o unitate în sensul lui Freudenthal, el numește element cvasiunitate orice element $e \in E$ cu proprietatea că $\inf(e, u - e) = 0$. În [10] autorii numesc *unitate* orice element unitate în sensul lui Freudenthal și *element unitate* orice cvasiunitate în sensul lui Vulih [21]. Nu ne ocupăm de loc cu cvasiunitatea în sensul lui Vulih.

în sensul lui Krein, deci și unitate în sensul lui Freudenthal. Ca și pentru spațiile cu element unitate, avem

L e m a 4.1. *k fiind un număr real oarecare fix, dacă există în E un element cvasiconstant* $\overset{\mathcal{F}}{\sim} K$, *atunci el este unic.*

Afirmația rezultă imediat din lema 2.1.

L e m a 4.2. *Un spațiu care conține elementul cvasiunitate e relativ la o mulțime p.t.n.* $\mathcal{F} \subset E^*$, *conține toate cvasiconstantele relativ la* $\mathcal{F}$, *adică pentru orice* K *real există un element cvasiconstant* $\overset{\mathcal{F}}{\sim} K$; *acest element este elementul* Ke.

Într-adevăr, din faptul că $f(e) = 1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, rezultă că $f(Ke) = Kf(e) = K$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, deci $Ke \overset{\mathcal{F}}{\sim} K$ (evident, $Ke \in E$).

Se vede, la fel, că un spațiu care conține un element cvasiconstant oarecare $\neq 0$ conține toate cvasiconstantele. Prin urmare, pentru ca un spațiu să conțină toate cvasiconstantele, este necesar și suficient să conțină cvasiconstanta e, sau o altă cvasiconstantă oarecare $\neq 0$.

În baza lemei 2.1, din definiția 4.1 rezultă că $e > 0$. Din acest fapt și din lema 4.2 rezultă că orice element cvasiconstant $\neq 0$ este sau > 0, sau < 0, adică subspațiul tuturor elementelor cvasiconstante relativ la o mulțime $\mathcal{F}$ este total ordonat.

În ceea ce privește norma cvasiunității e, avem

$$\| e \| = \sup_{\substack{\| f \| \leqslant 1 \\ f \geqslant \varphi}} | f(e) | \geqslant \sup_{f \in \mathcal{F}} | f(e) | = 1. \tag{4.1}$$

Egalitatea are loc atunci și numai atunci cînd e este elementul unitate al spațiului E.

Lema 4.1 ne arată că în orice spațiu există cel mult un element cvasiunitate relativ la o mulțime p.t.n. *dată* $\mathcal{F} \subset E^*$: $e_1 \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$, $e_2 \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$ implică $e_1 = e_2$. Se pune problema dacă într-un spațiu pot să existe două elemente cvasiunitate distincte, fiecare fiind cvasiunitate relativ la o altă mulțime p.t.n., adică, dacă este posibil să avem $e_1 \overset{\mathcal{F}_1}{\sim} 1$, $e_2 \overset{\mathcal{F}_2}{\sim} 1$, $e_1 \neq e_2$. Răspunsul este negativ: $e_1 \overset{\mathcal{F}_1}{\sim} 1$, $e_2 \overset{\mathcal{F}_2}{\sim} 1$ implică $e_1 = e_2$, adică în fiecare spațiu există cel mult un singur element cvasiunitate. Pentru a stabili acest rezultat, să observăm că avem următoarele proprietăți:

L e m a 4.3. *Dacă* $e \in E$, $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$, *atunci*

$$\| x - e \| \leqslant 1 \text{ implică } x \geqslant 0.$$

Demonstrația acestei leme este aceeași ca și cea a lemei 3.4.

La fel ca la spațiile cu unitate, dacă $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$, atunci $\| x - e \| \leqslant 1$ implică și $x \leqslant 2e$. De asemenea, $\| x - e \| < 1$ implică $0 \ll x \ll 2e$ și $\| x \| \leqslant 1$ implică $-e \leqslant x \leqslant e$. În sfîrșit, *dacă* $e \in E$, $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$, *atunci* $e \gg 0$; prin urmare, pentru ca spațiul E să conțină elemente cvasiconstante, este necesar ca el să conțină elemente strict pozitive. Totodată, în baza teoremei 3,3′, rezultă că cvasiunitatea este o unitate în sensul lui Krein, deci și unitate în sensul lui Freudenthal.

Se pune problema, dacă este adevărată reciproca lemei 4.3, adică dacă nu cumva din condiția $u \in E$, $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$, rezultă faptul că u este

element cvasiunitate al spațiului E relativ la o mulțime p.t.n. $\mathcal{F} \subset E^*$. Dacă răspunsul la această problemă ar fi afirmativ, atunci am obține o definiție a noțiunii de cvasiunitate, care nu utilizează spațiul adjunct E^*. În baza lemei 1.4 însă, este plauzibil că răspunsul la problema de mai sus este negativ. Într-adevăr, iată un exemplu. Elementul $e = \{1, 2\} \in m_2$ satisface condiția că $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$, dar nu există nici o mulțime p.t.n. $\mathcal{F} \subset m_2^*$ astfel încît să avem $f(e) = 1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$.

Cum am văzut, din lema 4.3 rezultă că, dacă spațiul E conține element cvasiunitate relativ la o mulțime p.t.n. $\mathcal{F} \subset E^*$, atunci spațiul E conține elemente strict pozitive. Se pune problema dacă este adevărată reciproca acestei afirmații, adică dacă nu cumva din ipoteza că spațiul E conține elemente strict pozitive, rezultă că spațiul E conține element cvasiunitate. Am mai amintit în legătură cu unitatea în sensul lui Krein, că răspunsul la această problemă este negativ, după cum se vede din exemplul spațiului $C\left([0,1]; 0,1; \frac{1}{2}\right)$.

Lema 4.4. *Dacă un element $u \in E$ se bucură de proprietatea că $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$, atunci pentru orice $f \geqslant \Phi$ avem*

$$f(u) \geqslant \| f \| .$$

Dacă spațiul E conține elemente strict pozitive, și $f(u) \geqslant \| f \|$ pentru orice $f \geqslant \Phi$ atunci $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$. Această lemă este un caz particular al lemei 1.4. Totuși, datorită importanței ei pentru cele ce urmează, am enunțat-o separat.

Consecință. *Dacă un element $u \in E$ se bucură de proprietatea că $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$, atunci avem $\| u \| \geqslant 1$.* Mai mult, pentru orice $f > \Phi$ cu $\|f\| = 1$ avem $\| u \| \geqslant f(u) \geqslant 1$.

Într-adevăr, din prima propoziție a lemei 4.4 rezultă că dacă $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$, atunci $f(u) \geqslant 1$ pentru orice $f > \Phi$ cu $\| f \| = 1$.

Amintim că, în baza definiției elementelor strict pozitive, rezultă și $u \gg 0$.

În particular, dacă $e \in E$, $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$, atunci în baza lemei 4.3 rezultă și

$$\| e \| \geqslant f(e) \geqslant 1 \text{ pentru orice } f > \Phi \text{ cu } \| f \| = 1 ,$$

ceea ce este o completare a relației (4.1).

Geometric, consecința de mai sus a lemei 4.4 se poate interpreta astfel: mulțimea elementelor $u \in E$, care satisfac condiția că $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$, nu are puncte comune cu interiorul sferei unitare. În particular, pentru spațiile R_2, l_2 și m_2, porțiunile haşurate din figurile 1,2, și 3 nu au puncte comune cu interiorul sferei unitate.

În ceea ce privește proprietățile elementului $\{1,1\}$, în figurile 1, 2, și 3 constatăm mai mult, și anume că $\{1,1\}$ este cel mai mic element care satisface condiția că $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$. Această proprietate este adevărată nu numai pentru KB-linealele R_2, l_2 și m_2. Avem, mai general:

Lema 4.5. *Dacă $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$ și $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$, atunci $u \geqslant e$. Invers, dacă $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$ și $u \geqslant e$, atunci $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$.*

Demonstrație. Să presupunem că $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$ și $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$. În baza lemei 4.4 avem $f(u) \geqslant \| f \|$ pentru orice $f \geqslant \Phi$. În particular, $f(u) \geqslant 1$

pentru orice $f \in \mathcal{F}$, deci $f(u) \geqslant f(e)$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$. Mulțimea $\mathcal{F}$ fiind pozitiv-totală, rezultă că $u \geqslant e$. Invers, să presupunem că $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$ și $u \geqslant e$. Atunci $f(u) \geqslant f(e) = 1$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, adică $f(u) - 1 \geqslant 0$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$. Fie acum $\| x - u \| \leqslant 1$. Atunci $f(u) - f(x) \leqslant |f(u) - f(x)| \leqslant 1$ pentru orice $f \geqslant \Phi$ cu $\| f \| \leqslant 1$, deci în particular și pentru orice $f \in \mathcal{F}$, adică $f(u) - 1 \leqslant f(x)$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$. Așadar, pentru orice $f \in \mathcal{F}$ avem

$$0 \leqslant f(u) - 1 \leqslant f(x),$$

deci, mulțimea $\mathcal{F}$ fiind pozitiv-totală, $x \geqslant 0$. Prin urmare, $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$.

Lema 4.5 este demonstrată.

În baza monotoniei normei, din lema 4.5 rezultă următoarea

C o n s e c i n ț ă. *Dacă* $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$ și $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$, *atunci*, $\| u \| \geqslant \| e \|$.

Inversa acestei propoziții, și anume propoziția că dacă $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$ și $\| u \| \geqslant \| e \|$. atunci $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$, *nu mai este adevărată*, după cum se vede imediat din figurile 1, 2, și 3.

L e m a 4.6. *Dacă spațiul* E *conține element cvasiunitate* $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$, *atunci există* $\inf_{\| x-u \| \leqslant 1 \to x \geqslant 0} u$, *și*

$$e = \inf_{\| x-u \| \leqslant 1 \to x \geqslant 0} u. \tag{4,2}$$

Demonstrație. Fie $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$. Să notăm cu $\mathcal{U}$ mulțimea acelor elemente $u \in E$ care satisfac condiția că $\| x - u \| \leqslant 1$ implică $x \geqslant 0$: $\mathcal{U} = \{ u \mid \| x - u \| \leqslant 1 \to x \geqslant 0 \}$. Atunci în baza lemei 4.5, $\mathcal{U} = \{ u \mid u \geqslant e \}$, deci $e \leqslant u$ pentru toți $u \in \mathcal{U}$.

Trebuie să mai arătăm că inegalitățile $z \leqslant u$ pentru orice $u \in \mathcal{U}$ implică $z \leqslant e$. Aceasta însă rezultă imediat din constatarea precedentă și din faptul că în baza lemei 4.3 avem $e \in \mathcal{U}$.

Lema 4.6 este demonstrată.

Relația (4.2) este adevărată și în cazul particular cînd e este elementul unitate al spațiului E. Această propoziție am enunțat-o separat în capitolul III, § 3 (lema 3.15).

Mai departe, se pune problema dacă este adevărată următoarea afirmație, oarecum reciprocă celei din lema 4.6: *Dacă există* $\inf \mathcal{U}$, *atunci spațiul* E *conține element cvasiunitate* $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$ *relativ la o mulțime p.t.n.* $\mathcal{F} \subset E^*$, *și deci* $e = \inf U$. Această afirmație este echivalentă cu următoarea: Dacă există $\inf \mathcal{U}$, atunci mulțimea $\mathcal{F}$ a tuturor funcționalelor $f \in E^*$ cu proprietățile $\| f \| = 1$, $f(\inf \mathcal{U}) = 1$, este o mulțime p.t.n.

Problema, dacă aceste afirmații sînd adevărate sau nu, rămîne deschisă.

O b s e r v a ț i e. Am văzut în capitolul III că dacă $e \in E$, $e \sim 1$, atunci $e = \sup_{\| x \| \leqslant 1} x$ (a se vedea observația de la teorema 3.1) și $e = \inf \mathcal{U}$. (lema 3.15).

Demonstrăm acum următoarea propoziție: *Dacă într-un KB-lineal* E *există* $\sup_{\| x \| \leqslant 1} x$, *atunci există și* $\inf \mathcal{U}$ *și avem* $\sup_{\| x \| \leqslant 1} x = \inf \mathcal{U}$. Într-adevăr, să notăm

$\sigma = \{ x \mid \| x \| \leqslant 1 \}$, $\mathcal{U} = \{ u \mid \| x - u \| \leqslant 1 \to x \geqslant 0 \} = \{ u \mid \| x \| \leqslant 1 \to x \leqslant u \}$

$= \{u \mid x \in \sigma \to x \leqslant u\}$. Dacă $x \in \sigma$, atunci $x \leqslant \sup \sigma$, deci $\sup \sigma \in \mathfrak{U}$. Arătăm că pentru orice $u \in \mathfrak{U}$ avem $u \geqslant \sup \sigma$ şi cu aceasta propoziţia va fi demonstrată. Însă $u \in \mathfrak{U}$ înseamnă că $x \leqslant u$ pentru orice $x \in \sigma$, de unde, evident, $\sup \sigma \leqslant u$, ceea ce era de arătat. Din această propoziţie, în baza lemei 4.6, rezultă şi următoarea

consecinţă: *Dacă* $e \in E$, $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$, *şi există* $\sup_{\|x\| \leqslant 1} x$ *atunci* $e = \sup_{\|x\| \leqslant 1} x$.

Pentru ca membrul drept al relaţiei (4.2), *adică* $\inf \mathfrak{U}$ *să existe, este necesar ca mulţimea* $\mathfrak{U}$ *să nu fie vidă* (această condiţie nu este suficientă, deoarece, de exemplu, în spaţiul $C\left([0,1]; 0,1; \frac{1}{2}\right)$ mulţimea $\mathfrak{U}$ nu este vidă şi totuşi $\inf \mathfrak{U}$ nu există). Se pune problema, în ce condiţii mulţimea $\mathfrak{U}$ nu este vidă. *Mulţimea* $\mathfrak{U}$ *nu este vidă atunci şi numai atunci cînd spaţiul* E *conţine elemente strict pozitive.* Într-adevăr, să presupunem că, pentru un $u \in E$, $\| x - u \| \leqslant \rho$ implică $x \geqslant 0$. Dacă $\rho \geqslant 1$ atunci $u \in \mathfrak{U}$, deci mulţimea $\mathfrak{U}$ nu este vidă. Fie $\rho < 1$. Atunci $\| x - \frac{1}{\rho} u \| \leqslant 1$, adică $\| \rho x - u \| \leqslant \rho$ implică $\rho x > 0$, deci $x > 0$ şi prin urmare $\frac{1}{\rho} u \in \mathfrak{U}$. Invers, dacă mulţimea $\mathfrak{U}$ nu este vidă, atunci spaţiul E conţine evident elemente strict pozitive, deoarece orice element al mulţimii $\mathfrak{U}$ este strict pozitiv.

Cu ajutorul lemei 4.6 putem da răspuns afirmativ la problema pe care ne-am propus-o la începutul acestui paragraf, anume la problema unicităţii elementului cvasiunitate. Avem

Teorema 4.1. *Dacă* $\mathcal{F}_1 \subset E^*$, $\mathcal{F}_2 \subset E^*$, *sînt două mulţimi p.t.n., şi* $e_1 \overset{\mathcal{F}_2}{\sim} 1$, $e_2 \overset{\mathcal{F}_1}{\sim} 1$, *atunci* $e_1 = e_2$.

Demonstraţie. În baza lemei 4.6 avem

$$e_1 = \inf \mathfrak{U},$$
$$e_2 = \inf \mathfrak{U},$$

de unde $e_1 = e_2$. Teorema 4.1 este demonstrată.

Aşadar, dacă un KB-lineal E conţine element cvasiunitate, atunci el conţine un singur element cvasiunitate. *Pentru un* KB*-lineal* E *dat, elementul cvasiunitate nu depinde de mulţimea p.t.n.* $\mathcal{F} \subset E^*$ *relativ la care el este cvasiunitate.* Anume, în orice KB-lineal E element cvasiunitate poate fi numai elementul $\inf \mathfrak{U}$.

Să arătăm acum cîteva proprietăţi ale KB-linealelor cu element cvasiunitate. Am văzut în capitolul III, § 3 că, de exemplu, teoremele 3.4 şi 3.6 nu sînt valabile pentru R_2, deci nu sînt valabile, în general, pentru spaţii cu cvasiunitate*. Unele proprietăţi ale spaţiilor cu element unitate rămîn însă adevărate şi pentru spaţii cu cvasiunitate.

După cum am amintit în capitolul III, § 3, relaţia

$$\max \left(\sup_{f \in \mathcal{G}} f(x_+), \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x_-) \right) = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|$$

este adevărată şi pentru orice KB-lineal E care conţine element cvasiunitate relativ la mulţimea $\mathcal{F}$, deoarece demonstraţia ei nu utilizează nici $\| e \|$, nici $\| x \|$.

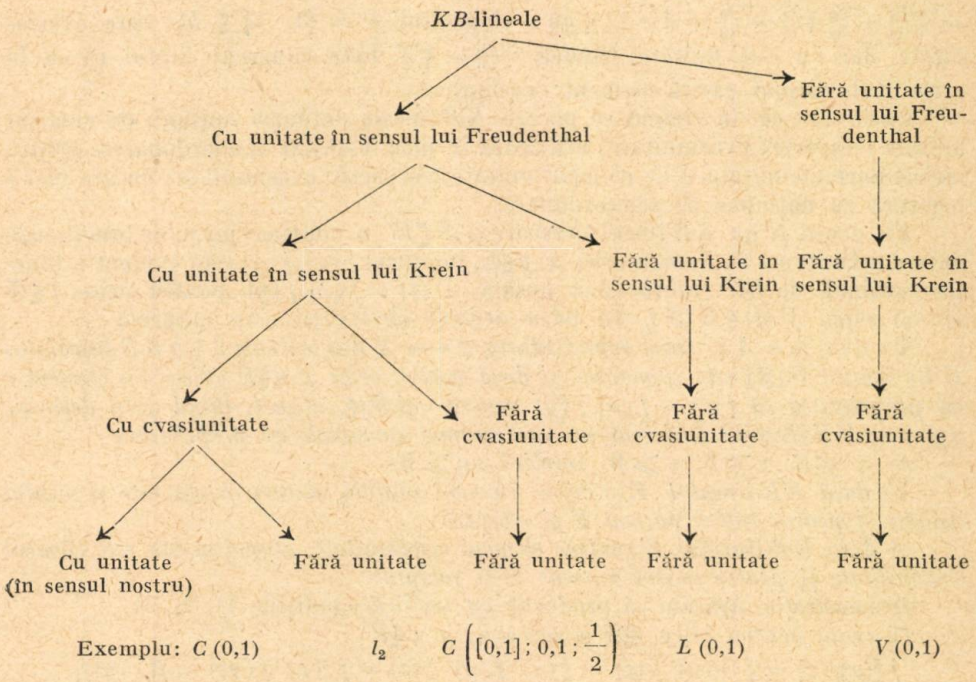
*) Mai mult, în nici un KB-lineal cu cvasiunitate dar fără unitate nu poate avea loc teorema de medie 3.4, deoarece în caz contrar ar rezulta că elementul cvasiunitate este chiar elementul unitate al spaţiului.

O altă proprietate importantă a spațiilor cu element unitate, care, după cum se vede cu ușurință, rămîne adevărată și pentru spațiile cu element cvasiunitate, este teorema 3.5. Cu alte cuvinte, aceasta înseamnă că și pentru spațiile cu cvasiunitate, mulțimea M_2 din § 3, pentru orice $x \in E$, este un interval. Capetele acestui interval nu mai coincid însă cu capetele mulțimii M_1, ca în cazul spațiilor cu element unitate, ci intervalul M_2 conține capetele mulțimii M_1. De asemenea, se poate întîmpla ca *nici unul* din capetele mulțimilor M_3 și M_1 să nu coincidă. De exemplu, în R_2 luînd $x = \{1, 1\}$ și $\mathfrak{F} = \{f_n(x) = \xi_n\}_{n=1,2}$, avem $\sup\limits_{f \in F} f(x) = 1 < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} =$

$$= \sup_{\substack{\|f\| \leqslant 1 \\ f \geqslant \Phi}} f(x), \quad \inf_{f \in \mathfrak{F}} f(x) = 1 > 0 = \inf_{\substack{\|f\| \leqslant 1 \\ f > \Phi}} f(x).$$

Problema dacă teorema 3.5 este adevărată numai pentru *KB*-linealele cu element cvasiunitate, sau este adevărată și pentru alte *KB*-lineale, rămîne deschisă.

În baza celor de pînă acum putem da următoarea clasificare a *KB*-linealelor:



§ 2. Legătura cu teoria inelelor normate

Definiția noastră (3.1 *sau* 3.2) *a elementului unitate (respectiv definiția* 4.2 *a elementului cvasiunitate) nu folosește noțiunea de înmulțire a elementelor* și este valabilă pentru *KB*-lineale oarecari. După cum se știe, și pentru inelele normate există noțiunea de element unitate (respectiv cvasiunitate). În acest paragraf ne propunem să arătăm legătura dintre cele două noțiuni de element unitate (respectiv cvasiunitate).

Reamintim că un spaţiu liniar normat E se numeşte *inel normat*, dacă pentru elementele lui este definită o operaţie de «înmulţire» satisfăcînd următoarele condiţii:

1) $(xy)z = x(yz)$;

2) $x(\lambda y + \mu z) = (\lambda x)y + (\mu x)z$;

$(\lambda y + \mu z)x = (\lambda y)x + (\mu z)x$; ($\lambda$, μ scalari reali)

3) $\| xy \| \leqslant \| x \| . \| y \|$.

Evident, în orice inel normat avem $0x = x0 = 0$ pentru orice $x \in E$.

Elementul $e \in E$ se numeşte *element unitate* al inelului normat E, dacă $xe = ex = x$ pentru orice $x \in E$ şi $\| e \| = 1$. Vom numi elementul eE *cvasiunitate**) al inelului normat E, dacă $xe = ex = x$ pentru orice $x \in E$. În acest caz, $\| x \| = \| xe \| \leqslant \| x \| . \| e \|$, deci $\| e \| > 1$. După cum se ştie, elementul cvasiunitate (deci cu atît mai mult elementul unitate) *este unic* (dacă există.) *Evident, elementul unitate este în acelaşi timp şi cvasiunitate, dar nu şi invers.* De exemplu, spaţiul R_2 este un inel normat relativ la înmulţirea obişnuită: $xy = \{\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2\}$ (unde $x = \{\xi_1, \xi_2\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2\}$ (fiindcă $\| xy \| = \sqrt{\xi_1^2\eta_1^2 + \xi_2^2\eta_2^2} \leqslant \sqrt{\xi_1^2\eta_1^2 + \xi_2^2\mu_2^2 + \eta_1^2\xi_2^2 + \mu_2^2\xi_1^2} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} = \| x \| . \| y \|$; elementul $e = \{1, 1\} \in R_2$ este cvasiunitate, dar nu este unitate, fiindcă $\| e \| = \sqrt{2}$. Este cunoscut faptul că nu în orice inel normat există element cvasiunitate.

Observăm că, în timpul ce pentru KB-lineale definiţia noţiunii de element unitate (respectiv cvasiunitate) utilizează în mod esenţial semiordonarea, pentru inelele normate noţiunea de element unitate (respectiv cvasiunitate) nu are nici o legătură cu noţiunea de semiordonare.

Fie acum E un KB-lineal oarecare şi $\mathfrak{F} \subset E^*$ o mulţime p.t.n. de funcţionale liniare definite pe E. Pentru orice $x, y \in E$, produsul $f(x).f(y)$ este evident o funcţie continuă de $f \in \mathfrak{F}$, adică dacă notăm $V(f) = f(x).f(y)$ pentru orice $f \in \mathfrak{F}$ atunci avem $V(f) \in C(\mathfrak{F})$. În baza acestei observaţii este naturală

T e o r e m a 4.2. *Dacă reprezentarea $x \longleftrightarrow X$ din teorema 2.1 a KB-linealului E în spaţiul $C(\mathfrak{F})$ este izometrică şi dacă pentru orice $x, y \in E$ există un element v cu proprietatea că $f(v) = f(x).f(y)$ pentru toţi $\mathfrak{F} f \in$, atunci, luînd prin definiţie $xy = v$, KB-linealul E devine un inel normat comutativ cu proprietăţile:*

a) *$x, y \in E$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ implică $xy \geqslant 0$;*

b) *dacă KB-linealul E conţine element unitate, atunci acesta este elementul unitate şi pentru inelul normat E şi reciproc;*

c) *dacă KB-linealul E conţine element cvasiunitate, atunci acesta este element cvasiunitate şi pentru inelul normat E şi reciproc.*

Demonstraţie. Arătăm că produsul xy verifică condiţiile 1), 2), 3):

1) avem pentru orice $f \in \mathfrak{F}$ şi orice $x, y, z \in E$

$$f[(xy)z] = f(xy)\,f(z) = f(x)\,f(y)\,f(z) = f(x)\,f(yz) = f[x(yz)],$$

de unde

$$(xy)z = x(yz);$$

2) avem pentru orice $f \in \mathfrak{F}$ şi orice $x, y, z \in E$

$$f[x(\lambda y + \mu z)] = f(x)\,f(\lambda y + \mu z) = f(x)[\lambda f(y) + \mu f(z)] = f(\lambda x)\,f(y) + f(\mu x)\,f(z) = f[(\lambda x)y] + f[(\eta x)z] = f[(\lambda x)y + (\mu x)z],$$

*) Unii autori numesc element unitate ceea ce noi numim element cvasiunitate. Socotim că este utilă repararea cazului cînd $\| e \| = 1$. De altfel, denumirile noastre sînt justificate şi de legătura cu teoria KB—linealelor (a se vedea teorema 4.2).

de unde

$$x(\lambda y + \mu z) = (\lambda x)\, y + (\mu x)\, z\,.$$

La fel se demonstrează și relația

$$(\lambda\, y + \mu z)\, x = (\lambda y)\, x + (\mu z)\, x;$$

3) Avem pentru orice $x,\ y \in E$

$$\sup_{f\in\mathfrak{F}} |f(xy)| = \sup_{f\in\mathfrak{F}} |f(x) f(y)| \leqslant \sup_{f\in\mathfrak{F}} |f(x)| \sup_{f\in\mathfrak{F}} |f(y)|,$$

de unde, în baza izometriei corespondenței $x \longleftrightarrow X$, rezultă

$$\| xy \| \leqslant \| x \| . \| y \|.$$

Inelul normat E este comutativ, deoarece pentru orice $x.\ y \in E$ și orice $f \in \mathfrak{F}$ avem

$$f(xy) = f(x) f(y) = f(y) f(x) = f(yx).$$

Mai departe, dacă $x, y \in E$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, atunci $f(xy) = f(x) f(y) \geqslant 0$ pentru orice $f \in \mathfrak{F}$ și, prin urmare, mulțimea $\mathfrak{F}$ fiind pozitiv totală, $xy \geqslant 0$.

În sfîrșit, dacă e este elementul cvasiunitate al KB-linealului E, atunci pentru orice $f \in \mathfrak{F}$ și orice $x \in E$ avem $f(xe) = f(x)$, de unde, mulțimea $\mathfrak{F}$ fiind totală, $xe = x$ pentru orice $x \in E$ și în mod analog $ex = x$ pentru orice $x \in E$. Prin urmare, e este elementul cvasiunitate și pentru inelul normat E. Reciproc, dacă e este elementul cvasiunitate al inelului normat E, atunci $xe = x$ pentru orice $x \in E$, deci $f(x) f(e) = f(xe) = f(x)$ pentru orice $x \in E$ și orice $f \in \mathfrak{F}$, de unde $f(e) = 1$ pentru orice $f \in \mathfrak{F}$ și, prin urmare, $e \in \mathfrak{F}_1$. De aici, ținînd seama de faptul că atît în KB-lineale, cît și în inele normate, unitatea nu este altceva decît cvasiunitate cu norma 1, rezultă și proprietatea *b*).

Teorema 4.2 este demonstrată.

În particular, dacă E conține element unitate în sensul lui Krein $e \in E$ și $E = E_e$ este complet în sensul convergenței în norma $\|x\|_e$, atunci, luînd $\overline{\mathfrak{F}} = Q$, regăsim o teoremă a lui M. G. Krein și S. G. Krein [12].

Condiția ca reprezentarea $x \longleftrightarrow X$ să fie izometrică nu este necesară pentru ca E să poată fi organizat ca inel normat comutativ cu metoda din teorema 4.2. De exemplu, să considerăm spațiul R_2 și $\mathfrak{F} = \{f_n(x) = \xi_n\}_{n=1,2}$. Avem pentru orice $x \in R_2$ $X(f) = \begin{cases} \xi_1, & f = f_1 \\ \xi_2, & f = f_2 \end{cases}$ și $\| X \|_{C(\mathfrak{F})} = \sup_{f\in\mathfrak{F}} |X(f)| = \max(|\xi_1|, |\xi_2|) \leqslant$ $\leqslant \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = \| x \|$, deci reprezentarea $x \longleftrightarrow X$ nu este izometrică. Totuși, definind ca în teorema 4.2, $v = xy = \{\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2\}$ $(x = \{\xi_1, \xi_2\},\ y = \{\eta_1\ \eta_2\})$, KB-linealul $E = R_2$ devine, cum am văzut la începutul acestui paragraf, un inel normat comutativ (fără unitate).

Bineînțeles, produsul a două elemente oarecare ale unui KB-lineal E poate fi definit și cu alte metode decît cea folosită în teorema 4.2. De exemplu, chiar și în spațiul $C(0,1)$ putem da alte definiții ale produsului. După cum au arătat J. G. Mikusinski și Cz. Ryll-Nardzewski [18], definind produsul prin $xy = \int_0^t x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$, spațiul $C(0,1)$ devine un inel comutativ

fără unitate. Se vede cu ușurință că, definind astfel produsul, spațiul $C(0,1)$ devine chiar inel normat. Într-adevăr, pentru orice $t \in [0,1]$ fix avem

$$\left|\int_0^t x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau\right| \leqslant t. \max_{\tau\in[0,t]} |x(t-\tau)\, y(\tau)| \leqslant \max_{\tau\in[0,t]} |x(t-\tau)\, y(\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\tau\in[0,t]} |x(t-\tau)| \max_{\tau\in[0,t]} |y(\tau)| = \max_{\tau\in[0,t]} |x(\tau)| \max_{\tau\in[0,t]} |y(\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\tau\in[0,1[} |x(t)| 1 \max_{\tau\in[0,1]} |y(t)| = \|x\|.\|y\|,$$

de unde $\|xy\| \leqslant \|x\|.\|y\|$. Produsul xy păstrează pozitivitatea factorilor: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ implică $xy \geqslant 0$.

Prin aceasta avem totodată un exemplu de *KB-lineal cu element unitate organizat ca un inel normat comutativ fără element unitate.* Se pune problema dacă este posibilă situația inversă, adică dacă există un *inel normat cu element unitate, care este în același timp un KB-lineal fără element unitate.* Răspunsul este afirmativ. Iată un exemplu. Fie $E = R_2$, fie $x = \{\xi_1, \xi_2\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2\} \in E$ și fie $xy = \{\xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1\}$. Atunci $\|yx\| = \|x\|.\|y\|$ pentru orice $x, y \in E$, deci E este un inel normat comutativ. Elementul $e = \{1,0\}$ este element unitate al acestui inel normat E, dar nu este unitate (și nici chiar cvasiunitate) a KB-linealului E.

Pe de altă parte însă, produsul astfel definit în KB-linealul $E = R_2$ nu păstrează ordonarea: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ nu implică $xy \geqslant 0$. Rămîne de văzut, dacă există un exemplu de inel normat cu elemente unitate, care este în același timp un KB-lineal fără element unitate, produsul din inelul normat păstrînd ordonarea din KB-lineal.

К ТЕОРИИ *KB*-ЛИНЕАЛОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Основное понятие работы, введенное автором, следующее: *Пусть E какой-либо KB-линеал. Будем говорить, что множество $\mathfrak{F}$ линейных функционалов, определенных на E, является* положительно тотальным, *если, при любом $x \in E$, из соотношений $f(x) \geqslant 0$ для всех $f \in \mathfrak{F}$ вытекает, что $x \geqslant 0$* (определение 2.1). Любое положительно тотальное множество является тотальным (лемма 2.1); обратное утверждение не верно. Положительно тотальные множества линейных функционалов с нормой 1 будем называть *нормированными положительно тотальными множествами* (короче н. п. т. множествами).

Пусть E — любой KB-линеал, $\mathfrak{F} \subset E^*$ — любое н. п. т. множество и $C(\mathfrak{F})$ — пространство всех действительных непрерывных функций, определенных на $\mathfrak{F}$, с нормой $\|X\| = \sup_{f\in\mathfrak{F}} |X(f)|$. *Существует изоморфное линейное отображение пространства E в пространстве* $C(\mathfrak{F})$ (теорема 2.1). Вообще это отображение не изометрично; устанавливаются необходимые и достаточные условия, для того чтобы оно было изометричным.

Сравнивая множества $\mathcal{S}$ (= множеству «элементарных» функционалов с нормой 1), Q (= слабому замыканию $\mathcal{S}$), и T (=множеству крайних

точек множества $\{f \| f\| \leqslant 1, f \geqslant \Phi\}$), определенные М. Крейном, С. Крейном [12], [13] и С. Какутани [9] с н. п. т. множествами, введенными автором, показываем следующие преимущества н. п. т. множеств: 1) множество $\mathcal{S}$ и Q имеют значение только для пространства типа M [9], [13]. Их свойства, изученные Крейном и Какутани, справедливы для пространств типа M, но не сохраняются для любого KB-линеала; более того, существуют KB-линеалы, на которых множества $\mathcal{S}$ и Q пустые. Напротив, н. п. т. множества сохраняют свое значение для любого KB-линеала. На любом KB-линеале существуют нетривиальные непустые н. п. т. множества, например:

на $C(0,1)$: $\mathfrak{F}_{[0,1]} = \{f_\xi(x) = x(\xi)\}_{\xi \in [0,1]}$, $\mathfrak{F}_{\mathcal{J}} = \{g_{\xi,\eta}(x) = \frac{1}{\eta - \xi}\int\limits_{\xi}^{\eta} x(t)dt\}_{\substack{\xi<\eta \\ \xi,\eta\in[0,1]}}$;

на $V(0,1)$: $\mathfrak{F}_V = \{f_0(x) = x(0),\ f_{\xi,\eta}(x) = x(\eta) - x(\xi)\}_{\substack{\xi<\eta \\ \xi,\eta\in[0,1]}}$;

на $M(0,1)$: $\mathfrak{F}_{\mathcal{J}} = \{f_E(x) = \frac{1}{mE}\int\limits_E x(t)\,dt\}_{\substack{E\subset[0,1] \\ mE>0}}$;

на $L^p(0,1)$ $(p \geqslant 1)$: $\mathfrak{F}_{\mathcal{J}_p} = \left\{f_E(x) = \frac{1}{(mE)^{\frac{1}{q}}}\int\limits_E x(t)\,dt\right\}_{\substack{E\subset[0,1] \\ mE>0}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$;

на пространствах последовательностей: $\mathfrak{F}_N = \{f_n(x) = \xi_n\}_{n=1,2,\ldots}$

2) даже для некоторых часто встречающихся KB-линеалах типа M, например для $M(0,1)$, неизвестны элементы множеств $\mathcal{S}$, Q. и Т. Напротив, конкретные н. п. т. множества могут быть даны на любом KB-линеале. 3) результаты, получаемые относительно н. п. т. множеств, справедливы в частности и для множества $\mathcal{S}$, определенного на KB-линеалах типа M, так как если пространство E является пространством типа M, то $\mathcal{S}$ есть н. п. т. множество, а также для множества Т, определенного на любом KB-линеале, так как Т есть н. п. т. множество. 4) Н. п. т. множества дают более подходящее обобщение понятия значения функции в одной точке, чем множества S, Q и Т.

На основании этого обобщения понятия значения функции в точке, автор дает определение 2.1: *Будем говорить, что элемент* $x \in E$ *есть* постоянный элемент, *соответствующий действительному числу* K *(обозначаем* $x \sim K$*), если имеем* $f(x) = K$ *для любого* $f \in \mathfrak{F}$ и $\|x\| = |K|$. *Назовем любой элемент* ~ 1 единицей *пространства* E *и обозначим его через* e. Второе условие этого определения независимо от первого.

Если K любое фиксированное действительное число, и в E существует постоянный элемент $\sim K$, то оно является единственным (лемма 3.1). Пространство, содержащее постоянную e (или какой-либо другой постоянный элемент $\neq \theta$), содержит все постоянные, а именно $Ke \sim K$ (лемма 3.2). Элемент $\sim K$ не зависит от исходного н. п. т. множества $\mathfrak{F}$: *Если* $x \sim K$ *относительно данного н. п. т. множества* $\mathfrak{F} \subset E^*$, *то* $f(x) = K$ *для любого положительного линейного функционала с нормой* $\|f\| = 1$ (теорема 3.1) *и обратно*.

Практический критерий с полезной геометрической интерпретацией следующий: *Для того чтобы элемент* $e \in E$ *был единицей* KB-*линеала*

E, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям: а) $\|e\|=1$; б) $\|x-e\|\leqslant 1$ *влечет за собой* $x\geqslant 0$ (лемма 3.6).

Показываем, что только пространства типа M могут содержать единицу (лемма 3.7). В пространствах $C(0,1)$, $M_0(0,1)$ и $M(0,1)$ элементом e является функция $e(t)\equiv 1$ (соответственно $e(t)\equiv 1$ почти всюду). В пространствах c и m единицей является стационарная последовательность $e=\{1,1,\ldots,1,\ldots\}$, а в пространстве m_k имеем $e=\{1,1,\ldots,1\}$. *Если пространство E есть пространство типа M и рефлексивно, то оно содержит единицу.*

Изучается связь между единицей в смысле автора, единицей в смысле С. Какутани [9], единицей в смысле М. Крейна и С. Крейна [12], [13] и единицей в смысле Фрейдентала [6].

Изучая свойства KB-линеалов с единицей, автор, между прочим, доказывает следующую *теорему о среднем*: *Пусть* $E\ni e$ *и* $\mathfrak{F}\subset E^*$ *— любое н. п. т. множество. Для любого* $x\in E$ *и любого положительного линейного функционала* φ *с нормой* $\|\varphi\|=1$ *имеем* $\inf\limits_{f\in\mathfrak{F}} f(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\sup\limits_{f\in\mathfrak{F}} f(x)$ (теорема 3.4). В пространстве $C(0,1)$ приходим к известной теореме о среднем для интеграла Стильтиеса, а в пространстве $C(R)$ ограниченных и непрерывных функций, определенных на нормальном топологическом пространстве R, к одной теореме А. Маркова [17]; для пространств $M(0,1)$ и m теорема 3.4 дает новые теоремы. Если $E\ni e$, то отображение из теоремы 2.1 KB-линеала E в пространстве $C(\mathfrak{F})$ изометрично, каково бы ни было н. п. т. множество $\mathfrak{F}\subset E^*$: *Если* $E\ni e$, *то для любого элемента* $x\in E$ *имеем* $\|x\|=\sup\limits_{f\in\mathfrak{F}}|f(x)|$, *где* $\mathfrak{F}\subset E^*$ *есть любое н.п.т. множество* (теорема 3.6).

Наконец, автор вводит понятие квазиединицы определением 4.1: *Будем говорить, что элемент* $x\in E$ *есть* квазиконстантный элемент, *соотсетствующий действительному числу* K, *относительно н. п. т. множества* $\mathfrak{F}\subset E^*$ *(обозначаем*: $x\overset{\mathfrak{F}}{\sim}K$*), если имеем* $f(x)=K$ *для любого* $f\in\mathfrak{F}$. *В частности, называем* квазиединицей *относительно множество* $\mathfrak{F}$ *любой элемент* $x\overset{\mathfrak{F}}{\sim}K\,1$. Понятие квазиконстанты является, таким образом, более общим, чем понятие константы. Для нормы квазиединицы имеем $\|e\|\geqslant 1$.

Если K любое фиксированное действительное число и если в E существует квазиконстантный элемент $x\overset{\mathfrak{F}}{\sim}K$, то оно является единственным (лемма 4.1). Пространство, содержащее квазиединицу e относительно н. п. т. множества $\mathfrak{F}\subset E^*$, содержит все квазиконстанты относительно $\mathfrak{F}$, а именно $Kex\overset{\mathfrak{F}}{\sim}K$ (лемма 4.2).

Если $e\in E$, $ex\overset{\mathfrak{F}}{\sim}K\,1$ то обозначая $\mathfrak{U}=\{u\,|\,x-u\|\leqslant 1\rightarrow x\geqslant 0\}$, имеем $e\in\mathfrak{U}$ (лемма 4.3), $\mathfrak{U}=\{u\,|\,u\geqslant e\}$ (лемма 4.5), существует $\inf\mathfrak{U}$ и имеем $e=\inf\mathfrak{U}$ (лемма 4.6). Если $E\ni ex\overset{\mathfrak{F}}{\sim}K\,1$ и существует $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} x$, то $e=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} x$. Имеем следующую *теорему единственности*: *Если* $\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2\subset E^*$ *являются двумя любыми н. п. т. множествами и* $e_1x\overset{\mathfrak{F}}{\sim}K_1\,1$, $e_2x\overset{\mathfrak{F}}{\sim}K_2\,1$, *то* $e_1=e_2$ (теорема 4.1).

Показав несколько свойств KB-линеалов с квазиединицей, автор приводит классификацию KB-линеалов (см. стр. 125).

Данные автором определение 3.1 единицы и определение 4.1 квазиединицы *не используют понятие умножения элементов* и справедливы для любых *KB*-линеалов. Автор изучает их связь с теорией нормированных колец.

CONTRIBUTIONS À LA THÉORIE DES LATTICES VECTORIELLES NORMÉES (*KB*-LINÉAUX)

(RÉSUMÉ)

La notion fondamentale de ce travail, introduite par l'Auteur, est la suivante: *Soit E un KB-linéal* [10] *quelconque. On dira que l'ensemble $\mathcal{F}$ de fonctionnelles linéaires définies sur E est positivement-total si x étant un élément quelconque de E, des relations $f(x) \geqslant 0$ pour tous les $f \in \mathcal{F}$ il résulte $x \geqslant 0$* (définition 2.1). Tout ensemble positivement-total est total (lemme 2.1); la réciproque n'est pas vraie. Les ensembles positivement totaux de fonctionnelles linéaires, ayant la norme 1, seront nommés *des ensembles positivement-totaux normés* (abrév. ensembles p.t.n.).

Soient: E un KB-linéal quelconque, $\mathcal{F} \subset E^*$ un ensemble p.t.n. quelconque et $C(\mathcal{F})$, l'espace de toutes les fonctions réelles continues sur $\mathcal{F}$, avec la norme $\| X \| = \sup_{f \in \mathcal{F}} | X(f) |$. *Il existe une représentation linéaire isomorphe de l'espace E dans l'espace* $C(\mathcal{F})$ (théorème 2.1). En général, cette représentation n'est pas isométrique; on établit des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour qu'elle soit isométrique.

En comparant les ensembles $\mathcal{S}$ (= l'ensemble des fonctionnelles « élémentaires » avec la norme 1) Q (= la fermeture faible de $\mathcal{S}$) et T (= l'ensemble des points extrêmes de l'ensemble $\{f \mid \|f\| \leqslant 1, f \geqslant \Phi\}$) définis par M. Krein, S. Krein [12], [13] et par S. Kakutani [9] avec les ensembles p.t.n. introduits par l'Auteur, on montre que les ensembles p.t.n. offrent les avantages suivants:

1) Les ensembles $\mathcal{S}$ et Q n'ont d'importance que pour les espaces de type M ([9] et [13]). Leurs propriétés, étudiées par Krein et par Kakutani, sont valables pour les espaces de type M, mais ne se maintiennent pas pour tout KB-linéal; bien plus, il existe des KB-linéaux sur lesquels les ensembles $\mathcal{S}$ et Q sont vides. Par contre, les ensembles p.t.n gardent leur importance pour tout KB-linéal. Sur tout KB-linéal il existe des ensembles p.t.n. non-vides et non triviaux, par exemple:

$$\text{sur } C(0,1): \mathcal{F}_{[0,1]} = \{f_\xi(x) = x(\xi)\}_{\xi \in [0,1]} \quad \mathcal{F}_I = \left\{ g_{\xi,\eta}(x) = \frac{1}{\eta - \xi} \int_\xi^\eta x(t)\, dt \right\}_{\substack{\xi < \eta \\ \xi, \eta \in [0,1]}}$$

$$\text{sur } V(0,1): \mathcal{F}_V = \{f_0(x) = x(0),\ f_{\xi,\eta}(x) = x(\eta) - x(\xi)\}_{\substack{\xi \leqslant \eta \\ \xi, \eta \in [0,1]}}$$

$$\text{sur } M(0,1): \mathcal{F}_J = \left\{ f_E(x) = \frac{1}{mE} \int_E x(t)\, dt \right\}_{\substack{E \subseteq [0,1] \\ mE > 0}};$$

sur $L^p(0,1)$ $(p \geqslant 1)$: $\mathcal{F}_{y_p} = \left\{ f_E(x) = \frac{1}{(mE)^{\frac{1}{q}}} \int_E x(t)\,dt \right\}_{\substack{E \leqslant [0,2] \\ mE > 0}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$;

sur les espaces de suites: $\mathcal{F}_N = \{ f_n(x) = \xi_n \}_{n=1,2\ldots}$

2) Même pour quelques fréquents KB-linéaux de type M, par exemple pour M (0.1), on ne connaît pas, de manière explicite, les éléments des ensembles $\mathcal{S}$, Q et T. Par contre, des ensembles p.t.n. concrets peuvent être donnés sur tout KB-linéal. 3) Les résultats obtenus pour les ensembles p.t.n. sont valables en particulier pour l'ensemble $\mathcal{S}$, défini sur les KB-linéaux de type M, puisque si l'espace E est de type M, $\mathcal{S}$ est un ensemble p.t.n., ainsi que pour l'ensemble T défini sur un $K\,B$ — linéal quelconquee, puisque l'ensemble T est p.t.n. 4) Les ensembles p.t.n. donnent une généralisation plus propre de la notion de *valeur d'une fonction en un point*, que les ensembles $\mathcal{S}$, Q et T.

S'appuyant sur cette généralisation de la notion de valeur d'une fonction en un point, l'Auteur donne la définition 3.1: «*On dit que l'élément* $x \in E$ *est un élément constant qui correspond au nombre réel* K *(notons:* $x \sim K$*) si l'on a* $f(x) = K$ *pour tout* $f \in \mathcal{F}$ *et* $\| x \| = | K |$. *On appele élément* ~ 1 *élément-unité (abrév. unité) de l'espace* E *et on le désigne par* e. La seconde condition de cette définition est indépendante de la première.

K étant un nombre réel quelconque fixe, s'il existe en E un élément constant $\sim K$, il est unique (lemme 3.1). Un espace qui contient la constante e (ou un autre élément constant quelconque $\neq 0$) contient toutes les constantes: $Ke \sim K$ (lemme 3.2). L'élément $\sim K$ ne dépend pas de l'ensemble p.t.n.) $\mathcal{F}$ initial: *Si* $x \sim K$ *relativement à un ensemble p.t.n. donné* $\mathcal{F} \subset E^*$, *alors* $f(x) = K$ *pour toute fonctionnelle linéaire positive ayant la norme* $\| f \| = 1$ (théorème 3.1) *et réciproquement.*

Un critère pratique, ayant une interprétation géométrique utile, est le suivant: *Pour que l'élément* $e \in E$ *soit l'élément-unité du KB-linéal* E, *il est nécessaire et suffisant qu'il satisfasse aux conditions: a)* $\| e \| = 1$, *b)* $\| x - e \| \leqslant 1$ *implique* $x \geqslant 0$ (lemme 3.6).

On montre que *seuls les espaces de type* M *peuvent contenir un élément-unité* (lemme 3.7). Dans les espaces $C(0,1)$, $M_0(0,1)$ et M (0,1), l'élément e est la fonction $e(t) \equiv 1$ (respectivement $e(t) \equiv 1$ presque partout). Dans les espaces c et m, l'élément-unité est la suite stationnaire $e = \{1, 1, \ldots 1, \ldots\}$ et dans les espaces m_k on a $e = \{1, 1, \ldots 1\}$. *Si l'espace* E *est de type* M *et est réflexif, alors il contient un élément-unité.*

On montre quels sont les rapports entre l'élément-unité au sens de l'Auteur l'élément-unité au sens de S. Kakutani [9], l'élément unité au sens de M. Krein et de S. Krein [12], [13] et l'élément unité au sens de H. Freudenthal [6].

En étudiant les propriétés des KB-linéaux ayant un élément unité, l'Auteur démontre, entre autres, le *théorème de moyenne* suivant: *Soit* $E \ni e$ *et* $\mathcal{F} \subset E^*$ *un ensemble p.t.n. quelconque. Pour tout* $x \in E$ *et toute fonctionnelle linéaire positive* φ *ayant la norme* $\| \varphi \| = 1$, *on a* $\inf_{f \in F} f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \sup_{f \in F} f(x)$ (théorème 3.4). Dans l'espace $C(0,1)$ on retrouve le théorème bien connu de moyenne pour l'intégrale Stieltjes, et, dans l'espace $C(R)$ des fonctions bornées et continues, définies sur un espace topologique normal R, on retrouve un théorème de A. Markoff [17]; pour les espaces M (0,1) et m, le théorème 3.4. donne des théo-

rèmes nouveaux. Si $E \in e$, alors la représentation du théorème 2.1. du KB-linéal E dans l'espace $C(\mathcal{F})$ est isométrique, quel que soit l'ensemble p.t.n. $\mathcal{F} \subset E^*$: *Si* $E \in e$, *alors pour tout élément* $x \in E$ *on a* $\| x \| = \sup_{f \in \mathcal{F}} | f(x) |$, *où* $\mathcal{F} \subset E^*$ *est un ensemble p.t.n. quelconque* (théorème 3.6).

Enfin, l'Auteur introduit la notion d'élément quasi-unité par la définition 4.1: *On dit que l'élément* $x \in E$ *est un élément quasi-constant correspondant au nombre réel* K *par rapport à l'ensemble p.t.n.* $\mathcal{F} \subset E^*$ *(notons:* $x \overset{\mathcal{F}}{\sim} K$*), si l'on a* $f(x) = K$ *pour tout* $f \in \mathcal{F}$. *On appelle, en particulier, élément quasi-unité par rapport à l'ensemble* $\mathcal{F}$ *tout élément* $\overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$. *La notion de quasi-constante* est, par conséquent, plus générale que la notion de constante. Pour la norme de la quasi-unité, on a $\| e \| \geqslant 1$.

K étant un nombre réel quelconque fixe, si dans E il existe un élément quasi-constant $\overset{\mathcal{F}}{\sim} K$, il est alors unique (lemme 4.1). Un espace qui contient l'élément quasi-unité e par rapport à un ensemble p.t.n. $\mathcal{F} \subset E^*$ contient toutes les quasi-constantes relativement à $\mathcal{F}$: $Ke \overset{\mathcal{F}}{\sim} K$ (lemme 4.2).

Si $e \in E$, $e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$, alors — en notant $\mathfrak{U} = \{u \| x - u \| \leqslant 1 \rightarrow x \geqslant 0\}$ on a $e \in \mathfrak{U}$ (lemme 4.5), $\mathfrak{U} = \{u \mid u \geqslant e\}$ (lemme 4.5), il existe $\inf \mathfrak{U}$ et l'on a $e = \inf \mathfrak{U}$ (lemme 4.6). Si $E \in e \overset{\mathcal{F}}{\sim} 1$ et il existe $\sup_{\|x\| \leqslant 1} x$, alors $e = \sup_{\|x\| \leqslant 1} x$. On a le suivant *théorème d'unicité: Si* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset E^*$ *sont deux ensembles p.t.n. quelconques et* $e_1 \overset{\mathcal{F}_1}{\sim} 1$, $e_2 \overset{\mathcal{F}_2}{\sim} 1$, *alors* $e_1 = e_2$ (théorème 4.1).

Après avoir présenté quelques propriétés des KB-linéaux ayant un élément quasi-unité, l'Auteur donne une classification des KB-linéaux (v. pag. 125).

La définition 3.1 de l'élément-unité et la définition 4.1 de l'élément-quasi-unité *n'utilisent pas la notion de multiplication des éléments* et sont valables pour des KB-linéaux quelconques. L'Auteur étudie leur lien avec la théorie des anneaux normés.

BIBLIOGRAFIE

1. Ahiezer N. I., *Lecții po teorii aproximații.* GTTI, Moscova, 1947.
2. Alaoglu L., *Weak topologies of normed linear spaces.* Ann. of Math., 1940, vol. 41, p. 252—267.
3. Banach S., *Théorie des opérations linéaires.* Varșovia, 1932.
4. Bohnenblust H. F. a. Kakutani S., *Concrete representation of (M)—spaces* Ann, of. Math., 1941, vol. 42, p. 1025—1028.
5. Fichtenholz G. M. et Kantorovitch L. V., *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées.* Studia Math., 1934, t. 5, p. 69—93.
6. Freudenthal H., *Teilweis geordnete Moduln.* Proc. Acad. Amsterdam, 1936, t. 239, p. 641—651.
7. Hildebrandt T. H., *On bounded linear functional operations.* Trans. Amer. Math. Soc., 1934, t. 36, p. 868—875.
8. Kakutani S., *Concrete representation of abstract (L) — spaces and the mean ergodic theorem.* Ann. of. Math., 1941, vol. 42, p. 523—538.
9. — *Concrete representation of abstract (M)-spaces.* Ann. of. Math., 1941, vol. 42, p. 994—1025.
10. Kantorovici L. V., Vulih B. Z. i Pinsker A. G., *Funcționalnîi analiz v poluuporiadocennîh prostranstvah.* GITTI, Moscova-Leningrad, 1950.
11. Kelley J. L. a. Vaught R. L., *The positive cone in Banach algebras,* Trans. Amer. Math. Soc., 1953, t. 74, p. 44—55.

12. Krein M. G. a. Krein S. G., *On an inner characteristic of the set of all continuous functions defined on a bicompact Hausdorff space.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1940, t. 27, p. 427—430.
13. — *Sur l'espace des fonctions continues définies sur un bicompact de Hausdorff et ses sous-espaces semi-ordonnés,* Matem. sbornik., 1943, t. 13 (55), p. 1—38.
14. Krein M. G. and Milman D. P., *On extreme points of regularly convex sets,* Studia Math., 1940, t. 9, p. 133—138.
15. Krein M. G. i Rutman M. A., *Lineinie operatori, ostavliaiuşcie invariantnim conus v prostranstve Banaha.* Uspehi Mat. Nauk., 1948, t. III, s. I (23), p. 3—96.
16. Krein M. G. and Šmulian V. L., *On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space.* Ann. of. Math., 1940. vol. 41, p. 556—585.
17. Markoff A. A., *On mean values and exterior densities.* Matem. Sbornik, 1938, t. 4 (46), p. 165.
18. Mikusinski J. G. et Nardzewski Cz. Ryll, *Sur le produit de composition.* Studia Math., 1951, t. 12, p. 51—57.
19. Šmulian V. L., *On some geometrical properties of the unit sphere in the space of the type (B).* Matem. sbornik, t. 6 (48), 1939, p. 77—94.
20. Tatarkiewicz K., *Quelques remarques sur la convexité des sphères.* Ann. Univ. Mariae Curie— Skłodowska, t. 6, 1952, p. 19—30.
21. Vulih B. Z., *Une définition du produit dans les espaces semi-ordonnés linéaires.* Dokl, Akad. Nauk SSSR, 1940, t. 26, 1940, p. 850—854.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 1–2, 1955

ALGEBRE LINIARE ASOCIATIVE ŞI COMUTATIVE ŞI FUNCŢII MONOGENE ATAŞATE LOR *)

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ

1. *Algebre asociative şi comutative de ordinul* $n+1$. Studiul algebrelor asociative şi comutative de ordinul $n+1$, poate fi făcut pornind de la relaţiile de compoziţie ale elementelor sale

$$1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \tag{1}$$

mai complet decît avînd la bază ecuaţia caracteristică. Într-adevăr, pornind de la ecuaţia caracteristică, sînt introduşi numai $n+1$ parametri arbitrari, pe cînd în relaţiile de compoziţie intervin $(n+1)$ n constante de structură. În plus, pornind de la relaţiile de compoziţie, putem determina numărul maxim de parametri arbitrari care intervin într-o algebră asociativă şi comutativă, şi aceşti parametri pot fi aleşi astfel încît să ne conducă la algebre particulare cu proprietăţi speciale.

Rezultatele obţinute în această lucrare extind o parte din rezultatele găsite anterior [1], [2] unde s-au studiat algebrele fără radical, de ordinul $n+1$, pornindu-se de la ecuaţia caracteristică

$$\lambda_0\theta^{n+1} + \lambda_1\theta^n + \ldots + \lambda_n\theta + \lambda_{n+1} + 1 = 0.$$

Problemele puse aici însă sînt mai variate, unele fiind noi, iar cele care au fost studiate în lucrările anterioare, extinse şi completate.

Să considerăm, aşa dar, algebra A_{n+1}, cu element unitate pe care îl luăm scalarul 1, construită pe corpul numerelor reale (R) sau complexe (C) — corpul scalarilor — cu legile de compoziţie date de

$$\theta_i\,\theta_j = \sum_{k=0}^{n} a_{ijk}\,\theta_k \quad (\theta_0 = 1). \tag{2}$$

Pentru ca algebra să fie comutativă, este necesar ca

$$a_{ijk} = a_{jik},$$

*) Prezentată Institutului de matematică la data de 24 noiembrie 1954.

iar pentru ca algebra să fie și asociativă, din relațiile (2), nu pot fi arbitrare, decît

$$\begin{aligned} \theta_1^2 &= a_{110} + a_{111}\theta_1 + \ldots + a_{11n}\theta_n, \\ \theta_1\theta_2 &= a_{120} + a_{121}\theta_1 + \ldots + a_{12n}\theta_n, \\ &\cdots \\ \theta_1\theta_n &= a_{1n0} + a_{1n1}\theta_1 + \ldots + a_{1nn}\theta_n, \end{aligned} \tag{3}$$

ceilalți parametri a_{ijk} rezultînd din aceste relații. Este evident că, în loc de relațiile de compoziție ale lui $\theta_1\ \theta_k$, putem da produsele $\theta_i\theta_k$ (i = fix); se observă însă că numărul constantelor de structură arbitrare de pot interveni este tot $(n+1)\ n$. Să arătăm că (3) determină complet și în mod unic o algebră asociativă și comutativă, adică, toate produsele $\theta_i\theta_j$ sînt în mod unic determinate. Să considerăm din (3) două relații carecare

$$(\alpha)\ \ \theta_1\theta_i = \sum_k a_{1ik}\ \theta_k,$$

$$(\beta)\ \ \theta_1\theta_j = \sum_k a_{1jk}\ \theta_k.$$

Înmulțind pe (α) cu θ_j, pe (β) cu θ_i și identificînd, se ajunge la $\frac{n(n-1)}{2}$ relații care conțin pe θ_i și produsele $\theta_i\theta_j = \theta_j\theta_i$ tot în număr de $\frac{n(n-1)}{2}$, deci $\theta_i\theta_j$ sînt determinați, în general, în mod unic de (3). Rămîne să arătăm că numărul constantelor de structură nu poate fi mai mare de $n(n+1)$ pentru o algebră A_{n+1}. Pentru aceasta să considerăm o algebră particulară dată de

$$\begin{aligned} \theta_1^2 &= a_{110} + a_{111}\theta_1, \\ \theta_1\theta_e &= a_{120} + a_{122}\theta_2, \\ &\cdots \\ \theta_1\theta_n &= a_{1n0} + a_{1nn}\theta_n, \end{aligned} \tag{4}$$

unde constantele care lipsesc, comparînd cu (3), sînt nule, deci date.

Să arătăm că orice relație suplimentară

$$\theta_2\theta_3 = a_{230} + a_{231}\theta_1 + \ldots + a_{23n}\theta_n \tag{5}$$

are toți coeficienții a_{23k} complet determinați de (4).

Relațiile (4) determină pe $\theta_2\theta_3$. Într-adevăr, înmulțind pe $\theta_1\theta_2$ cu θ_3 și pe $\theta_1\theta_3$ cu θ_2 și avînd în vedere că algebra este asociativă și comutativă, avem

$$a_{120}\theta_3 + a_{122}\theta_2\theta_3 = a_{120}\theta_2 + a_{133}\theta_3\theta_2,$$

deci

$$\theta_2\theta_3 = \frac{1}{a_{122} - a_{133}}(a_{120}\theta_3 - a_{130}\theta_2). \tag{6}$$

Dacă adăugăm acum relația suplimentară (5) și cum în algebră produsul $\theta_2\theta_3$ trebuie să fie unic, egalînd pe (5) cu (6), urmează că nici unul din coeficienții a_{23k} nu poate fi arbitrar.

Într-o algebră asociativă, norma produsului a două numere este egal cu produsul normelor. Deci, numărul maxim al constantelor de structură, pentru ca într-o algebră de ordinul $n+1$ această proprietate să se menţină, este $n\ (n+1)$.

După cum se ştie, orice număr din algebră este soluţia unei ecuaţii de gradul, cel mult, ordinul algebrei, cu coeficienţii în corpul pe care este construită algebra. În cazul nostru θ_k este soluţia ecuaţiei de ordinul $n+1$,

$$\begin{vmatrix} -\theta_k & 0 \dots & 1 & \dots & 0 \\ a_{1k0} & a_{1k1}-\theta_k \dots & a_{1kk} & \dots & a_{1kn} \\ a_{2k0} & a_{2k1} \dots & a_{2kk} & \dots & a_{2kn} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{nk0} & a_{nk1} \dots & a_{nkk} & \dots & a_{nkn}-\theta_k \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

unde 1 de pe prima linie este pe coloana $k+1$.

În (7) numerele a_{ijk} sînt date de (3). Prin urmare, a_{ijk} $(i \neq 1)$ se obţin din (3) în funcţie de a_{ijk}, fiind coeficienţii de liniarizare ai produselor

$$\theta_i \theta_j = \sum_k a_{ijk} \theta_k .$$

Avem aşa dar n ecuaţii de forma (7) pentru $k = 1, 2, \dots, n$. În mod analog se determină şi ecuaţia care este satisfăcută de un număr arbitrar ω din algebră

$$\omega = x_0 + \theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n .$$

Termenul liber al ecuaţiei caracteristice astfel determinată este norma lui ω. Să găsim expresia acestei norme.

În ecuaţiile (7) să înlocuim pe θ_k cu μ_k. Obţinem astfel n ecuaţii în μ_k, care admit rădăcinile

$$\begin{matrix} \mu_{10}, \mu_{11}, \dots, \mu_{1n}, \\ \mu_{20}, \mu_{21}, \dots, \mu_{2n}, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{n0}, \mu_{n1}, \dots, \mu_{nn} . \end{matrix} \qquad (8)$$

Să observăm că, datorită relaţiilor (3), avem o corespondenţă între rădăcinile ecuaţiilor (7), astfel încît dacă $\mu_1 = \mu_{10}$ avem şi $\mu_i = \mu_{i0}$.

Rădăcinile ecuaţiei în μ_k $(k \neq 1)$ sînt complet determinate de relaţiile (3) şi rădăcinile ecuaţiei (7) pentru $k = 1$.

Trebuie remarcat faptul că la o rădăcină imaginar conjugată a ecuaţiei (7) pentru $k = 1$, corespunde tot o rădăcină imaginar conjugată a ecuaţiilor (7) pentru $k \neq 1$, iar dacă rădăcina corespunzătoare este reală, ea este dublă. Ne vom ocupa de cazul cînd ecuaţia caracteristică (7) $(k = 1)$ admite rădăcini distincte, deci algebra este fără radical, neavînd elemente nilpotente. Ecuaţia caracteristică a lui ω, $C(\omega)$, admite pe ω ca soluţie

$$\omega = x_0 + \theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n ,$$

cînd θ_i sînt legate de relațiile (3) prin urmare și de (7), deci pentru $\theta_i = \mu_{ik}$ această proprietate se menține, întrucît numerele reale sau complexe

$$\mu_{1i},\ \mu_{2i},\ \ldots,\ \mu_{ni}$$

verifică relațiile (3) și (7). Așadar, numerele

$$\omega_i = x_0 + \mu_{1i}\, x_1 + \mu_{2i}\, x_2 + \ldots + \mu_{ni}\, x_n$$

$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

sînt soluții ale ecuației caracteristice $C(\omega)$.

Produsul

$$(-1)^{n+1}\, \omega_0 . \omega_1 \ldots \omega_n,$$

este deci termenul liber al ecuației caracteristice $C(\omega)$ și, conform unui rezultat cunoscut, este chiar norma lui ω, $N(\omega)$ amplificată cu $(-1)^{n+1}$, după cum se vede în (7). Prin urmare, norma lui ω are forma

$$N(\omega) = \prod_{i=0}^{n} (x_0 + \mu_{1i}\, x_1 + \ldots + \mu_{ni}\, x_n) \tag{9}$$

și este produsul a $n+1$ elemente liniare cu coeficienți în (C).

După cum se știe, norma lui ω intervine la calculul inversului unui număr din algebră. Într-adevăr, dacă ecuația caracteristică are forma

$$\omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, \omega + N(\omega) = 0\,,$$

atunci

$$\frac{1}{\omega} = \frac{-1}{N(\omega)} \left[\omega^{n-1} + a_1\, \omega^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \right],$$

deci împărțirea cu numerele ω pentru care $N(\omega)$ este nul nu este posibilă. Punctele (ω) din spațiul variabilei ω $(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, pentru care

$$x_0 + \mu_{1i}\, x_1 + \ldots + \mu_{ni}\, x_n = 0\,, \tag{10}$$

au norma nulă. Dacă algebra A_{n+1} este construită pe (R), după cum se vede din (10), punctele ω sînt situate pe un hiperplan cu n dimensiuni dacă μ_{1i} este real și pe un hiperplan cu $n-1$ dimensiuni dacă μ_{1i} este imaginar. Aceste hiperplane constituie varietățile divizorilor lui zero ale algebrei A_{n+1}. Numerele ω, ale căror componente satisfac la (10), determină în algebră un ideal I_i.

Dacă algebra este construită pe (C), avem $n+1$ ideale prime definite în modul următor

$$I_k^* = I_0 \cap I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_{k-1} \cap I_{k+1} \cap \ldots \cap I_n\,.$$

Dacă algebra este construită pe (R) și ecuația (7) $(k = 1)$ are p rădăcini reale și $2q$ rădăcini complexe $(p + 2q = n + 1)$, algebra are $p + q$ ideale prime care se definesc în mod analog.

În general, norma elementelor θ_i nu este unitatea. După cum se vede din (7), $N(\theta_i)$ are expresia

$$N(\theta_i) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ a_{1k0} & a_{1k1} & \dots & a_{1kk} & \dots & a_{1kn} \\ a_{2k0} & a_{2k1} & \dots & a_{2kk} & \dots & a_{2kn} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ a_{nk0} & a_{nk1} & \dots & a_{nkk} & \dots & a_{nkn} \end{vmatrix}$$

Pentru $n = 2$ avem efectiv

$$N(\theta_1) = a_{122} \cdot a_{110} - a_{112} \cdot a_{120},$$

$$N(\theta_2) = a_{121} \cdot a_{220} - a_{221} \cdot a_{120},$$

şi ţinînd seama că a_{220} şi a_{221} sînt date de

$$a_{220} = \frac{1}{a_{112}} (a_{120} \cdot a_{122} + a_{121} \cdot a_{110} - a_{111} \cdot a_{120})$$

$$a_{221} = \frac{1}{a_{112}} (a_{120} + a_{122} \cdot a_{121})$$

şi

$$a_{222} = \frac{1}{a_{112}} (a_{121} \cdot a_{112} + a^2_{122} - a_{111} \cdot a_{122} - a_{110}),$$

avem

$$N(\theta_2) = \frac{1}{a_{112}} (a^2_{121} \cdot a_{110} - a_{121} \cdot a_{111} \cdot a_{120} - a^2_{120}),$$

deci

$$N(\theta_1) \neq N(\theta_2) \neq 1 .$$

Se poate face însă normalizarea elementelor θ_i, astfel ca norma lor să fie unitatea. Aceasta implică în algebra A_{n+1}, n relaţii suplimentare între coeficienţii a_{1jk}.

2. *Structura algebrei* A_{n+1}. Structura algebrei A_{n+1}, construită pe (R), se poate deduce din (9).

Într-adevăr, dacă (9) este produsul a p elemente liniare reale şi a $2q$ elemente liniare imaginare, conjugate algebra A_{n+1} este suma directă a p algebre reale şi a q algebre complexe ($p + 2q = n + 1$). Dacă însă între cele p elemente liniare se află unul multiplu de ordinul m ($m \leqslant p$), atunci algebra A_{n+1} este suma directă a unei algebre nilpotente, a $p - m$ algebre reale şi a q algebre complexe. Criteriul acesta impune cunoaşterea rădăcinilor ecuaţiilor caracteristice pentru toate elementele bazei θ_i. Se poate înlătura această dificultate observînd că natura

valorilor proprii ale matricei dedusă din relațiile (3), completată cu identitatea $\theta_1 = \theta_1$, valori proprii care sînt date de ecuația

$$\begin{vmatrix} -\mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{110} & a_{111}-\mu & 0 & \dots & 0 \\ a_{120} & a_{121} & a_{122}-\mu & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1n0} & a_{1n1} & a_{1n2} & \dots & a_{1nn}-\mu \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

determină structura algebrei. Ecuația caracteristică a matricei este chiar ecuația caracteristică (7) pentru $k = 1$. Pentru a demonstra aceasta să observăm că o rădăcină reală a ecuației (7), pentru $k = 1$, implică neapărat o rădăcină reală pentru toate celelalte ecuații caracteristice în virtutea relațiilor (3).

Dacă μ_{1i} și $\overline{\mu}_{1i}$ sînt două rădăcini imaginar conjugate ale ecuației (7) ($k = 1$), atunci ecuațiile caracteristice ale celorlalte elemente θ_k au tot rădăcini imaginar conjugate sau, după cum s-a mai spus, rădăcini reale duble, rezultat ce se obține tot din (3).

În sfîrșit, la o rădăcină multiplă de ordinul m a ecuației (7) ($k = 1$) corespund pentru celelalte ecuații caracteristice, tot rădăcini reale multiple de ordinul m. Prin urmare natura elementelor liniare (reale sau complexe simple sau multiple) ce intervin în (9), sînt determinate de natura rădăcinilor ecuației (7) ($k = 1$), și nu de natura rădăcinilor celorlalte ecuații caracteristice.

Rezolvînd în raport cu θ_i ($i = 2, 3 \dots, n$) relațiile (3) din care se omite prima

$$\theta_1\theta_i = \sum_{j=0}^{n} a_{1ij}\,\theta_j \qquad (\theta_0 = 1,\ i = 2, 3, \dots n), \tag{3'}$$

se deduce că elementele bazei θ_i se pot exprima cu ajutorul lui θ_1 astfel

$$\theta_i = -\frac{P_i(\theta_1)}{P(\theta_1)},$$

cu

$$P(\theta_1) = \begin{vmatrix} a_{122}-\theta_1 & a_{123} & \dots & a_{12n} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ a_{1n2} & a_{1n3} & \dots & a_{1_{nn}}-\theta_1 \end{vmatrix}$$

$P_i(\theta_1)$ obținîndu-se prin înlocuirea elementelor coloanei întîia cu coeficienții lui θ_i din relațiile (3'). Se vede că $P_i(\theta_1)$ și $P(\theta_1)$ sînt polinoame de gradul $n-1$, cel mult în θ_1. Prima relație (3) se reduce la (7) pentru $k = 1$, dacă se înlocuiesc în ea θ_i astfel obținuți. Este ușor de arătat că se obține o algebră A'_{n+1} echivalentă cu A_{n+1} dîndu-se θ_i sub forma

$$\theta_i = \frac{Q_i(\theta_1)}{Q(\theta_1)},$$

iar θ_1 verificînd o ecuație caracteristică oarecare de ordinul $n+1$. Într-adevăr, numărul constantelor de structură care intervin este dat de coeficienții arbitrari ai polinoamelor Q_i, Q și ai ecuației caracteristice deci tot $n(n+1)$.

În ipoteza că ecuaţia (11) are p rădăcini reale şi $2q$ rădăcini complexe toate simple, atunci un număr din algebră

$$\omega = x_0 + \theta_1 x_1 + \ldots + \theta_n x_n$$

printr-o schimbare convenabilă a elementelor bazei θ_i în ε_i, devine

$$\omega = \sum_{i=1}^{p} y_i \varepsilon_i + \sum_{1}^{q} z_i \varepsilon'_j, \tag{12}$$

cu

$$z_j = u_j + \sqrt{-1}\, v_j$$

şi

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots p;\ j = 1, 2, \ldots, q),$$
$$\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i,$$

formă care arată explicit structura algebrei A_{n+1} căreia îi aparţine ω.

3. *Funcţia exponenţială.* Funcţia exponenţială e^{ω}

$$e^{\omega} = \exp\omega$$

este definită ca şi în algebra complexă prin relaţia funcţională

$$\exp(\omega_1 + \omega_2) = \exp\ \omega_1\ \exp\ \omega_2.$$

Prin intermediul ei găsim numerele din algebră a căror normă este unitatea. Punînd

$$\exp(\theta_1\varphi_1) = \sigma_0(\varphi_1) + \theta_1\sigma_1(\varphi_1) + \ldots + \theta_n\sigma_n(\varphi_1), \tag{13}$$

unde φ_1 este un scalar obţinem, deoarece (13) este o identitate în θ_i

$$\exp(\mu_{1i}\varphi_1) = \sigma_0(\varphi_1) + \mu_{1i}\sigma_1(\varphi_1) + \ldots + \mu_{ni}\sigma_n(\varphi_1)\ (i = 0, 1, \ldots n)$$

şi făcînd produsul lor, avem

$$\prod_{o}^{n}\left[\sigma_0(\varphi_1) + \mu_{1i}\sigma_1(\varphi_1) + \ldots + \mu_{ni}\sigma_n(\varphi_1)\right] = N\left[\exp(\theta_1\varphi_1),\right],$$

deci

$$N[\exp(\theta_1\varphi_1)] = \exp\left[(\sum_{o}^{n}\mu_{1i})\varphi_1\right]$$

şi în mod analog

$$N[\exp(\theta_k\varphi_k)] = \exp\left[(\sum_{i}^{n}\mu_{ki})\varphi_k\right].$$

Prin urmare, numerele hipercomplexe

$$\exp\left[-\frac{1}{n+1}\sum_{i=o}^{n}\mu_{ki}\varphi_k + \theta_k\varphi_k\right]$$

au norma egală cu unitatea, deci şi produsul lor

$$\tau = \exp\left[-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n}\mu_{ki}\varphi_k + \sum_{k=1}^{n}\theta_k\varphi_k\right].$$

De aici deducem că orice număr din algebră care nu este un divizor al lui zero, se poate pune sub forma

$$\omega = N^{\frac{1}{n+1}}(\omega) \cdot \tau . \tag{14}$$

Dacă urma tuturor ecuațiilor caracteristice (7) este nulă, ceea ce implică n relații suplimentare între coeficienții arbitrari a_{ijk}, atunci τ are forma simplă

$$\tau = \exp\left(\sum_1^n \theta_k \varphi_k\right)$$

iar un număr din algebră se scrie

$$\omega = N^{\frac{1}{n+1}}(\omega) \cdot \exp\left(\sum_1^n \theta_k \varphi_k\right). \tag{15}$$

Trebuie remarcat faptul că pentru algebra de ordinul doi cu elementele

$$1, \sqrt{-1} = i,$$

expresia (15) coincide cu forma exponențială a numărului complex, deoarece ecuației caracteristice

$$i^2 + 1 = 0$$

îi lipsește termenul în i.

Ne propunem acum să găsim perioadele acestei funcții exponențiale.

În cele ce urmează vom presupune că determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu_{10} & \mu_{20} & \cdots & \mu_{n0} \\ 1 & \mu_{11} & \mu_{21} & \cdots & \mu_{n1} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 1 & \mu_{1n} & \mu_{2n} & \cdots & \mu_{nn} \end{vmatrix} \tag{16}$$

este diferit de zero, ceea ce, în general, este întotdeauna posibil.

Să găsim acum un număr hipercomplex

$$\eta = c_0 + c_1\theta_1 + \ldots + c_n\theta_n, \tag{17}$$

care pentru $\theta_i = \mu_{ij}$ să se reducă la $K_j\sqrt{-1}$, K_i fiind numere reale, întregi, pozitive sau negative, oarecare. Sîntem astfel conduși la un sistem de $n+1$ ecuații în $n+1$ necunoscute c_j,

$$c_0 + c_1\mu_{ij} + \ldots + c_n\mu_{nj} = \sqrt{-1}\,K_j,$$

care admite întotdeauna o soluție, deoarece determinantul sistemului (16) este presupus diferit de zero. Soluțiile c_j sînt evident funcții liniare de parametrii K_j, numere întregi. Numărul η astfel determinat amplificat cu 2π este o perioadă a funcției exponențiale.

Într-adevăr, avem

$$\exp(2\pi\eta) = \sigma_0 + \theta_1\sigma_1 + \ldots + \theta_n\sigma_n,$$

unde $\sigma_i = \sigma_i(c_0, c_1, \ldots, c_n)$. Ținînd seama că avem o identitate în θ_i, obținem sistemul de $n+1$ ecuații în σ_i

$$1 = \sigma_0 + \mu_{1i}\sigma_1 + \ldots + \mu_{1n}\sigma_n \quad (i = 0, 1, \ldots n), \tag{18}$$

deoarece pentru orice sistem μ_{ki} $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $\exp(2\pi\eta) = 1$.

Sistemul (18) poate fi transformat într-un sistem omogen, dacă luăm ca necunoscute în loc de σ pe Ω_i definiţi de

$$\Omega_i = \sigma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\Omega_0 = \sigma_0 - 1.$$

Însă, în virtutea lui (16), sistemul în Ω_i nu admite decît soluţia banală $\Omega_i = 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, deci

$$\sigma_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\sigma_0 = 1$$

şi, prin urmare, avem

$$\exp(2\pi\eta) = 1.$$

Numărul hipercomplex η are componente numerele c_i, care sînt funcţii liniare de numerele întregi arbitrare K_i

$$\eta = \sum_0^n c_i \ (K_0, K_1, \ldots, K_n)\,\theta_i \quad (\theta_0 = 1)$$

şi prin urmare η este funcţie liniară de $n+1$ numere întregi K_i care pot lua toate valorile pozitive sau negative între $-\infty$ şi $+\infty$.

Din expresia (15) a unui număr din algebră avem

$$\frac{\omega}{\sqrt[1]{N^{n+1}(\omega)}} = \exp\left(\sum_1^n \theta_k \varphi_k\right)$$

şi putem considera funcţiile

$$\mathrm{ap}_k(\omega) = \frac{x_k}{\sqrt[1]{N^{n+1}(\omega)}} \tag{19}$$

ca nişte cosinuşi ai spaţiului numerelor ω. Numărul

$$\exp\left(\sum_1^n \theta_k \varphi_k\right) = ap_0(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) + \theta_1 ap_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) + \ldots + \tag{20}$$
$$+ \theta_n ap_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$$

are norma egală cu unitatea. În virtutea relaţiei (20), urmează că funcţiile componente $ap_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ sînt periodice, de aceeaşi perioadă η.

4. *Serii de o variabilă hipercomplexă.* Studiul seriilor întregi de o variabilă hipercomplexă

$$S(\omega) = a_0 + a_1\omega + \ldots + a_n\omega^n + \ldots \tag{21}$$

cu a_n în A_{n+1}, se face mai comod folosind numerele din algebră sub forma (12),

$$a_n = \sum_1^p b_{ni}\,\varepsilon_i + \sum_1^q c_{nj}\,\varepsilon_j' \ (c_{nj} = \alpha_{nj} + \sqrt{-1}\,\beta_{nj}),$$

$$\omega = \sum_1^p x_i\,\varepsilon_i + \sum_1^q z_j\,\varepsilon_j' \ (z_j = u_j + \sqrt{-1}\,v_j).$$

În această bază $S(\omega)$ devine

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{0}^{\infty} b_{ni}\, x_i^n\right)\varepsilon_i + \sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{0}^{\infty} c_{nj}\, z_j^n\right)\varepsilon_j',$$

descompunîndu-se în suma directă a p serii de variabile reale x_i și coeficienții reali b_{ni}

$$X_i = \sum_{0}^{\infty} b_{ni}\, x_i^n \quad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{22}$$

și a q serii complexe

$$Z_j = \sum_{0}^{\infty} c_{nj}\, z_j^n \quad (j = 1, 2, \ldots, q). \tag{23}$$

Dacă r_i și R_j sînt respectiv razele de convergență ale seriilor (22) și (23), neegalitățile

$$|x_i| < r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$
$$|Z_j| < R_j \quad (j = 1, 2, \ldots, q),$$

definesc în spațiul variabilei ω un domeniu $n+1$ dimensional de centru originea axelor, pentru punctele căruia seria (21) este convergentă.

În virtutea teoremelor relative la seriile (22) și (23), în acest domeniu seria (21) este absolut și uniform convergentă. Pentru punctele de pe frontieră a cărui ecuație este

$$|x_i| = r_i,$$
$$|z_j| = R_j,$$

situația este nesigură, ca și în cazurile cunoscute.

Prin convergența absolută a seriei (21) se înțelege convergența seriei

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{p}\left(\Sigma\,|b_{ni}\, x^n|\right) + \sum_{j=1}^{q}\left(|c_{nj}|\cdot|z_j^n|\right). \tag{24}$$

Norma sumei seriei $S(\omega)$ este dată de

$$N[S(\omega)] = \prod_{i=1}^{p} X_i \prod_{j=1}^{q} |Z_i|^2.$$

Dacă unul din numerele r_i sau R_j este nul, atunci $S(\omega)$ este un divizor al lui zero și norma sa este nulă. Domeniul de convergențe este o varietate cu $n+1-h-2k$ dimensiuni, dacă h dintre numerele r_i sînt nule și k dintre numerele R_j sînt de asemenea nule.

Faptul că norma lui $S(\omega)$ este finită nu implică că seriile (22) și (23) sînt simultan convergente. Într-adevăr, hipersuprafața

$$\prod_{i=1}^{p} X_i \prod_{j=1}^{q} |Z_j|^2 = C$$

are puncte la infinit, deoarece hiperplanele cu n dimensiuni

$$X_i = 0$$

sau cu $n-1$ dimensiuni

$$|Z_j| = 0$$

sînt varietăți asimptotice.

Seria

$$S(\omega) = 1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^n + \ldots$$

are $r_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ şi $R_j = 1$ $(j = 1, 2, \ldots q)$, deci pentru punctele situate în interiorul hipersuprafeţei închise

$$|x_i| = 1,$$
$$|Z_j| = 1,$$

$S(\omega)$ este convergentă şi are ca sumă $\dfrac{1}{1-\omega}$.

Să considerăm acum seria (21) sub forma

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{0}^{\infty} b_{ni}\, x_i^n \right) \varepsilon_i + \sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{0}^{\infty} c_{nj}\, z_j^n \right) \varepsilon_j', \tag{25}$$

de domeniu de convergenţă

$$\begin{aligned} |x_i| &< r_i, \\ |z_j| &< R_j, \end{aligned} \tag{26}$$

cu r_i şi R_j nu toate nule şi un punct

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{p} x_{0i}\, \varepsilon_i + \sum_{j=1}^{q} z_{0j}\, \varepsilon_j'$$

situat în domeniul de convergenţă (26). Dezvoltînd în jurul punctului ω_0 pe (25) avem

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{0}^{\infty} b'_{ni}\, (x_i - x_{0i})^n \right) \varepsilon_i + \sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{0}^{\infty} c'_{nj}\, (z_j - z_{0j})^n \right) \varepsilon'_j,$$

cu

$$b'_{ni} = \frac{1}{n!} X_i^{(n)}(x_{0i}),$$

$$c'_{nj} = \frac{1}{n!} Z_j^{(n)}(z_{0j}),$$

deci

$$S(\omega) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\omega - \omega_0)^n\, S^{(n)}(\omega), \tag{27}$$

unde $S^{(n)}(\omega_0)$ se obţine din (21), derivînd formal termen cu termen şi luînd valoarea sumei seriei derivate în punctul ω_0.

Domeniul de convergenţă al seriei (27) are centrul în ω_0 şi este definit de

$$|x_i - x_{0i}| < r_i - |x_{0j}|,$$
$$|z_j - z_{0j}| < R_j - |z_{0j}|$$

În (27) $S^{(n)}(\omega_0)$ sînt finite, deoarece seriile derivate au acelaşi domeniu de convergenţă.

5. *Funcţii monogene de variabila* ω. Pentru ca să avem

$$\int_c f(\omega)\, d\omega = 0, \tag{28}$$

pe o curbă închisă (C) arbitrară, situată într-un domeniu (D) din spațiul lui ω, trebuie ca $f(\omega)$ să nu aibă singularități în (D), sau (C) să se poată reduce la un punct prin deformări continue, fără să întîlnească aceste singularități și, în plus, diferențiala exterioară a expresiei,

$$f(\omega)\, d\omega$$

să fie nulă. Acest fapt conduce la condiția ca produsul exterior

$$d[f(\omega)]\, d\omega \tag{29}$$

să fie nul.

Anulînd coeficientul lui $dx_i\, dx_k$, din (29), obținem condițiile de monogeneitate sub forma hipercomplexă

$$\theta_i \frac{\partial f(\omega)}{\partial x_k} = \theta_k \frac{\partial f(\omega)}{\partial x_i}. \tag{30}$$

Condițiile (30) sînt suficiente. Pentru a arăta că sînt necesare, trebuie să arătăm că derivatele lui $f(\omega)$ după diferite direcții coincid.

Dacă luăm pentru aceste direcții, direcțiile Ox_i , Ox_k , trebuie să avem

$$\left[\frac{df(\omega)}{d\omega}\right]_{0x_i} = \left[\frac{df(\omega)}{d\omega}\right]_{0x_k},$$

din care obținem

$$\frac{1}{\theta_i}\frac{\partial f(\omega)}{\partial x_i} = \frac{1}{\theta_k}\frac{\partial f(\omega)}{\partial x_k}; \tag{31}$$

cum θ_i, θ_k nu sînt divizori ai lui zero, relațiile (30) sînt identice cu (31).

În relațiile (30), dintre care numai n sînt distincte, identificînd coeficienții lui θ_i, obținem $n(n+1)$ relații între derivatele parțiale ale funcțiilor conjugate U_i,

$$f(\omega) = U_0 + \theta_1 U_1 + \ldots + \theta_n U_n ;$$

putem deci exprima orice derivată parțială de ordinul întîi a funcțiilor U_i numai cu ajutorul derivatelor parțiale de ordinul întîi ale unei singure funcții conjugate, U_0, de exemplu:

În relația (28) dacă anulăm coeficientul lui θ_k și înlocuim derivatele parțiale ale funcțiilor conjugate U_i cu derivatele parțiale ale unei singure funcții conjugate U_0, de exemplu, sîntem conduși la o formulă de tip Green.

Formule analoge putem obține pentru orice funcție conjugată U_i.

Același rezultat se obține dacă se pornește de la relația evidentă

$$\int_C d\, U_k = 0,$$

înlocuind derivatele parțiale ale lui U_k cu combinații liniare între derivatele parțiale ale oricăreia din funcțiile conjugate. Avem, prin urmare, $n(n+1)$ formule de tip Green. Derivatele parțiale ale unei singure funcții conjugate intervin în n formule de tip Green.

O funcție monogenă $f(\omega)$, ale cărei funcții conjugate U_i verifică deci relațiile de monogeneitate (30), este soluție și a sistemului de ecuații diferențiale de ordinul doi, care se obține din (3), și anume

$$\delta_{1i}(f) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i} + \sum_{k=0}^{n} a_{1ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_k} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{32}$$

Punînd

$$f(\omega) = f(x_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_n x_n),$$

avem imediat

$$\delta_{1i}(f) = \frac{d^2 f}{d\omega^2}\left(-\theta_1\theta_i + \sum_{k=0}^{n} a_{1ik}\theta_k\right) = 0.$$

Dacă din (3) luăm relaţia

$$\theta_1^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{11k}\theta_k \quad (\theta_0 = 1)$$

şi considerăm şi relaţiile

$$\theta_j^2 = \sum_{k=0}^{n} a_{jjk}\theta_k \quad (j = 2, 3, \ldots, n)$$

deduse din (3), putem elimina pe $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n$ şi obţinem astfel o legătură liniară între $\theta_1^2, \theta_1^2, \ldots, \theta_n^2$,

$$\alpha_0 + \alpha_1\theta_1^2 + \alpha_2\theta_2^2 + \ldots + \alpha_n\theta_n^2 + \beta\theta_1 = 0. \tag{33}$$

O funcţie monogenă de variabila ω este, prin urmare, soluţia şi a unei ecuaţii de forma

$$\sum_{0}^{n} \alpha_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_i} = 0. \tag{33'}$$

Putem determina pe α_i şi β_i astfel ca ecuaţia (33') să se reducă la ecuaţia lui Laplace în $n+1$ variabile, sau la ecuaţia undelor, ceea ce implică $n+1$ legături suplimentare între coeficienţii a_{1jk}. Deoarece coeficienţii ecuaţiilor (32) şi (33') sînt reali, urmează că funcţiile reale U_i, componente ale funcţiei monogene $f(\omega)$, sînt de asemenea soluţii ale acestor ecuaţii diferenţiale. Este evident că funcţiile U_i sînt funcţii armonice dacă ecuaţia (33') este ecuaţia lui Laplace, şi prin urmare se bucură de toate proprietăţile funcţiilor armonice. Clasa lor este mai restrînsă însă decît a funcţiilor armonice, întrucît U_i sînt soluţii ale sitemului (32), ceea ce pentru funcţiile armonice nu se întîmplă în general. Să mai remarcăm că diferenţiala exterioară a expresiei

$$f(\omega)\, d\sigma_{1i},$$

cu

$$d\sigma_{1i} = a_{1i0}dx_1dx_2 \ldots dx_n - a_{1i1}\, dx_0dx_2 \ldots dx_n + \ldots +$$
$$+(-1)^n\, a_{1in}\, dx_0x_1 \ldots dx_{n-1} + (-1)^i\theta_1 dx_0 \ldots dx_{i-1}dx_{i+1} \ldots dx_n,$$

este nulă, în virtutea lui (3) şi prin urmare avem

$$\int_{\Omega_n} f(\omega)\, d\sigma_{1i} = 0, \tag{34}$$

unde Ω_n este o varietate n — dimensională, închisă, în spaţiul lui ω, satisfăcînd condiţiilor de aplicabilitate ale formulelor stokiene.

6. $N+1$ *edre de monogeneitate.* Dacă $F(\omega)$ este o funcţie monogenă de ω şi $\omega = \varphi(\Omega)$ de asemenea monogenă de Ω, avem

$$\frac{dF}{d\Omega} = \frac{dF}{d\omega}\frac{d\omega}{d\Omega} \tag{35}$$

şi $F[\varphi(\Omega)]$ este monogenă în Ω. Dacă $\Omega = a_\omega$,

$$\Omega = X_0 + \theta_1 X_1 + \ldots + \theta_n X_n,$$

iar a nu este un divizor al lui zero, $\frac{\Omega}{a}$ este monogenă în Ω şi condiţiile de monogeneitate în raport cu ω sau Ω au aceeaşi formă

$$\theta_k \frac{\partial F}{\partial X_i} = \theta_i \frac{\partial F}{\partial X_k}.$$

Insă

$$X_i = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n)$$

reprezintă $n+1$ drepte concurente, în spaţiul variabilei ω.

Faţă de acest $n+1$ —edru, relaţiile de monogeneitate se păstrează şi de aceea îl vom numi $n+1$ —edru de monogeneitate. Dacă printr-un punct dat considerăm o direcţie fixă X_i, deci de parametri directori daţi, atunci constanta hipercomplexă a este complet determinată, deci sînt determinate şi cele n direcţii X_k asociate $n+1$ —edrului de monogeneitate.

Dacă între parametri directori ai direcţiei X_i nu există o legătură de formă (10), atunci cele n direcţii asociate sînt unic determinate. În caz contrar, a este un divizor al lui zero şi direcţiile asociate sînt nedeterminate.

Dacă $\varphi(\omega)$ este o funcţie oarecare, monogenă, de funcţii conjugate U_i

$$\varphi(\omega) = U_0 + \theta_1 U_1 + \ldots + \theta_n U_n,$$

tangentele într-un punct de intersecţie al curbelor (varietăţi unidimensionale în spaţiul lui ω)

$$U_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lambda_i \quad (i = 0,1,\ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n)$$

formează un $n+1$ -edru de monogeneitate, mobil cu punctul de intersecţie, deci cu λ_i, care sînt parametri arbitrari. Dacă $\varphi(\omega)$ nu este un divizor al lui zero, în punctul considerat $n+1$ —edrul este unic determinat; în caz contrar este nedeterminat. Vom spune că $n+1$ —edrul de monogeneitate formează un sistem $n+1$ —ortogonal în sens P. Appell, prin analogie cu fenomenul analog din cazul variabile complexe. Tot în acest sens putem spune că hipersuprafeţele conjugate $U_i = \lambda_i$ formează o reţea $n+1$ —ortogonală în sens P. Appell.

7. *Teoremă generală.* Să considerăm acum expresia diferenţială

$$\frac{d(\omega - \tau)}{\omega - \tau} = Y_0 + \theta_1 Y_1 \ldots + \theta_n Y_n,$$

τ fiind un număr hipercomplex fix. Dacă notăm cu

$$\omega - \tau = x_0 + \theta_1 x_1 + \ldots + \theta_n x_n,$$

avem

$$\frac{d(\omega - \tau)}{\omega - \tau} = \frac{dx_0 + \theta_1 dx_1 + \ldots + \theta_n dx_n}{x_0 + \theta_1 x_1 + \ldots + \theta_n x_n} = Y_0 + \theta_1 Y_1 + \ldots + \theta_n Y_n,$$

relaţie care este o identitate în θ_i, deci este valabilă dacă înlocuim pe θ_i cu μ_{ij}; avem aşadar $n+1$ relaţii

$$\frac{dx_0 + \mu_{1j}\,dx_1 + \ldots + \mu_{nj}\,dx_n}{x_0 + \mu_{1j}\,dx_1 + \ldots + \mu_{nj}\,dx_n} = Y_0 + \mu_{1j}\,Y_1 + \ldots + \mu_{nj}\,Y_n,$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

care determină pe $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$. Dacă ecuaţia (7) ($k = 1$) are toate rădăcinile distincte, Y_i sînt date de

$$Y_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mu_{10} \ldots \mu_{k-1,0} & A_0 & \mu_{k+1,0} & \ldots & \mu_{n0} \\ 1 & \mu_{11} \ldots \mu_{k-1,1} & A_1 & \mu_{k+1,1} & \ldots & \mu_{n1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & \mu_{1n} \ldots \mu_{k-1,n} & A_n & \mu_{k+1,n} & \ldots & \mu_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \mu_{10} & \ldots & \mu_{n0} \\ 1 & \mu_{11} & \ldots & \mu_{n1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & \mu_{1n} & \ldots & \mu_{nn} \end{vmatrix}} \tag{36}$$

unde am notat

$$A_k = \frac{dx_0 + \mu_{1k}\,dx_1 + \ldots + \mu_{nk}\,dx_n}{x_0 + \mu_{1k}\,x_1 + \ldots + \mu_{nk}\,x_n},$$

deci Y sînt expresii liniare de A_i ($i = 0, 1, \ldots, n$).

Acestea fiind spuse, să considerăm o rădăcină complexă μ_{ij} a ecuaţiei (7). Deoarece algebra este construită pe corpul numerelor reale, coeficienţii ecuaţiilor (7) sînt reali, deci admit şi rădăcina conjugată $\overline{\mu}_{ij}$. Avem aşadar rădăcinile imaginar conjugate

$$\begin{matrix} \mu_{1j}, & \overline{\mu}_{1j}, \\ \mu_{2j}, & \overline{\mu}_{2j}, \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \mu_{nj}, & \overline{\mu}_{nj}, \end{matrix} \tag{37}$$

care pot fi distincte sau nu.

Să calculăm acum integrala

$$\int_{C_j} \frac{d(\omega - \tau)}{\omega - \tau},$$

pe curba C_j închisă care înconjoară punctul τ, situată pe varietatea divizor prim al lui zero, determinată de ecuaţiile

$$x_0 + \mu_{1j}\,x_1 + \ldots + \mu_{ni}\,x_n = 0, \tag{38}$$

în număr de $n-1$, unde μ_{ki} sînt rădăcinile ecuaţiilor (7) în afară de μ_{kj} şi $\overline{\mu}_{kj}$.

Datorită relațiilor (38), în (36) Y_k nu conține decît pe A_j și $\overline{A}_j$, relative la rădăcinile μ_{kj} și $\overline{\mu_{kj}}$.

În această situație, derivata logaritmică a lui $\omega - \tau$ se scrie

$$\left(\frac{d(\omega-\tau)}{\omega-\tau}\right)_{C_j} = \sum_0^n \theta_k \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mu_{10} & \dots & \mu_{k-1,0} & 0 & \mu_{k+1,0} & \dots & \mu_{n0} \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ 1 & \mu_{1j} & \dots & \mu_{k-1,j} & A_j & \mu_{k+1,j} & \dots & \mu_{n,j} \\ 1 & \overline{\mu}_{1j} & \dots & \overline{\mu}_{k-1,j} & \overline{A}_j & \overline{\mu}_{k+1,j} & \dots & \overline{\mu}_{n,j} \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ 1 & \mu_{1n} & \dots & \mu_{k-1,n} & 0 & \mu_{k+1,n} & \dots & \mu_{n,n} \end{vmatrix}}{D}, \quad (39)$$

unde D este determinatul de la numitor din (36). Expresia din (39) este un divizor prim al lui zero. Într-adevăr, pentru $\theta_k = \mu_{ki}$ și $\mu_{ki} \neq \mu_{kj}$; $\mu_{ki} \neq \overline{\mu_{kj}}$, expresia (9) este identic nulă. Dezvoltînd pe (39), avem

$$\left(\frac{d(\omega-\tau)}{\omega-\tau}\right)_{C_j} = \sum_0^n \theta_k \frac{1}{D}(A_j \overline{P}_{jk} - \overline{A}_j P_{jk}), \quad (39')$$

unde P_{jk} și $\overline{P}_{jk}$ sînt două constante bine determinate, imaginar conjugate. Separînd termenul hipercomplex din (39') și ținînd seama că este un divizor prim al lui zero, putem scrie

$$\left[\frac{d(\omega-\tau)}{\omega-\tau}\right]_{C_j} = I_j m_j (A_j \overline{P}_j^* - \overline{A}_j P_j^*),$$

m fiind o constantă hipercomplexă, I_j divizorul prim al lui zero care este de forma

$$I_j = \sum_{k=1}^n \left[\lambda_k \prod_{\substack{\mu_{ki} \neq \mu_{kj} \\ \mu_{ki} \neq \overline{\mu}_{kj}}} (\theta_k - \mu_{ki})\right],$$

unde λ_k sînt constante reale sau complexe, iar P_j^* și $\overline{P}_j^*$ constante complexe conjugate. Dacă notăm

$$A_j = \frac{dX_j' + \sqrt{-1}\, dX_j''}{X_j' + \sqrt{-1}\, X_j''},$$

obținem

$$\left[\frac{d(\omega-\tau)}{\omega-\tau}\right]_{C_j} = I_j \left[m_j^* \frac{X_j' dX_j'' - X_j' dX_j'}{x_j'^2 + X_j''^2} + m_j^{**} \frac{X_j' dx_j' + x_j'' dx_j''}{x_j'^2 + x_j''^2}\right]$$

și integrînd pe curba închisă C care conține în interior punctul τ, avem

$$\int_{C_j} \frac{d\omega}{\omega - \tau} = I_j m_j^* 2\pi.$$

Dacă $f(\omega)$ este continuă în vecinătatea punctului τ, avem

$$\int_{C_j} \frac{f(\omega)\, d_\omega}{\omega - \tau} = I_j\, m_j^* 2\pi f(\tau), \tag{40}$$

relaţie care nu ne dă pe $f(\tau)$, deoarece nu putem împărţi cu divizorul lui zero I_j. Dacă ecuaţia (7) ($k = 1$) are numai rădăcini imaginare, relaţiile (40) determină complet pe $f(\tau)$,

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \int_{C_j} \frac{f(\omega)\, d}{\omega - \tau} = \left(\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} I_j\, m_j^* \right) f(\tau) \; ; \tag{41}$$

deoarece expresia

$$w = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} (I_j\, m_j^*) \tag{42}$$

care amplifică pe $f(\tau)$ nu este un divizor al lui zero, putem împărţi cu ea şi avem

$$f(\tau) = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \int_{C_j} \frac{f(\omega)}{\omega - \tau}\, d\omega \tag{43}$$

Dacă ecuaţia (7) ($k = 1$) admite p rădăcini reale distincte, atunci pentru a cunoaşte valoarea funcţiei într-un punct oarecare τ, este necesar să fie cunoscută valoarea funcţiei pe divizorii primi ai lui zero relativi la aceste rădăcini. Adăugînd la aceste date rezultatele din (41), se obţine valoarea funcţiei în punctul τ.

8. *Formule de tip Green.* Pentru a duce la capăt calculele, vom considera în cele ce urmează algebrele A_3, cu elementele bazei 1, θ_1, θ_2.

Funcţiile conjugate U_i ale unei funcţii monogene

$$f(\omega) = U_0 + \theta_1\, U_1 + \theta_2\, U_2$$

sînt legate de relaţiile

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_0}{\partial x_0} &= D\left[a_{220} \frac{\partial U_0}{\partial x_1} - a_{120} \frac{\partial U_0}{\partial x_2} \right], \\
\frac{\partial U_1}{\partial x_1} &= D\left[(a_{110} a_{220} - a_{120}^2) \frac{\partial U_0}{\partial x_0} + (a_{111}\, a_{220} - a_{120}\, a_{121}) \frac{\partial U_0}{\partial x_1} + \right. \\
&\qquad \left. (a_{121} a_{110} - a_{111} a_{120}) \frac{\partial U_0}{\partial x_2} \right], \\
\frac{\partial U_1}{\partial x_2} &= D\left[(a_{121} a_{220} - a_{221} a_{120}) \frac{\partial U_0}{\partial x_1} + (a_{221} a_{110} - a_{121} a_{120}) \frac{\partial U_0}{\partial x_2} \right], \\
\frac{\partial U_2}{\partial x_0} &= D\left[a_{110} \frac{\partial U_0}{\partial x_2} - a_{120} \frac{\partial U_0}{\partial x_1} \right], \\
\frac{\partial U_2}{\partial x_1} &= D\left[(a_{112} a_{220} - a_{122}\, a_{120}) \frac{\partial U_0}{\partial x_1} + (a_{122} a_{110} - a_{122} a_{120}) \frac{\partial U_0}{\partial x_2} \right], \\
\frac{\partial U_2}{\partial x_2} &= D\left[(a_{110}\, a_{220} - a_{120}^2) \frac{\partial U_0}{\partial x_0} + (a_{122} a_{220} - a_{222} a_{120}) \frac{\partial U_0}{\partial x_1} + \right. \\
&\qquad \left. (a_{222} a_{110} - a_{122} a_{120}) \frac{\partial U_0}{\partial x_2} \right],
\end{aligned} \tag{44}$$

pe care le-am scris explicitînd derivatele parţiale ale lui U_1 şi U_2 în funcţie de derivatele parţiale ale lui U_0 şi în care

$$\frac{1}{D} = a_{110}a_{220} - a^2_{120}, \tag{45}$$

$\frac{1}{D}$ fiind diferit de zero, condiţie care trebuie să fie satisfăcută de a_{ijk} pentru ca relaţiile (44) să aibă sens. Pornind de la

$$\int_C dU_1 = 0,$$

obţinem formula lui Green

$$\int_C \left[a_{220}\frac{\partial U_0}{\partial x_1} - a_{120}\frac{\partial U_0}{\partial x_2}\right] dx_0 + \int_C \left[(a_{110}a_{220} - a^2_{120})\frac{\partial U_0}{\partial x_0} + (a_{111}a_{220} - a^2_{121})\right.$$

$$\left.\frac{\partial U_0}{\partial x_1} + (a_{121}a_{110} - a_{111}a_{120})\frac{\partial U_0}{\partial x_2}\right] dx_1 + \int_C \left[(a_{121}a_{220} - a_{221}a_{120})\frac{\partial U_0}{\partial x_1} + \right. \tag{46}$$

$$\left.(a_{221}a_{110} - a_{121}a_{120})\frac{\partial U_0}{\partial x_2}\right] dx_2 = 0.$$

Relaţiei (46) îi putem da o expresie simplă, dacă introducem cîteva elemente ale spaţiului variabilei ω. Astfel, vom numi elementul de arc al unei curbe, norma lui $d\omega$

$$\overset{1}{ds} = N^3(d\omega)$$

şi se obţine din (9) înlocuind pe x_i cu dx_i. Unei direcţii (L) $\overline{\omega_1\omega_2}$ din spaţiul lui ω, de parametrii directori $x_i^2 - x_i^1$, îi asociem funcţiile

$$ap_i(L) = \frac{x_i^2 - x_i^1}{\overset{1}{N^3}(\omega_2 - \omega_1)} = \frac{dx_i}{ds}, \tag{47}$$

care o determină complet. Funcţiile $ap_i(L)$ sînt nişte cosinusuri ai lui P. Appell, deoarece numărul

$$ap_0(L) + \theta_1\, ap_1(L) + \theta_2\, ap_2(L)$$

are norma egală cu unitatea.

Derivata unei funcţii $G(M)$, după direcţia (L), în acest spaţiu, se defineşte în modul următor

$$\lim_{\substack{\overset{1}{N^3}(M_2 - M_1) \\ M_2 \to M_1}} \frac{G(M_2) - G(M_1)}{\overset{1}{N^3}(M_2 - M_1)} = \frac{\partial G}{\partial x_0}ap_0(L) + \frac{\partial G}{\partial x_1}ap_1(L) + \frac{\partial G}{\partial x_2}ap_2(L). \tag{48}$$

Este necesar să remarcăm că, pentru ca formula (48) să fie sensibilă la schimbarea de sens după direcţia (L), trebuie ca în (47), la numitor, să luăm valoarea absolută a normei.

Înlocuind pe dx_i cu $ap_i(L)\,ds$ în (46), obținem

$$\int_C \left(A_0 \frac{\partial U_0}{\partial x_0} + A_1 \frac{\partial U_0}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U_0}{\partial x_2}\right) ds = 0, \tag{46'}$$

unde am notat

$$A_0 = (a_{110} \cdot a_{220} - a_{120}^2)\, ap_1(L),$$

$$A_1 = a_{220} \cdot ap_0(L) + (a_{111} \cdot a_{220} - a_{121} \cdot a_{120})\, ap_1(L) + (a_{121} \cdot a_{220} - a_{221} \cdot a_{120})\, ap_2(L),$$

$$A_2 = a_{120}\, ap_0(L) + (a_{121} \cdot a_{110} - a_{111} \cdot a_{120})\, ap_1(L) + (a_{221} \cdot a_{110} - a_{121} \cdot a_{120})\, ap_2(L).$$

Să observăm că A_0, A_1, A_2 sînt parametrii directori în sens P. Appell ai unei direcții, variabile cu punctul M de pe curba (C). Într-adevăr, dacă punem

$$A = A_0 + A_1\theta_1 + A_2\theta_2,$$

$$B = a_{220}\theta_1 - a_{120}\theta_2,$$

$$C = ap_0(L) + \theta_1\, ap_1(L) + \theta_2\, ap_2(L),$$

avem

$$A = B \,.\, C,$$

deci

$$N(A) = N(B \,.\, C) = N(B) = \text{const.},$$

deoarece $N(B)$ depinde numai de constantele de structură ale algebrei. Prin urmare, relațiile (46) sau (46') se pot scrie

$$\int \frac{dU_0}{dL_M}\, ds = 0, \tag{46''}$$

direcția L_M fiind variabilă cu punctul M. Rezultatul obținut pentru formula de tip Green, care conține pe U_0, se extinde și la celelalte formule de tip Green care conțin funcțiile conjugate U_i, numai că direcțiile L_M nu coincid.

Dacă pornim de la

$$\int_C dU_2 = 0,$$

obținem

$$\int_C \left(a_{110} \frac{\partial U_0}{\partial x_2} - a_{120} \frac{\partial U_0}{\partial x_1}\right) dx_0 +$$

$$+ \int_C \left[(a_{112}\, a_{220} - a_{122}\, a_{120}) \frac{\partial U_0}{\partial x_1} + (a_{122}\, a_{110} - a_{112}\, a_{120}) \frac{\partial U_0}{\partial x_2}\right] dx_1 +$$

$$+ \int_C \left[(a_{110}\, a_{220} - a_{120}^2) \frac{\partial U_0}{\partial x_0} + (a_{122}\, a_{220} - a_{222}\, a_{120}) \frac{\partial U_0}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. (a_{222}\, a_{110} - a_{122}\, a_{120}) \frac{\partial U_0}{\partial x_2}\right] dx_2 = 0,$$

care se mai scrie

$$\int_C \frac{dU_0}{dL_M^*}\, ds = 0,$$

unde L_M^* are parametrii directori, componentele numărului hipercomplex

$$A^* = [ap_0(L) + \theta_1 ap_1(L) + \theta_2 ap_2(L)]\ [-a_{120}\theta_1 + a_{110}\theta_2],$$

direcția L_M^* fiind și de data aceasta variabilă cu punctul M de pe (C).

Componentele reale ale lui A și A^* sînt parametrii directori a două direcții L_M și L_M^* care, împreună cu tangenta la curbă în punctul curent M, formează un triedru de monogeneitate. Aceasta se verifică imediat, observînd că dacă înmulțim pe ω cu

$$E = (a_{110}a_{220} - a_{120}^2)\, ap_0(L) + [a_{220}\, ap_1(L) - a_{120}\, ap_2(L)]\,\theta_1 + [a_{110}\, ap_2(L) - a_{120}\, ap_1(L)]\,\theta_2,$$

obținem

$$E = E_0 + \theta_1 E_1 + \theta_2 E_2,$$

planele E_0, E_1 și E_2 avînd aceiași parametri directori ca și direcțiile următoare: tangenta la curba C în punctul M, direcția L_M și direcția L_M^*, respectiv.

Pentru parametrii directori ai tangentei în punctul M s-au luat cantitățile

$$\frac{ap_i(L)}{D},$$

care sînt evident proporționale cu dx_0, dx_1 și dx_2 deoarece

$$\frac{ap_i(L)}{D} = \frac{dx_i}{D\,.\,ds} \quad (i = 0, 1, 2).$$

Rezultatul obținut se extinde la o algebră A_{n+1} și se enunță în modul următor:

Funcțiile conjugate U_i ale unei funcții monogene de o variabilă ω verifică relația integrală

$$\int \frac{dU_i}{dL_M}\, ds = 0,$$

(C) fiind situată în regiunea de monogeneitate a funcției considerate și unde

$$ds = N^{\frac{1}{n+1}}\,(d\omega)$$

iar

$$\frac{dU_i}{dL_M}$$

este derivata după direcția L_M în acest spațiu, direcția L_M fiind una din direcțiile care, împreună cu tangenta la curba (C) într-un punct curent M, formează un $n+1$ — edru de monogeneitate.

9. *Funcții transcendente elementare.* Înainte de a trece la transformări prin funcții monogene, să stabilim cîteva proprietăți ale cosinușilor definiți prin (19). Dacă considerăm o dreaptă (L) definită de două puncte ω_1, ω_2 în spațiul cu trei dimensiuni, parametrii directori sînt

$$x_0^2 - x_0^1\ ,\ x_1^2 - x_1^1\ ,\ x_2^2 - x_2^1.$$

Asociem acestei direcţii funcţiile

$$ap_0(L) = \frac{x_0^2 - x_0^1}{\frac{1}{N^3}(\omega_2 - \omega_1)},$$

$$ap_1(L) = \frac{x_1^2 - x_1^1}{\frac{1}{N^3}(\omega_2 - \omega_1)}, \tag{49}$$

$$ap_2(L) = \frac{x_2^2 - x_2^1}{\frac{1}{N^3}(\omega_2 - \omega_1)}.$$

Din relaţia

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\frac{1}{N^3}(\omega_2 - \omega_1)} = \exp(\theta_1\varphi_1 + \theta_2\varphi_2)$$

(unde presupunem că un număr din algebră are forma (15)), deducem

$$\exp(\theta_1\varphi_1 + \theta_2\varphi_2) = ap_0(L) + \theta_1 ap_1(L) + \theta_2 ap_2(L), \tag{50}$$

deci $ap_i(L)$ sînt funcţii de cele două argumente φ_1 şi φ_2. Prin urmare, unei direcţii (L_1) din spaţiu îi ataşăm trei funcţii $ap_i(\varphi_1,\varphi_2)$ care depind de doi parametri φ_1 şi φ_2.

Dacă φ_1 şi φ_2 se amplifică respectiv cu ψ_1 şi ψ_2, la argumentele

$$\varphi_1 + \psi_1 = \Phi_1,$$
$$\varphi_2 + \psi_2 = \Phi_2,$$

corespunde o nouă direcţie (L_2), definită de

$$ap_i(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2) \quad (i = 0, 1, 2).$$

Deci, la variaţia de direcţie a direcţiei (L) corespunde o variaţie a argumentelor φ_1 şi φ_2. Legea de însumare a argumentelor funcţiilor ap_i se deduce uşor din (20) şi se face după formula lui Moivre

$$\sum_0^2 \theta_i ap_i(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2) = \left(\sum_0^2 \theta_i ap_i(\varphi_1, \varphi_2)\right)\left(\sum_0^2 \theta_i ap\ (\psi_1, \psi_2)\right) \quad (\theta_0 = 1).$$

Întrucît ne va interesa

$$ap_i(\psi_1, \psi_2) = ap_i(\Phi_1 - \varphi_1, \Phi_2 - \varphi_2),$$

care este dat de

$$\sum_0^2 \theta_i ap_i(\Phi_1 - \varphi_1, \Phi_2 - \varphi_2) = \frac{\sum_0^2 \theta_i ap_i(\Phi_1, \Phi_2)}{\sum_0^2 \theta_i ap_i(\varphi_1, \varphi_2)},$$

urmează să găsim inversul lui $\sum_0^2 \theta_i ap_i(\varphi_1, \varphi_2)$. În general, inversul τ al unui număr din algebră ω este dat de relaţia

$$\omega \cdot \tau = 1.$$

Dacă

$$\omega = x_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2,$$
$$\tau = Y_0 + \theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2,$$

sîntem conduși la sistemul

$$x_0 y_0 + a_{110} \cdot x_1 y_1 + a_{220} \cdot x_2 y_2 + a_{120}(x_1 y_2 + x_2 y_1) = 1,$$
$$x_0 y_1 + x_1 y_0 + a_{111} \cdot x_1 y_1 + a_{221} \cdot x_2 y_2 + a_{121}(x_1 y_2 + x_2 y_1) = 0,$$
$$x_2 y_0 + x_0 y_2 + a_{112} x_1 y_1 + a_{222} x_2 y_2 + a_{122}(x_1 y_2 + x_2 y_1) = 0.$$

Determinantul sistemului este norma numărului ω,

$$N(\omega) = \begin{vmatrix} x_0 & a_{110} x_1 + a_{120} x_2 & a_{120} x_1 + a_{220} x_2 \\ x_1 & x_0 + a_{111} x_1 + a_{121} x_2 & a_{121} x_1 + a_{221} x_2 \\ x_2 & a_{121} x_1 + a_{122} x_2 & x_0 + a_{122} x_1 + a_{222} x_2 \end{vmatrix}, \quad (51)$$

care este presupus diferit de zero, pentru ca τ să existe.

Avînd în vedere cele de mai sus, obținem pentru $ap_0(\Phi_1 - \varphi_1, \Phi_2 - \varphi_2)$ valoarea determinantului

$ap_0(\Phi_1, \Phi_2)$	$a_{110}\, ap_1(\Phi_1, \Phi_2) + a_{120}\, ap_2(\Phi_1, \Phi_2)$	$a_{120}\, ap_1(\Phi_1, \Phi_2) + a_{220} \cdot ap_2(\Phi_1, \Phi_2)$
$ap_1(\varphi_1, \varphi_2)$	$ap_0(\varphi_1, \varphi_2) + a_{111}\, ap_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_{121}\, ap_2(\varphi_1, \varphi_2)$	$a_{121}\, ap_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_{221}\, ap_2(\varphi_1, \varphi_2)$
$ap_2(\varphi_1\, \varphi_2)$	$a_{112}\, ap_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_{122}\, ap_2(\varphi_1, \varphi_2)$	$ap_0(\varphi_1, \varphi_2) + a_{122}\, ap_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_{222}\, ap_2(\varphi_1, \varphi_2)$

pentru $ap_1(\Phi_1 - \varphi_1, \Phi_2 - \varphi_2)$ valoarea

$ap_1(\Phi_1, \Phi_2)$	$ap_0(\Phi_1, \Phi_2) + a_{111}\, ap_1(\Phi_1, \Phi_2) + a_{121}\, ap_2(\Phi_1, \Phi_2)$	$a_{121}\, ap_1(\Phi_1, \Phi_2) + a_{221}\, ap_2(\Phi_1, \Phi_2)$
$ap_1(\varphi_1, \varphi_2)$	$ap_0(\varphi_1, \varphi_2) + a_{111}\, ap_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_{121}\, ap_2(\varphi_1, \varphi_2)$	$a_{121}\, ap_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_{221}\, ap_2(\varphi_1, \varphi_2)$
$ap_2(\varphi_1, \varphi_2)$	$a_{112}\, ap_1(\varphi_1, \varphi_2) + {}_{122}\, ap_2(\varphi_1, \varphi_2)$	$ap_0(\varphi_1, \varphi_2) + a_{122}\, ap_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_{222}\, ap_2(\varphi_1, \varphi_2)$

și pentru $ap_2(\Phi_1 - \varphi_1, \Phi_2 - \varphi_2)$ (52)

$ap_2(\Phi_1\, \Phi_2)$	$a_{112}\, ap_1(\Phi_1, \Phi_2) + a_{122}\, ap_2(\Phi_1, \Phi_2)$	$ap_0(\Phi_1, \Phi_2) + a_{122}\, ap_1(\Phi_1, \Phi_2) + a_{222}\, ap_2(\Phi_1, \Phi_2)$
$ap_1(\varphi_1, \varphi_2)$	$ap_0(\varphi_1, \varphi_2) + a_{111}\, ap_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_{121}\, ap_2(\varphi_1, \varphi_2)$	$a_{121}\, ap_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_{221}\, ap_2(\varphi_1, \varphi_2)$
$ap_2(\varphi_1\, \varphi_2)$	$a_{112}\, ap_1(\varphi_1\, \varphi_2) + a_{122}\, ap_2(\varphi_1, \varphi_2)$	$ap_0(\varphi_1, \varphi_2) + a_{122}\, ap_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_{222}\, ap_2(\varphi_1, \varphi_2)$

Dacă $\varphi_1 = \Phi_1$ și $\varphi_2 = \Phi_2$, avem imediat

$$ap_0(0,0) = 1,\ ap_1(0,0) = 0,\ ap_2(0,0) = 0.$$

Rezultatul obţinut se extinde cu uşurinţă la algebră A_{n+1}. Într-adevăr, $ap_i\,(\Phi_1 - \varphi_1, \Phi_2 - \varphi_2, \ldots, \Phi_n - \varphi_n)$ se obţine scriind norma numărului

$$ap_0 + \theta_1 ap_1 + \ldots + \theta_n ap_n \quad (ap_k = ap_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

şi înlocuind linia întîia cu linia $i+1$ a normei aceluiaşi număr, funcţiile ap_k depinzînd însă de astă dată de parametrii $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$. În acest caz general, cînd $\Phi_i = \varphi_i$, avem

$$\begin{aligned} &ap_0(0, 0, \ldots, 0) = 1, \\ &ap_i(0, 0, \ldots, 0) = 0 \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Se vede imediat că $ap_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt nule pentru $\varphi_i = 0$ şi pentru perioadele date de (17).

Derivatele parţiale ale acestor funcţii transcendente elementare în raport cu variabilele φ_k se calculează pornind de la relaţia

$$\exp\left(\sum_1^n \theta_i \varphi_i\right) = \sum_0^n \theta_i ap_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \quad (\theta_0 = 1),$$

deci

$$\theta_k\left(\sum_{i=0}^n ap_i(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n)\right) = \sum_0^n \theta_i \frac{\partial ap_i(\varphi_i, \varphi_2, \ldots \varphi_n)}{\partial \varphi_k} \tag{53}$$

şi derivata parţială a uneia dintre ele se obţine printr-o legătură liniară cu ajutorul constantelor de structură ale algebrei, între funcţiile ap_i.

10. *Transformări prin funcţii monogene.* Să considerăm acum transformarea punctuală a spaţiului ω în spaţiul Ω,

$$\begin{aligned} &\Omega = f(\omega), \\ &\omega = x_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2, \\ &\Omega = X_0 + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2, \end{aligned} \tag{54}$$

reversibilă, în care vom presupune că $f(\omega)$ este monogenă într-o regiune (D) a spaţiului ω, de care ne ocupăm. Jacobianul transformării este, ţinînd seamă de condiţiile de monogeneitate (44),

$\frac{\partial X_0}{\partial x_0}$	$\frac{\partial X_0}{\partial x_1}$	$\frac{\partial X_0}{\partial x_2}$
$a_{220}\frac{\partial X_0}{\partial x_1} - a_{120}\frac{\partial X_0}{\partial x_2}$	$(a_{110}\,a_{220} - a_{120}^2)\frac{\partial X_0}{\partial x_0} +$ $+ (a_{111}\,a_{220} - a_{121}^2)\frac{\partial X_0}{\partial x_1} +$ $+ (a_{121}\,a_{110} - a_{111}\cdot a_{120})\frac{\partial X_0}{\partial x_2}$	$(a_{121}\cdot a_{220} - a_{221}\cdot a_{120})\frac{\partial X_0}{\partial x_1}$ $+ (a_{221}\cdot a_{110} - a_{121}\cdot a_{120})\frac{\partial X_0}{\partial x_2}$
$a_{110}\frac{\partial X_0}{\partial x_2} - a_{120}\frac{\partial X_0}{\partial x_1}$	$(a_{112}\cdot a_{220} - a_{122}\cdot a_{120})\frac{\partial X_0}{\partial x_1}$ $+ (a_{122}\cdot a_{110} - a_{112}\cdot a_{120})\frac{\partial X_0}{\partial x_2}$	$(a_{110}\cdot a_{220} - a_{120}^2)\frac{\partial X_0}{\partial x_0} +$ $+ (a_{122}\cdot a_{220} - a_{222}\cdot a_{120})\frac{\partial X_0}{\partial x_1} +$ $+ (a_{222}\cdot a_{110} - a_{122}\cdot a_{120})\frac{\partial X_0}{\partial x_2}$

Deoarece derivata lui $f(\omega)$ este

$$f'(\omega) = \frac{\partial X_0}{\partial x_0} + \theta_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \theta_2 \frac{\partial X_2}{\partial x_2},$$

care se mai scrie, avînd în vedere relațiile (44),

$$f'(\omega) = \frac{\partial X_0}{\partial x_0} + \theta_1 D\left[a_{220}\frac{\partial X_0}{\partial x_1} - a_{120}\frac{\partial X_0}{\partial x_2}\right] + \theta_2 D\cdot\left[a_{110}\frac{\partial X_0}{\partial x_2} - a_{120}\frac{\partial X_0}{\partial x_1}\right],$$

se verifică imediat că determinantul transformării este chiar norma lui $f'(\omega)$,

$$N[f'(\omega)] = \frac{D(X_0, X_1, X_2)}{D(x_0, x_1, x_2)}$$

și deci transformarea este reversibilă pentru punctele în care derivata funcției de transformare nu este zero sau un divizor al lui zero.

Fie în spațiul lui ω domeniul (D) și în spațiul lui Ω domeniul (Δ), transformatul prin $f(\omega)$ al lui (D). În (D) să considerăm o curbă (γ) și în (Δ), transformata ei (γ'). Dacă M, N sînt două puncte vecine pe (γ) și M', N', transformatele lor pe (γ'), avem

$$\Delta\omega = N^{\frac{1}{3}}\ (NM)\ \exp(\theta_1\alpha_1 + \theta_2\alpha_2),$$

$$\Delta\Omega = N^{\frac{1}{3}}\ (N'M')\ \exp(\theta_1\beta_1 + \theta_2\beta_2)$$

și la limită obținem

$$\lim\frac{\Delta\Omega}{\Delta\omega} = f'(\omega) = \frac{dS}{ds}\ \exp\ [\theta_1(\varphi' - \varphi) + \theta_2(\psi' - \psi)],$$

unde ds și dS sînt elementele de arc în (ω) și (Ω) pe curbele (γ) și (γ'), iar φ', φ și ψ', ψ limitele argumentelor β_1, α_1, respectiv β_2, α_2, cînd N tinde către M și N' tinde către M'.

Dacă notăm

$$f'(\omega) = \varphi(x_0, x_1, x_2)\ \exp\ (\theta_1\chi + \theta_2\tau)$$

și socotim argumentele fără multiplu de perioade, avem

$$\begin{aligned} \frac{dS}{ds} &= \rho(x, y, z), \\ \chi &= \varphi' - \varphi, \\ \tau &= \psi' - \psi, \end{aligned} \tag{55}$$

prin urmare prin (54) se realizează o transformare astfel încît elementele de arc sînt proporționale, factorul de proporționalitate fiind norma derivatei funcției de transformare. Argumentele tangentei în punctul corespunzător de pe curba transformată se amplifică cu argumentele derivatei funcției de transformare, deci pentru două curbe care trec printr-un punct M din (D) tangentele în punctul de intersecție M fac același unghi (φ, ψ) în sens P. Appell ca și tangentele la curbele transformate în punctul comun M', transformatul lui M.

Se poate arăta că, dacă o transformare

$$\begin{aligned} X_0 &= X_0(x_0, x_1, x_2), \\ X_1 &= X_1(x_0, x_1, x_2), \\ X_2 &= X_2(x_0, x_1, x_2), \end{aligned} \tag{56}$$

păstrează unghiurile în sens P. Appell, atunci elementele de arc sînt proporționale. Pentru aceasta să considerăm în spațiul lui (ω) un punct M și două curbe (γ) și (Γ) ce trec prin M. În spațiul lui (Ω) prin transformarea (56) le corespunde punctul M' și curbele (γ') și (Γ'). Notînd cu d, deplasările pe (γ) și cu δ, deplasările pe (Γ), putem scrie

$$ap_0(\gamma, \Gamma)_M = \frac{1}{ds^2\,\delta s}\begin{vmatrix} \delta x_0 & a_{110}\delta x_1 + a_{120}\delta x_2 & a_{120}\delta x_1 + a_{220}\delta x_2 \\ dx_1 & dx_0 + a_{111}dx_1 + a_{121}dx_2 & a_{121}dx_1 + a_{221}dx_2 \\ dx_2 & a_{112}dx_1 + a_{122}dx_2 & dx_0 + a_{122}dx_1 + a_{222}dx_2 \end{vmatrix},$$

$$ap_1(\gamma, \Gamma)_M = \frac{1}{ds^2\,\delta s}\begin{vmatrix} \delta x_1 & \delta x_0 + a_{111}\delta x_1 + a_{121}\delta x_2 & a_{121}\delta x_1 + a_{221}\delta x_2 \\ dx_1 & dx_0 + a_{111}dx_1 + a_{121}dx_2 & a_{121}dx_1 + a_{221}dx_2 \\ dx_2 & a_{112}dx_1 + a_{122}dx_2 & dx_0 + a_{122}dx_1 + a_{222}dx_2 \end{vmatrix}, \tag{57}$$

$$ap_2(\gamma, \Gamma)_M = \frac{1}{ds^2\,\delta s}\begin{vmatrix} \delta x_2 & a_{112}\delta x_1 + a_{122}\delta x_2 & \delta x_0 + a_{122}\delta x_1 + a_{222}\delta x_2 \\ dx_1 & dx_0 + a_{111}dx_1 + a_{121}dx_2 & a_{121}dx_1 + a_{221}dx_2 \\ dx_2 & a_{112}dx_1 + a_{122}dx_2 & dx_0 + a_{122}dx_1 + a_{222}dx_2 \end{vmatrix}.$$

Funcțiile $ap_i(\gamma', \Gamma')_M$ se obțin din (57) înlocuind pe dx_i cu dX_i și pe δx_i cu δX_i.

Deoarece trebuie să avem

$$ap_i(\gamma, \Gamma)_M = ap_i(\gamma', \Gamma')_M, \quad (i = 0, 1, 2) \tag{58}$$

oricare ar fi $dx_0, dx_1, dx_2, \delta x_0, \delta x_1, \delta x_2$, obținem, identificînd coeficienții lui $\delta x_0, \delta x_1, \delta x_2$ din relațiile (58),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{ds^2\,\delta s}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ dx_1 & dx_0 + a_{111}dx_1 + a_{121}dx_2 & a_{121}dx_1 + a_{221}dx_2 \\ dx_2 & a_{112}dx_1 + a_{122}dx_2 & dx_0 + a_{122}dx_1 + a_{222}dx_2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{dS^2\delta S}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_0}{\partial x_0} & a_{110}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_0} + a_{120}\dfrac{\partial X_2}{\partial x_0} & a_{120}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_0} + a_{220}\dfrac{\partial X_2}{\partial x_0} \\ dX_1 & dX_0 + a_{111}dX_1 + a_{121}dX_2 & a_{121}dX_1 + a_{221}dX_2 \\ dX_2 & a_{112}dX_1 + a_{122}dX_2 & dX_0 + a_{122}dX_1 + a_{222}dX_2 \end{vmatrix} \\ &\frac{1}{ds^2\,\delta s}\begin{vmatrix} 0 & a_{110} & a_{120} \\ dx_1 & dx_0 + a_{111}dx_1 + a_{121}dx_2 & a_{121}dx_1 + a_{221}dx_2 \\ dx_2 & a_{112}dx_1 + a_{122}dx_2 & dx_0 + a_{122}dx_1 + a_{222}dx_2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{dS^2\delta S}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_0}{\partial x_2} & a_{110}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} + a_{120}\dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} & a_{120}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} + a_{220}\dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} \\ dX_1 & dX_0 + a_{111}dX_1 + a_{121}dX_2 & a_{121}dX_1 + a_{221}dX_2 \\ dX_2 & a_{112}dX_1 + a_{122}dX_2 & dX_0 + a_{122}dX_1 + a_{222}dX_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{59}$$

și

$$\frac{1}{ds^2\,\delta s}\begin{vmatrix} 0 & a_{120} & a_{220} \\ dx_1 & dx_0 + a_{111}\,dx_1 + a_{121}\,dx_2 & a_{121}\,dx_1 + a_{221}\,dx_2 \\ dx_2 & a_{112}\,dx_1 + a_{122}\,dx_2 & dx_0 + a_{122}\,dx_1 + a_{222}\,dx_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{dS^2\delta S}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_0}{\partial x_2} & a_{110}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_2} + a_{120}\dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} & a_{120}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_2} + a_{220}\dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} \\ dX_1 & dX_0 + a_{111}\,dX_1 + a_{121}\,dX_2 & a_{121}\,dX_1 + a_{221}\,dX_2 \\ dX_2 & a_{112}\,dX_1 + a_{122}\,dX_2 & dX_0 + a_{122}\,dX_1 + a_{222}\,dX_2 \end{vmatrix},$$

unde am notat dS și δS elementele de arc în sens P. Appell al curbelor transformate (γ') și (Γ'). Dacă în expresiile (59) înmulțim pe prima cu dx_0, pe a doua cu dx_1 și pe a treia cu dx_2 și însumăm, obținem

$$\frac{ds^3}{ds^2\,\delta s} = \frac{dS^3}{dS^2\delta S}$$

sau

$$\frac{ds}{dS} = \frac{\delta s}{\delta S}, \tag{60}$$

deci egalitatea unghiurilor în sens P. Appell atrage proporționalitatea elementelor de arc în sens P. Appel. Relațiile (59) s-au obținut din egalitatea

$$a\rho_0\,(\gamma, \Gamma)_M = a\rho_0\,(\gamma', \Gamma')_M.$$

Rezultatul este același dacă pornim de la oricare din relațiile (58).

Să găsim acum condițiile pe care să le îndeplinească X_i, pentru ca să avem în jurul unui punct

$$dS = \rho ds. \tag{60'}$$

Deoarece avem

$$dS^3 = \sum_{i=0}^{2} (dX_0 + \mu_{1i}\,dX_1 + \mu_{2i}\,dX_2) \qquad (i = 0, 1, 2)$$

și

$$ds^3 = \sum_{i=6}^{2} (dx_0 + \mu_{1i}\,dx_1 + \mu_{2i}\,dx_2) \quad (i = 0, 1, 2)$$

egalitatea (60′) trebuie să aibă loc oricare ar fi dx_i. Din cele șase combinații posibile, relațiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_0}{\partial x_0} + \mu_{1i}\frac{\partial X_1}{\partial x_0} + \mu_{2i}\frac{\partial X_2}{\partial x_0} &= \frac{1}{\mu_{1i}}\left[\frac{\partial X_0}{\partial x_1} + \mu_{1i}\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \mu_{2i}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right], \\ \frac{\partial X_0}{\partial x_0} + \mu_{1i}\frac{\partial X_1}{\partial x_0} + \mu_{2i}\frac{\partial X_2}{\partial x_0} &= \frac{1}{\mu_{2i}}\left[\frac{\partial X_0}{\partial x_2} + \mu_{1i}\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \mu_{2i}\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right] \end{aligned} \tag{61}$$

$$(i = 0, 1, 2)$$

determină şase legături între derivatele parţiale ale funcţiilor X_i, identice cu (44), deci funcţia hipercomplexă

$$f(\omega) = X_0 + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2,$$

este monogenă în punctul considerat.

Următoarele două combinaţii

$$\frac{\partial X_0}{\partial x_0} + \mu_{1i}\frac{\partial X_1}{\partial x_0} + \mu_{2i}\frac{\partial X_2}{\partial x_0} = \frac{1}{\mu_{1,i+k}}\left(\frac{\partial X_0}{\partial x_1} + \mu_{1i}\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \mu_{2i}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial X_0}{\partial x_0} + \mu_{1i}\frac{\partial X_1}{\partial x_0} + \mu_{2i}\frac{\partial X_2}{\partial x_0} = \frac{1}{\mu_{2,i+k}}\left(\frac{\partial X_0}{\partial x_2} + \mu_{1i}\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \mu_{2i}\frac{\partial X}{\partial x_2}\right) \qquad (62)$$

$$(i = 0, 1, 2 \ ; \ k = 1, 2) \pmod 3$$

conduc la funcţii monogene

$$f(\omega) = X_0 + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2$$

în raport cu variabila

$$\omega_1 = x_0 + \theta_1' x_1 + \theta_2' x_2,$$

unde θ_1' şi θ_2' sînt date de

$$\theta_1' = \sum_{i=0}^{2} \mu_{1,i+1} \frac{(\theta_1 - \mu_{1i})(\theta_1 - \mu_{1,i+2})}{(\mu_{1,i+1} - \mu_{1,i})(\mu_{1,i+1} - \mu_{1,i+2})}, \pmod 3$$

$$\theta_2' = \sum_{i+0}^{2} \mu_{2,i+1} \frac{(\theta_2 - \mu_{2,i})(\theta_2 - \mu_{2,i+2})}{(\mu_{2,i+1} - \mu_{2i})(\mu_{2,i+1} - \mu_{2,i+2})}, \pmod 3$$

pentru $k = 1$ şi la funcţiile monogene în raport cu variabila

$$\omega_2 = x_0 + \theta_1'' x_1 + \theta_2'' x_2,$$

unde θ_1'' şi θ_2'' sînt date de

$$\theta_1'' = \sum_{i=0}^{2} \mu_{1,i+2} \frac{(\theta_1 - \mu_{1i})(\theta_1 - \mu_{1,i+1})}{(\mu_{1,i+2} - \mu_{1,i})(\mu_{1,i+2} - \mu_{1,i+1})}, \pmod 3$$

$$\theta_2'' = \sum_{i=0}^{2} \mu_{1,i+2} \frac{(\theta_2 - \mu_{2,i})(\theta_2 - \mu_{2,i+1})}{(\mu_{1,i+2} - \mu_{2,i})(\mu_{1,i+2} - \mu_{2,i+i})}, \pmod 3$$

pentru $k = 2$, şi unde θ_1, θ_2 sînt elementele algebrei date.

Mai rămîn încă trei cazuri care prezintă oarecare disimetrie faţă de cele prezentate mai sus. Totuşi se poate arăta şi pentru ele că relaţiile dintre funcţiile X_i sînt identice cu condiţiile de monogeneitate în raport cu o variabilă hipercomplexă construită în mod potrivit. De exemplu, dacă luăm combinaţia

$$\frac{\partial X_0}{\partial x_0} + \mu_{10}\frac{\partial X_1}{\partial x_0} + \mu_{20}\frac{\partial X_2}{\partial x_0} = \frac{1}{\mu_{10}}\left(\frac{\partial X_0}{\partial x_1} + \mu_{10}\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \mu_{20}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu_{20}}\left(\frac{\partial X_0}{\partial x_2} + \mu_{10}\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \mu_{20}\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right),$$

$$\frac{\partial X_0}{\partial x_0}+\mu_{11}\frac{\partial X_1}{\partial x_0}+\mu_{21}\frac{\partial X_2}{\partial x_0}=\frac{1}{\mu_{12}}\left(\frac{\partial X_0}{\partial x_1}+\mu_{11}\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\mu_{21}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)=$$
$$=\frac{1}{\mu_{22}}\left(\frac{\partial X_0}{\partial x_2}+\mu_{11}\frac{\partial X_1}{\partial x_2}+\mu_{21}\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right), \tag{63}$$
$$\frac{\partial X_0}{\partial x_0}+\mu_{12}\frac{\partial X_1}{\partial x_0}+\mu_{22}\frac{\partial X_2}{\partial x_0}=\frac{1}{\mu_{11}}\left(\frac{\partial X_0}{\partial x_1}+\mu_{12}\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\mu_{22}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)=$$
$$=\frac{1}{\mu_{21}}\left(\frac{\partial X_0}{\partial x_2}+\mu_{12}\frac{\partial X_1}{\partial x_2}+\mu_{22}\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right),$$

aceste relații sînt identice cu condițiile de monogeneitate ale unei funcții hipercomplexe

$$f(\omega)=X_0+\theta_1 X_1+\theta_2 X_2$$

în raport cu variabila

$$\omega^*=x_0+\theta_1^* x_1+\theta_2^* x_2,$$

cu θ_1^* și θ_2^* dați de

$$\theta_1^*=\mu_{10}\frac{(\theta_1-\mu_{11})(\theta_1-\mu_{12})}{(\mu_{10}-\mu_{11})(\mu_{10}-\mu_{12})}+\mu_{12}\frac{(\theta_1-\mu_{10})(\theta_1-\mu_{12})}{(\mu_{11}-\mu_{10})(\mu_{11}-\mu_{12})}+$$
$$+\mu_{11}\frac{(\theta_1-\mu_{10})(\theta_1-\mu_{11})}{(\mu_{12}-\mu_{10})(\mu_{12}-\mu_{11})},$$
$$\theta_2^*=\mu_{20}\frac{(\theta_2-\mu_{21})(\theta_2-\mu_{22})}{(\mu_{20}-\mu_{21})(\mu_{20}-\mu_{22})}+\mu_{22}\frac{(\theta_2-\mu_{20})(\theta_2-\mu_{22})}{(\mu_{21}-\mu_{20})(\mu_{21}-\mu_{22})}+$$
$$+\mu_{21}\frac{(\theta_2-\mu_{20})(\theta_2-\mu_{21})}{(\mu_{22}-\mu_{20})(\mu_{22}-\mu_{21})}.$$

Deci, în toate șase cazurile, transformările care păstrează unghiurile în sens P. Appell sînt realizate de funcții monogene. După cum se vede, rezultatul obținut se extinde la algebra cu $n+1$ elemente. Numărul cazurilor care intervin este $(n+1)!$

11. *Funcții de mai multe variabile hipercomplexe.* În cele ce urmează vom extinde teorema lui H. Poincaré *) relativă la funcții de mai multe variabile complexe, la funcții de mai multe variabile hipercomplexe. Pentru simplicitate vom considera algebra de ordinul $n+1$ cu legile de compoziție

$$\theta_1^2=\theta_2,$$
$$\theta_1\theta_2=\theta_3,$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\theta_1\theta_{n-1}=\theta_n,$$
$$\theta_1\theta_n=1,$$

*) Teorema la care ne referim are următorul enunț: « Integrala

$$\iint_S f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \quad (\xi=x_1+ix_2;\ \eta=y_1+iy_2).$$

este nulă pentru orice suprafață închisă S situată în spațiul cu patru dimensiuni x_1, x_2, y_1, y_2, dacă $f(\xi,\eta)$ este monogenă în raport cu fiecare din variabilele complexe ξ, η, într-o regiune care conține pe S ».

din care deducem

$$\theta_i\,\theta_j = \theta_{i+j} \pmod{n+1};\ \theta_{n+1} = 1).$$

Algebra astfel construită este echivalentă cu algebra de elemente ale bazei

$$1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^n,$$

unitatea hipercomplexă θ fiind legată prin unica relaţie

$$\theta^{n+1} = 1.$$

Să considerăm pentru aceasta integrala multiplă de ordinul p

$$\int_{E_p} f(\omega_1, \omega_2 \ldots \omega p)\, d\omega_1\, d\omega_2 \ldots d\omega_p\ , \tag{64}$$

unde E_p este o varietate închisă situată în spaţiul cu $(n+1).p$ dimensiuni satisfăcînd condiţiilor de aplicare a formulelor stokiene $f(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)$ o funcţie de variabilele hipercomplexe $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$,

$$f(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p) = U_0 + \theta\, U_1 + \ldots + \theta^n\, U_n\ ,$$

cu funcţiile conjugate U_i continue şi avînd derivate parţiale de primul ordin continue în raport cu $x_{i,j}$ într-un domeniu conţinînd pe E_p, iar variabilele hipercomplexe ω_i avînd forma

$$\omega_i = x_{0,i} + \theta\, x_{1,i} + \ldots + \theta^n\, x_{n,i} \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Ne propunem să găsim condiţiile pentru ca integrala (64) să fie nulă oricare ar fi varietatea E_p închisă şi care nu conţine în interior puncte singulare ale lui f.

Făcînd produsul exterior al diferenţialelor $\omega_1, \ldots \omega_p$, obţinem

$$d\omega_1\, d\omega_2 \ldots d\omega_p = \sum \theta^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p}\, dx_{\alpha 1}, dx_{\alpha_2, 2} \ldots dx_{\alpha_p, p} \pmod{n+1},$$

semnul Σ fiind întins la toate combinaţiile posibile ale lui α_i, α_i luînd valori întregi deosebite între ele, de la 0 pînă la n.

Dacă diferenţiem exterior expresia de sub semnul integralei (64), obţinem

$$df(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)\, d\omega_1\, d\omega_2 \ldots d\omega_p =$$

$$\sum \theta^{\alpha_1+\alpha_2\ldots+\alpha_p+\alpha_p+1+k} \left[\frac{\partial U_{\alpha_p+1+K}}{\partial X_{\alpha_p+1, s}} - \frac{\partial U_{\alpha_p+k}}{\partial X_{\alpha_p, s}}\right] dx_{\alpha_1, 1}\, dx_{\alpha_2, 2} \ldots dx_{\alpha_p, p}\, dx_{\alpha_p+1, s}$$

şi integrala (64) este nulă, oricare ar fi varietatea închisă E_p, dacă avem

$$\frac{\partial U_{\alpha_p+1+k}}{\partial X_{\alpha_p+1, s}} = \frac{\partial U_{\alpha_p+k}}{\partial X_{\alpha_p, s}}\ . \tag{65}$$

pentru ori ce α_p, k şi s.

Condiţiile de monogeneitate ale unei funcţii de o variabilă hipercomplexă

$$f(\omega) = U_0 + U_1\,\theta + \ldots + U_n\,\theta^n \qquad (\theta^{n+1} = 1)$$

cu

$$\omega = x_0 + \theta\, x_1 + \ldots + \theta^n\, x_n$$

se obțin cu ușurință și sînt

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_i} = \frac{\partial U_{i+k}}{\partial x_{i+k}} \pmod{n+1}. \tag{66}$$

Dacă în (65) păstrăm pe s constant și facem să varieze pe α și pe k, obținem condițiile pentru ca funcția de sub semnul integral $f(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)$ să fie monogenă în raport cu ω_s. Făcînd apoi să varieze pe s de la 1 pînă la p, relațiile (65) în totalitatea lor exprimă condițiile ca f să fie monogenă în raport cu fiecare din variabilele $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$.

În cele stabilite mai sus s-a presupus că pentru toate variabilele ω_i unitatea hipercomplexă θ este legată de aceeași relație

$$\theta^{n+1} = 1,$$

adică variabilele ω_i aparțin aceleiași algebre. Să presupunem, acum cazul cînd variabilele hipercomplexe ω_i aparțin la algebre diferite

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= x_{0,1} + \theta_1 x_{1,1} + \ldots + \theta_1^m x_{n,1} \qquad (\theta_1^{m+1} = 1),\\
\omega_2 &= x_{02} + \theta_2 x_{12} + \ldots + \theta_2^n x_{n,2} \qquad (\theta_2^{n+1} = 1),\\
&\cdots\\
\omega_p &= x_{0,p} + \theta_p x_{1p} + \ldots + \theta_p^r x_{r,p} \qquad (\theta_p^{r+1} = 1).
\end{aligned}$$

În acest caz, o funcție de două variabile hipercomplexe ω_1, ω_2, de exemplu, se scrie sub forma

$$\begin{aligned}
f(\omega_1, \omega_2) = {} & U_{0,0} + \theta_1 U_{1,0} + \ldots + \theta_1^m U_{m,0} +\\
& + \theta_2 [U_{0,1} + \theta_1 U_{1,1} + \ldots + \theta_1^m U_{m,1}] +\\
& \cdots\\
& + \theta_2^n [U_{0,n} + \theta_1 U_{1,n} + \ldots + \theta_1^m U_{m,n}] =\\
& \quad U_{0,0} + \theta_2 U_{0,1} + \ldots + \theta_2^n U_{o,n} +\\
& + \theta_1 [U_{1,0} + \theta_2 U_{1,1} + \ldots + \theta_2^n U_{1,n}] +\\
& \cdots\\
& + \theta_1^m [U_{m,0} + \theta_2 U_{m,1} + \ldots + \theta_2^n U_{m,n}].
\end{aligned} \tag{67}$$

Să considerăm acum o integrală de forma

$$\iint_{E_2} f(\omega_1, \omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2, \tag{68}$$

E_2 fiind o varietate cu două dimensiuni închisă, situată în spațiul cu $m+n$ dimensiuni, și să găsim condițiile pentru ca (68) să fie nulă, oricare ar fi E_2.

Deoarece avem

$$d\omega_1\, d\omega_2 = \sum_{k=0}^{n} \theta_2^k \left(\sum_{r=0}^{m} C_1^r\, dx_{r,1}\, dx_{k,2} \right),$$

diferenţiind exterior expresia de sub semnul integralei (68), obţinem

$$df(\omega_1, \omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2 = \sum C_2^{k+p}\, \theta_1^{r+s} \left[\frac{\partial U_{s,p}}{\partial x_{h,2}} - \frac{\partial U_{s,k+p-h}}{\partial x_{k,2}} \right] dx_{r,1}\, dx_{k,2}\, dx_{h,2} +$$

$$+ \sum \theta_2^{k+p}\, \theta_1^{r+s} \left[\frac{\partial U_{s,p}}{\partial x_{h,1}} - \frac{\partial U_{r+s-h,p}}{\partial x_{r,1}} \right] dx_{r,1}\, dx_{k,2}\, dx_{h,1}.$$

Pentru ca integrala (68) să fie nulă oricare ar fi E_2, trebuie să avem

$$\frac{\partial U_{s,p}}{\partial x_{h,2}} = \frac{\partial U_{s,k+p-h}}{\partial x_{k,2}}, \tag{69}$$

$$\frac{\partial U_{s,p}}{\partial x_{h,1}} = \frac{\partial U_{r+s-h,p}}{\partial x_{r,1}}. \tag{70}$$

Dacă în relaţiile (69) facem

$$k + p - h = p + m,$$

avem

$$k = m + h;$$

deci, prin această schimbare de indici, (69) sînt de forma (66) şi prin urmare exprimă condiţiile ca funcţiile hipercomplexe

$$f_s(\omega_2) = U_{s,0} + \theta_2 U_{s,1} + \ldots + \theta_2^n U_{s,n} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

să fie monogene în raport cu variabila ω_2.

Tot astfel se verifică imediat că relaţiile (70) exprimă condiţiile ca funcţiile hipercomplexe

$$f_p(\omega_1) = U_{o,p} + \theta_1 U_{1,p} + \ldots + \theta_1^m U_{m,p} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

să fie monogene în raport cu variabila ω_1.

Rezultatele obţinute mai sus în legătură cu funcţiile de mai multe variabile hipercomplexe se obţin ca un caz particular din următorul enunţ, mai general:

Fie $d\sigma_1$ şi $d\sigma_2$, două forme diferenţiale omogene de gradul m şi n respectiv

$$d\sigma_1 = \sum A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_m} \quad (\alpha_i = 1, 2, \ldots, p)_{(m<p)}$$

$$d\sigma_2 = \sum B_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}\, dy_{\beta_1}\, dy_{\beta_2} \ldots dy_{\beta_n} \quad (\beta_i = 1, 2, \ldots, q)_{(n<q)}$$

cu coeficienţii $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}$ şi $B_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}$ constante reale şi

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_q),$$

o funcţie de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_q$, continuă şi avînd derivate parţiale de primul ordin continue într-un domeniu E_{p+q} al spaţiului cu $n + p$ dimensiuni x_i şi y_j.

Dacă integralele multiple, de ordinul m și n respectiv

$$\int_{E_m} U\, d\sigma_1\,, \qquad \int_{E_n} U d\sigma_2\,, \tag{71}$$

sînt nule oricare ar fi varietățile închise E_m și E_n, atunci avem și

$$\int_{E_{m+n}} U d\sigma_1 d\sigma_2 = 0 \tag{72}$$

pentru orice varietate închisă de ordinul $m+n$ situată în E_{p+q} în care U este definită. Acest rezultat se obține imediat diferențiind exterior $Ud\sigma_1$ sau $Ud\sigma_2$ și punînd condiția ca formele diferențiale obținute să fie nule.

Condițiile obținute sînt identice însă cu acelea pe care le obținem diferențiind exterior pe

$$Ud\sigma_1 d\sigma_2$$

și anulînd. Reciproc, dacă U satisface condițiile ca (72) să fie nulă, se deduce imediat că și integralele (71) sînt nule.

În cazul cînd $d\sigma_1$ și $d\sigma_2$ au coeficienți hipercomplecși, iar U este o funcție hipercomplexă, integralele (71), (72) se reduc la o sumă de integrale reale, pe care se raționează în mod analog.

12. *Caracteristici.* Ne propunem să găsim caracteristicile sistemului de ecuații diferențiale

$$\theta_i \frac{\partial f(\omega)}{\partial x_0} = \frac{\partial f(\omega)}{\partial x_i} \tag{73}$$

ce se obține punînd condiția ca $f(\omega)$ să fie monogenă. Cu ajutorul constantelor de structură a_{ijk}, acest sistem se scrie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_0}{\partial x_i} &= \sum_{k=i}^{n} a_{iko} \frac{\partial U_k}{\partial x_0}\,,\\
\frac{\partial U_1}{\partial x_i} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik1} \frac{\partial U_k}{\partial x_0}\,,\\
&\vdots\\
\frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial U_0}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{n} a_{iki} \frac{\partial U_k}{\partial x_0}\,,\\
&\vdots\\
\frac{\partial U_n}{\partial x_i} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ikn} \frac{\partial U_k}{\partial x_0}
\end{aligned} \tag{74}$$

$$(i = 1,2, \ldots, n).$$

Pentru a găsi ecuațiile diferențiale ale caracteristicilor, să facem o schimbare de variabile $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. Avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_j}{\partial x_i} &= \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial U_j}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial x_p}{\partial \bar{x}_i} =\\
&\frac{\partial U_j}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial x_0}{\partial \bar{x}_i} + \sum_{p=0}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} a_p k_j \frac{\partial U_k}{\partial x_0} \right] \frac{\partial x_p}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\partial U_0}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial \bar{x}_i}
\end{aligned} \tag{75}$$

$$(j = 0, 1, \ldots, n).$$

Caracteristicile sînt definite de determinantul sistemului (75) cu necunoscutele $\frac{\partial U_k}{\partial x_0}$. Cum avem $n+1$ astfel de sisteme, făcînd pe $i = 0, 1, \ldots, n$, urmează că ecuaţiile caracteristicilor sînt

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial \overline{x}_i} & \sum_{p=1}^{n} a_{poo} \frac{\partial x_p}{\partial \overline{x}_i} & \cdots\cdots\cdots & \sum_{p=1}^{n} a_{pno} \frac{\partial x_p}{\partial \overline{x}_i} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \overline{x}_i} & \frac{\partial x_0}{\partial \overline{x}_2} + \sum_{p=1}^{n} a_{po1} \frac{\partial x_p}{\partial \overline{x}_i} & \cdots\cdots\cdots & \sum_{p=1}^{n} a_{pn1} \frac{\partial x_p}{\partial \overline{x}_i} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial \overline{x}_i} & \sum_{p=1}^{n} a_{pon} \frac{\partial x_p}{\partial \overline{x}_i} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial x_0}{\partial \overline{x}_i} + \sum_{p=1}^{n} a_{pnn} \frac{\partial x_p}{\partial \overline{x}_i} \end{vmatrix} = 0. \quad (76)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n)$$

Să considerăm acum produsul a două numere din algebră

$$\omega = \sum_{o}^{n} \theta_i x_i ,$$

Avem $(\theta_0 = 1).$

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} \theta_i X_i$$

$$\omega . \Omega = \sum_{j=1}^{n} \theta_j \left[X_0 x_j + \sum_{k=1}^{n} a_{pkj} x_p X_k + X_j x_0 \right] \quad (77)$$

Inversul lui ω se obţine făcînd în (77) $\omega . \Omega = 1$ şi determinînd pe X_i din sistemul astfel obţinut. Determinantul acestui sistem este chiar norma lui ω şi se vede imediat că este identic cu determinantul (76), dacă se înlocuieşte x_j cu $\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_i}$. Prin urmare, determinantul (76) se poate scrie sub forma (72). Execuţiile caracteristicilor sînt aşadar

$$L_{i,k} = \frac{\partial x_0}{\partial \overline{x}_i} + \mu_{1k} \frac{\partial x_1}{\partial \overline{x}_i} + \ldots + \mu_{nk} \frac{\partial x_n}{\partial \overline{x}_i} = 0 \quad (78)$$

$$(k = 0,1, \ldots, n),$$

$$(i = 0,1, \ldots, n).$$

Însumînd în sistemul (78), ecuaţiile cu k constant, înmulţite cu dx_i, adică

$$L_{0,k}\, dx_0 + L_{1,k}\, dx_1 + \ldots + L_{n,k}\, dx_n = 0,$$

obţinem

$$dx_0 + \mu_{1k}\, dx_1 + \ldots + \mu_{nk}\, dx_n = 0$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

deci ecuaţiile caracteristicilor sînt

$$x_0 + \mu_{1,k}\, x_1 + \ldots + \mu_{nk}\, x_n = C_k$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

adică *varietăţi paralele cu varietăţile divizorilor lui zero.*

Să căutăm acum caracteristicile sistemului de ecuații diferențiale ce intervine în condițiile de monogeneitate a unei funcții de două variabile hipercomplexe. Dacă considerăm tot algebrele de ordinul $n+1$ de la punctul 11, sistemul este

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_i} = \frac{\partial U_{j+k}}{\partial x_{i+k}} \qquad (i,\ j,\ k = 0,1,\ldots,\ n),$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial y_i} = \frac{\partial U_{j+k}}{\partial y_{i+k}} \qquad (\text{mod } n+1).$$

Făcînd și de această dată o schimbare de variabile $\bar{x}_0,\ \bar{x}_1,\ldots,\ \bar{x}_n,\ \bar{y}_0,\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_n$ și aplicînd metoda din [3], ecuația diferențială a caracteristicilor este dată de determinantul de ordinul $2(n+1)$

$$A = \begin{vmatrix} A_{x\bar{x}} & A_{y\bar{x}} \\ A_{x\bar{y}} & A_{y\bar{y}} \end{vmatrix} = 0,$$

unde (79)

$$A_{x\bar{x}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial \bar{x}_0} & \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}_0} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_0} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_0} & \frac{\partial x_0}{\partial \bar{x}_0} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_0} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}_0} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \bar{x}_0} & \cdots & \frac{\partial x_0}{\partial \bar{x}_0} \end{vmatrix}$$

Este ușor de observat că determinantul A este determinantul funcțional al funcțiilor

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$$

de variabilele

$$\bar{x}_0,\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ldots,\ \bar{x}_n,\ \bar{y}_0,\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ldots,\ \bar{y}_n$$

astfel ca

$$\begin{aligned} x_0 + \theta\, x_1 + \ldots + \theta^n x_n &= f(\bar{\omega}_1,\ \bar{\omega}_2), \\ y_0 + \theta\, y_1 + \ldots + \theta^n y_n &= g(\bar{\omega}_1,\ \bar{\omega}_2), \end{aligned} \tag{80}$$

și g fiind funcții monogene de variabilele $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$, unde

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \bar{x}_0 + \theta\, \bar{x}_1 + \ldots + \theta^n \bar{x}_n, \\ \bar{\omega}_2 &= \bar{y}_0 + \theta\, \bar{y}_1 + \ldots + \theta^n \bar{y}_n \end{aligned}$$

Relațiile (80) se mai scriu

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f(\bar{\omega}_1,\ \bar{\omega}_2), \\ \varphi(\omega_2) &= f(\bar{\omega}_1,\ \bar{\omega}_2), \end{aligned} \tag{81}$$

unde φ este de asemenea o funcţie monogenă de ω_2. Eliminînd pe f obţinînd ecuaţia caracteristicilor

$$\omega_1 = \varphi\ (\omega_2),$$

rezultat analog cu cel obţinut în cazul funcţiilor monogene de două variabile complexe. De fapt, observaţia făcută asupra ecuaţiei (79) a caracteristicilor, evident, se menţine şi în acest caz particular. Ecuaţia caracteristicilor sistemului de ecuaţii diferenţiale ale lui Cauchy-Poincaré este

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \overline{y}} & \frac{\partial x}{\partial \overline{y}} & \frac{\partial t}{\partial \overline{y}} & \frac{\partial s}{\partial \overline{y}} \\ -\frac{\partial x}{\partial \overline{y}} & \frac{\partial y}{\partial \overline{y}} & -\frac{\partial s}{\partial \overline{y}} & \frac{\partial t}{\partial \overline{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \overline{t}} & \frac{\partial x}{\partial \overline{t}} & \frac{\partial t}{\partial \overline{t}} & \frac{\partial s}{\partial \overline{t}} \\ -\frac{\partial x}{\partial \overline{t}} & \frac{\partial y}{\partial \overline{t}} & -\frac{\partial s}{\partial \overline{t}} & \frac{\partial t}{\partial \overline{t}} \end{vmatrix} = 0,$$

care este determinantul funcţional al lui

$$x + iy = f(\overline{x} + i\overline{y},\ \overline{s} + i\overline{t}),$$
$$s + it = g(\overline{x} + i\overline{y},\ \overline{s} + i\overline{t}),$$

în ipoteza că f şi g sînt monogene în raport cu $\overline{x} + i\overline{y}$ şi $\overline{s} + it$.

Suprafeţele caracteristice ale sistemului lui Cauchy-Poincaré se obţin în acelaşi mod şi sînt date de o funcţie arbitrară monogenă de $x + iy$ şi $s + it$.

АССОЦИАТИВНЫЕ И КОММУТАТИВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ И ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К НИМ МОНОГЕННЫЕ ФУНКЦИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении автор исследует ассоциативные и коммутативные алгебры, исходя из соотношений состава элементов основания. Рассматриваются алгебры с элементом единицей, построенные на теле действительных чисел (R) или комплексных чисел (C). Для того чтобы алгебра была уникально определена из соотношений

$$\theta_i\,\theta_j = \sum_{k=0}^{n} a_{ijk}\ \theta_k$$

удерживаются лишь те, при которых $i = 1$ и $j = 0,1,\ldots, n$. Число постоянных произвольной структуры равно $n(n+1)$. Выражение нормы находится в алгебре в виде (9), а из выражения нормы выводится структура алгебры.

Для определения структуры алгебры достаточно найти корни характеристического уравнения элементов основания θ_1. Далее показывается, что путем соответствующего изменения основания, одно из

чисел алгебры принимает вид (12), в котором явно показана структура алгебры.

Многообразия делителей нуля даются также под видом (9) нормы и являются линейными многообразиями с n и $n-1$ измерениями.

Изучая свойства $exp\ (\omega)$ находим числа алгебры, норма которых единица; при помощи этих чисел находим экспоненциальную форму одного из чисел алгебры (14), принимающего простой вид (15) если коэффициент θ_k^{n-1} характеристических уравнений (7) нулевой, что влечет за собой n-соотношения между константами структуры. Далее находим периоды гиперкомплексного числа.

Числа (19) суть косинусы П. Аппеля.

Используя вид (12) одного из чисел алгебры, находим область конвергенции ряда степеней гиперкомплексной переменной.

В параграфе 5 находим условия (31), необходимые, чтобы функция гиперкомплексной переменной была моногенной. К каждому направлению в пространстве, проходящему через заданную точку, присоединяется n-направлений, относительно которых соотношения моногенности сохраняются. Таким образом определяется $n+1$-гранник моногенности. Касательные в общей точке к кривым пересечения сверхплоскостей, определенных сопряженными функциями моногенной функции образуют $n+1$-гранник моногенности.

Интегрируя на замкнутых кривых, лежащих на линейных многообразиях делителей нуля и окружающих точку τ, получаем формулы типа Коши. Если уравнение (7) $K=1$ имеет все комплексные корни и алгебра A_{n+1} построена на (R), то эти формулы типа Коши позволяют найти значения моногенной функции $f(\omega)$ в точке τ при помощи значений, принимаемых этой функцией на рассматриваемых кривых. Сопряженные функции U_i моногенной функции удовлетворяют интегральным формулам типа Грина вида

$$\int_C \frac{dU_i}{dL_M}\, ds = 0,$$

где C есть замкнутая кривая в области моногенности гиперкомплексной функции, $\frac{dU_i}{dL_M}$ — производная по направлению L_M, являющемуся частью $n+1$-гранника моногенности, определяемого касательной к кривой C в точке M, а ds есть элемент дуги в пространстве переменной ω.

В параграфе 10 рассматриваются точечные преобразования

$$\Omega = f(\omega)$$

между двумя областями в пространстве Ω и ω. Преобразования обратимы для точек, в которых производная $f(\omega)$ ненулевая или не является делителем нуля, так как якобиан преобразования является нормой, относящейся к $f'(\omega)$.

В этих преобразованиях элементы дуги, в смысле данном им П. Аппелем, пропорциональны, а их аргументы равны. Далее показывается, что если углы сохраняют смысл, данный им П. Аппелем, то элементы дуги пропорциональны. Отыскивая условия, которые

должны быть выполнены сопряженными функциями X_i, для того чтобы иметь вокруг одной точки

$$ds = \rho\, ds, \tag{1}$$

находим, что функция

$$f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n \mid \theta) = \sum_0^N \theta_k\, X_k$$

должна быть моногенной относительно некоторой гиперкомплексной переменной.

Все случаи, вытекающие из равенства (1), приводят к тому же результату, то есть преобразования осуществляются моногенными функциями.

В параграфе 11 автор распространяет теорему А. Пуанкаре на функции нескольких гиперкомплексных переменных и находит, что интеграл (64) является нулевым, если функция под знаком интеграла моногенна относительно каждой гиперкомплексной переменной, от которой она зависит.

В последнем параграфе отыскиваются характеристики систем дифференциальных уравнений, рассматриваемых в этой работе.

Так для системы (30) находим, что многообразия делителей нуля суть характеристические многообразия.

Для системы (66), выведенной из условий моногенности какой-либо функции с двумя гиперкомплексными переменными, находим, что характеристические поверхности являются поверхностями, данными

$$\omega_1 = \varphi\ (\omega_2),$$

каковой результат обобщает ранее полученные результаты [1].

ALGÈBRES LINÉAIRES ASSOCIATIVES ET COMMUTATIVES ET FONCTIONS MONOGÈNES QUI Y SONT ATTACHÉES

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, l'Auteur présente une étude des algèbres associatives et commutatives, partant des relations de composition des éléments de la base. On considère les algèbres à élément unité, construites sur le corps des nombres réels (R) ou des nombres complexes (C). Pour que l'algèbre soit uniquement déterminée on ne retient des relations

$$\theta_i\ \theta_j = \sum_{k=0}^{n} a_{ijk}\ \theta_k$$

que celles pour lesquelles $i = 1$ et $j = 0,1, \ldots, n$. Le nombre des constantes de structure arbitraires est $n\ (n+1)$. On trouve l'expression de la norme d'un nombre de l'algèbre sous la forme (9) et l'on déduit la structure de l'algèbre en partant de l'expression de la norme.

Pour connaître la structure de l'algèbre, il suffit de trouver les racines de l'équation caractéristique de l'élément de la base θ_1. On démontre ensuite que,

par un changement convenable de la base, un nombre de l'algèbre est de la forme (12), dont la structure de l'algèbre ressort de façon explicite.

Les variétés des diviseurs de zéro sont également données par la forme (9) de la norme; ce sont des variétés linéaires à n et $n-1$ dimensions:

Etudiant la propriété de exp (ω), on trouve les nombres de l'algèbre qui ont l'unité pour norme; au moyen de ces nombres on trouve la forme exponentielle d'un nombre de l'algèbre (14) qui prend une forme simple (15) si le coefficient de 6_k^{n-1} des équations caractéristiques (7) est nul, ce qui implique n relations entre les constantes de structure. On trouve ensuite les périodes d'un nombre hypercomplexe.

Les nombres (19) sont des cosinus de P. Appell.

A l'aide de la forme (12) d'un nombre de l'algèbre, on trouve le domaine de convergence d'une série de puissances d'un variable hypercomplexe.

Au 5e point on trouve les conditions nécessaires (31) pour qu'une fonction d'une variable hypercomplexe soit monogène. Pour chaque direction de l'espace passant par un point donné, n directions s'associent, à l'égard desquelles les relations de monogénéité sont conservées. On définit de la sorte un $n+1$-èdre de monogénéité. Les tangentes en un point commun aux courbes d'intersection des hypersurfaces, définies par les fonctions conjuguées d'une fonction monogène, forment un $n+1$-èdre de monogénéité.

En intégrant sur des courbes fermées, situées sur les variétés linéaires, les diviseurs de zéro qui entourent le point τ, on obtient des formules de type Cauchy. Si toutes les racines de l'équation (7) $K=1$ sont complexes et l'Algèbre A_{n+1} est construite sur (R), alors ces formules de type Cauchy permettent de trouver la valeur de la fonction monogène $f(\omega)$ au point τ, à l'aide des valeurs que cette fonction prend sur les courbes considérées. Les fonctions conjuguées U_i d'une fonction monogène satisfont aux formules intégrales de type Green de la forme

$$\int_C \frac{dU_i}{dL_M}\, ds = 0$$

C étant une courbe fermée dans le domaine de monogénéité de la fonction hypercomplexe, $\frac{dU_i}{dL_M}$ étant la dérivée selon la direction L_M qui fait partie du $n+1$-èdre de monogénéité, déterminé par la tangente à la courbe C au point courant M et ds est l'élément d'arc dans l'espace de la variable ω. Au 10e point, l'Auteur étudie les transformations ponctuelles

$$\Omega = f(\omega)$$

entre deux domaines de l'espace Ω et ω. Les transformations sont réversibles pour les points où la dérivée de $f(\omega)$ est non nulle ou n'est pas un diviseur de zéro, étant donné que la jacobien de la transformation est la norme $f'(\omega)$.

Dans ces transformations, les éléments d'arc, au sens de P. Appell, sont proportionnels et les arguments sont égaux. On montre ensuite que, si l'on conserve les angles au sens de P. Appell, les éléments d'arc sont proportionnels. Cherchant les conditions auxquelles les fonctions conjuguées X_i doivent satisfaire afin d'avoir autour d'un point

$$dS = \rho\, ds \qquad (1)$$

on trouve que la fonction

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n\, 0) = \sum_0^n 0_k X_k$$

doit être monogène par rapport à une certaine variable hypercomplexe.

Tous les cas de l'égalité (1) qui interviennent conduisent au même résultat, c'est-à-dire que les transformations sont réalisées par des fonctions monogènes.

Au 11e point, l'Auteur étend un théorème de H. Poincaré pour les fonctions à plusieurs variables hypercomplexes et trouve que l'intégrale (64) est nulle si la fonction sous le signe intégral est monogène par rapport à chacune des variables hypercomplexes dont elle dépend.

Au dernier point, on cherche les caractéristiques des systèmes d'équations différentielles qui interviennent dans cette étude. C'est ainsi que, pour le système (30), on trouve que les variétés des diviseurs de zéro sont des variétés caractéristiques.

Pour le système (66), déduit des conditions de monogénéité d'une fonction de deux variables hypercomplexes, on trouve que les surfaces caractéristiques sont des surfaces données par

$$\omega_1 = \varphi(\omega_2)$$

résultat qui généralise les résultats obtenus antérieurement [1].

BIBLIOGRAFIE

1. Marcel N. Roşculeţ, *Teoria funcţiilor de o variabilă hipercomplexă în spaţiul cu trei dimensiuni.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., seria A., t. I, nr. 6, 1949.
2. — *Funcţii de o variabilă hipercomplexă în spaţiul cu n dimensiuni.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, t. V, nr. 1, 1953, p. 130 — 145.
3. Gr. C. Moisil, *Asupra teoriei caracteristicilor sistemelor cu derivate parţiale.* Anal. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice, fizice şi chimice, seria A., t. II, mem. 25, 1949.
4. I. M. Ghelfand, *Lecţii de algebră liniară.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.
5. P. W. Ketchum, *Analytic Functions of Hypercomplex Variables.* Transactions of the American Mathematical Society, 1928, vol. 30, p. 641.
6. James A. Ward, *A Theory of Analytic Functions in Linear Associative Algebras.* Duke Mathematical Journal, 1940, vol. 7, p. 233.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 1–2, 1955

VARIETĂŢI NEOLONOME DE TIP ŢIŢEICA-WILCZINSKI *)

DE

TIBERIU MIHĂILESCU

După modul natural în care ecuaţiile de structură ale grupului proiectiv asociază unui punct regulat al unei suprafeţe din spaţiul cu trei dimensiuni *directoarea Wilczinski* de prima specie, această dreaptă poate fi considerată ca îndeplinind — faţă de proprietăţile proiective ale suprafeţei — rolul pe care normala obişnuită îl are faţă de proprietăţile metrice.

Din acest punct de vedere, putem spune că o generalizare proiectivă a sferelor o formează suprafeţele ale căror directoare Wilczinski de prima specie — pe care le putem numi normale proiective — trec printr-un punct fix.

Suprafeţele ce aparţin acestei clase au fost întîlnite pentru prima oară de G. Ţiţeica în cercetările sale asupra deformării metrice a suprafeţelor tetraedrale [1].

Curbura totală a unei astfel de suprafeţe într-un punct al ei este proporţională cu puterea a patra a distanţei de la un punct fix la planul tangent în punctul considerat.

Revenind asupra lor, Ţiţeica a arătat că proprietatea metrică ce le caracterizează este invariantă atît faţă de o transformare afină, cît şi faţă de o transformare prin polare reciproce.

Căutînd şi o proprietate caracteristică de natură proiectivă, el a găsit că riglatele asimptotice ale acestor suprafeţe — pe care le-a numit *suprafeţe S* — au liniile flecnodale plane şi confundate.

Suprafeţele *S* sînt regăsite apoi de E. J. Wilczinski ca suprafeţe ale căror *curbe directoare* — curbele de-a lungul cărora atît directoarele de prima specie, cît şi polarele lor reciproce faţă de *cuadricele Darboux*, determină riglate desfăşurabile — sînt nedeterminate [2].

Normalele proiective ale suprafeţelor cu curbe directoare nedeterminate trec printr-un punct fix, *centrul* proiectiv al suprafeţei.

Directoarele Wilczinski de a doua specie — polarele reciproce ale directoarelor de prima specie în raport cu cuadricele Darboux — sînt situate într-un plan fix, *planul director* al suprafeţei.

Dacă centrul se află situat în planul director, asimptoticele suprafeţei aparţin unor complexe liniare.

---

*) Lucrare prezentată Institutului de Matematică la data de 24 noiembrie 1954.

Fiind dată o varietate neolonomă în spațiul proiectiv obișnuit, unui punct din spațiu i se asociază — în mod intrinsec în raport cu varietatea dată — două drepte. Una din ele trece prin punctul considerat și se numește normala proiectivă a varietății, iar cealaltă — situată în planul tangent la varietate — corespunde normalei proiective într-o proiectivitate determinată de varietate și numită *polaritate fundamentală*.

În prezenta lucrare ne propunem să extindem problema lui Wilczinski la varietățile neolonome, să studiem deci clasele de varietăți neolonome ale căror congruențe formate de normalele proiective și de polarele lor au desfășurabile nedeterminate.

1. Fie V o varietate neolonomă din spațiul proiectiv cu trei dimensiuni, adică o figură formată din mulțimea punctelor unei *regiuni (R)*, cărora li s-a asociat — după o lege determinată — cîte un plan numit plan tangent la varietatea V.

O curbă *(C)* aparține varietății, dacă tangenta la curbă în fiecare punct al ei, situat în *(R)*, este în planul tangent la V în acel punct.

În general, prin fiecare punct din *(R)*, trec două curbe ale varietății, al căror plan osculator coincide cu planul tangent la V. Mulțimea acestor curbe formează două congruențe numite *congruențe asimptotice*.

Vom presupune, în tot ce urmează, că aceste congruențe sînt distincte și nu sînt formate din linii drepte sau din curbe plane.

Într-o lucrare anterioară [3] am arătat că unui punct A_0 din (R) i se asociază un reper proiectiv $A_0\,A_1\,A_2\,A_3$, format de tangentele $A_0\,A_1$, $A_0\,A_2$ la liniile asimptotice ale varietății, ce trec prin A_0, de normala proiectivă A_0A_3 și de polara ei A_1A_2, față de o corespondență proiectivă între dreptele ce trec prin A_0 și dreptele planului tangent în A_0 la varietate, corespondență pe care am numit-o *polaritate fundamentală* și care este definită în modul următor:

Dreapta (Δ'), ce corespunde unei drepte (Δ) dusă prin punctul A_0, este caracteristica planului tangent în A_0 la varietate, față de deplasarea acestui punct pe dreapta dată (Δ).

Punctul A_3 poate să rămînă nedeterminat pe normala proiectivă.

Un astfel de reper mai depinde de patru parametri: un parametru de poziție a punctului A_3 pe normala proiectivă și trei parametri de poziție a punctului unitate.

Această nedeterminare nu stînjenește tratarea analitică a problemelor geometrice, deoarece o teoremă generală a lui C a r t a n privitoare la sistemele de ecuații cu diferențiale totale permite eliminarea acestor parametri neesențiali din calcule.

Variațiile coordonatelor omogene ale vîrfurilor reperului pentru o deplasare infinitezimală a lui sînt date de formulele

$$dA_i = \Sigma\,\omega_{ik}\,A_k \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

formele Pfaff ω_{ik} — componentele deplasării — fiind legate de relațiile

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_{13} = a\omega_2 && \omega_{23} = b\,\omega_1\\
&\omega_{12} = c\omega_1 + f\ \omega_3 && \omega_{21} = m\,\omega_2 + n\,\omega_3\\
&\omega_{31} = u\,\omega_1 + v\omega_2 + z\omega_3 && \omega_{32} = r\,\omega_1 + s\,\omega_2 + t\,\omega_3\\
&\omega_{10} + a\,\omega_{32} = (a+b)\ f\ \omega_1 + h\omega_2 + i\,\omega_3\\
&\omega_{20} + b\omega_{31} = l\omega_1 + (a+b)\ n\ \omega_2 + p\omega_3\\
&da + a\,(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) + g\,\omega_2 + h\omega_3 = 0\\
&db + b\ (\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) + j\,\omega_1 + l\omega_3 = 0\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Dacă punctul A_0 se deplasează pe o curbă a varietății, diferențialele parametrilor săi de poziție verifică ecuația

$$\omega_3 = 0, \tag{2}$$

care este deci ecuația ce definește varietatea V.

Ținînd seama de relațiile (1), diferențiala exterioară a formei ω_3 este

$$\omega_3' = [\omega_{00} - \omega_{33}, \omega_3] + (a - b)\,[\omega_1\omega_2]. \tag{3}$$

Rezultă

$$[\omega_3\,\omega_3'] = (a - b)\,[\omega_1\,\omega_2\,\omega_3]. \tag{4}$$

Formele ω_1, ω_2, ω_3 sînt liniar independente, iar pentru ca varietatea definită de ecuația (3) să fie neolonomă, trebuie ca această ecuație să nu fie complet integrabilă.

Din (4) rezultă condiția esențială de neolonomie

$$a \neq b. \tag{5}$$

Congruențele asimptotice (C_1), (C_2) sînt formate — respectiv — de curbele integrale ale sistemelor diferențiale obișnuite

$$\left.\begin{aligned} &(C_1) \qquad \omega_2 = 0,\ \omega_3 = 0, \\ &(C_2) \qquad \omega_1 = 0,\ \omega_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Reamintim că dacă

$$c = 0 \qquad (m = 0), \tag{7}$$

asimptoticele (C_1) sau (C_2) sînt linii drepte (a se vedea [3], formulele (24) și (25).

După cum am spus, vom considera numai varietățile cu asimptotice curbilinii, adică presupunem

$$c\,m \neq 0. \tag{8}$$

Planul osculator al asimptoticei (C_1) este chiar planul tangent la varietate

$$\alpha_3 = [A_0\ A_1\ A_2].$$

Dacă A_0 se deplasează de-a lungul asimptoticei (C_1), coordonatele planului osculator suferă variațiile

$$d\alpha_3 = -\omega_{03}\alpha_0 - \omega_{13}\alpha_1 - \omega_{23}\alpha_2 - \omega_{33}\alpha_3 = b\omega_1\alpha_2 - \omega_{33}\alpha_3 \quad (\omega_3 = \omega_3 = 0).$$

Curba (C_1) este plană dacă planul osculator este staționar în deplasarea considerată, adică dacă

$$b = 0. \tag{9}$$

La fel se arată că dacă (C_2) este o curbă plană, avem condiția

$$a = 0. \tag{10}$$

Diferențierea exterioară a ecuațiilor sistemului (1) conduce la sistemul exterior

$$\left.\begin{aligned}
&[\Delta c\,\omega_1] && + [\Delta f\,\omega_3] = 0, \\
& && [\Delta m\,\omega_2] + [\Delta n\,\omega_3] = 0, \\
& && [\Delta g\ \omega_2] + [\Delta h\,\omega_3] = 0, \\
&[\Delta j\,\omega_1] && + [\Delta l\,\omega_3] = 0, \\
(a+b)\ &[\Delta f\,\omega_1] + && [\Delta h\,\omega_2] + [\Delta i\,\omega_3] = 0, \\
&[\Delta l\ \omega_1] + (a+b) && [\Delta n\,\omega_2] + [\Delta p\,\omega_3] = 0, \\
&[\Delta u\,\omega_1] + && [\Delta v\,\omega_2] + [\Delta z\,\omega_3] = 0, \\
&[\Delta r\,\omega_1] + && [\Delta s\,\omega_2] + [\Delta t\,\omega_3] = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

unde

$$
\left.
\begin{aligned}
\Delta c &= dc + c(\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{22}) + 2(bf - ar)\omega_2,\\
\Delta f &= df + f(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}) - cu\,\omega_1 + \{c(n - v) + i - 2at\}\,\omega_2,\\
\Delta m &= dm + m(\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22}) + 2(an - bv)\omega_1,\\
\Delta n &= dn + n(\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}) + \{m(f - r) + p - bz\}\omega_1 - ms\omega_2,\\
\Delta h &= dh + h(2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}) + \{2ai + g(f - r) - 2a(a + b)t\}\omega_1,\\
\Delta i &= di + i(2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{33}) +\\
&\quad + \{2f(h + l) - 2(a + b)fu - 2rh - cp + (a + b)cz\}\omega_1 +\\
&\quad + \{2f(a + b)(n - v) + gt - 2hs\}\omega_2,\\
\Delta l &= dl + l(2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}) + \{2u(a + b)(f - r) - 2lu + jz\}\omega_1 +\\
&\quad + \{2(h + l)n - 2lv - 2(a + b)ns + (a + b)mt - im\}\omega_2,\\
\Delta g &= dg + g(2\omega_{00} - \omega_{11} - 2\omega_{22} + \omega_{33}) +\\
&\quad + \{2a(a + b)(u - s) + 2a(h - l) + (a - b)h\}\omega_1 +\\
&\quad + \{2a(a + b)z + gs - 2ap\}\omega_3,\\
\Delta j &= dj + j(2\omega_{00} - 2\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) +\\
&\quad + \{2b(a + b)(s - u) - 2b(h - l) - (a - b)l\}\omega_2 +\\
&\quad + \{2b(a + b)t + uj - 2bi\}\omega_3,\\
\Delta r &= dr + r(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}),\\
\Delta s &= ds + s(\omega_{00} - \omega_{33}) - \omega_{30} + \{(a - b)t + cv\}\omega_1,\\
\Delta t &= dt + t(\omega_{00} + \omega_{22} - 2\omega_{33}) +\\
&\quad + \{f(s - u) - r(s + u) + cz\}\omega_1 + \{r(n - v) - s^2 - fv\}\omega_2,\\
\Delta u &= du + u(\omega_{00} - \omega_{33}) - \omega_{30} + \{mr - (a - b)z\}\omega_2,\\
\Delta v &= dv + v(\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}),\\
\Delta z &= dz + z(\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{33}) +\\
&\quad + \{v(f - r) - u^2 - rn\}\omega_1 + \{n(u - s) - v(u + s) + mt\}\omega_2.
\end{aligned}
\right\} \quad (12)
$$

2. Vom cerceta mai întîi o clasă particulară de varietăţi neolonome, care intervin în problema pe care o studiem.

Şi fiindcă această clasă de varietăţi admite o proprietate caracteristică în care intervin două cuadrice, ce generalizează *cuadrica lui Lie* din cazul olonom, vom stabili în prealabil ecuaţiile acestor cuadrice.

Tangentele asimptotice la curbele uneia din congruenţele asimptotice, considerate în punctele unei curbe ce aparţine celeilalte congruenţe asimptotice, determină o riglată ce se numeşte *riglată asimptotică*.

Fiecărui punct A_0 i se asociază două riglate asimptotice ale varietăţii, pe care le notăm — respectiv — cu R_1, R_2.

Cuadricele osculatoare la aceste riglate în punctul A_0, le numim *cuadricele lui Lie* asociate lui A_0.

O astfel de cuadrică este locul tangentelor la asimptoticele curbilinii ale riglatei respective în punctele în care aceste curbe taie generatoarea ce trece prin A_0 şi este tangentă asimptotică a varietăţii.

Deplasarea infinitezimală a unui punct

$$M = A_0 + \lambda A_2 \tag{13}$$

situat pe tangenta asimptotică $A_0 A_2$, cînd A_0 se deplasează pe asimptotica

$$(C_1) \quad \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

este determinată de variațiile coordonatelor sale omogene

$$d M = \{\omega_{00} + (l - bu)\lambda \omega_1\} A_0 + \omega_1 A_1 + (d\lambda + \lambda\omega_{22}) A_2 + b\lambda\omega_1 A_3. \tag{14}$$

Coordonatele planului tangent în M la riglata R_1, determinată de tangentele asimptotice $A_0 A_2$ de-a lungul curbei asimptotice (C_1), fiind

$$\pi = [A_0 A_2 dM] = b\lambda\alpha_1 - \alpha_3, \tag{15}$$

variațiile acestor coordonate sînt date de formula

$$d\pi = -b\lambda\omega_1\alpha_0 + \{bd\lambda - j\lambda\omega_1 - b\lambda(\omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{33})\}\alpha_1 + \tag{16}$$
$$+ b\omega_1\alpha_2 + (\omega_{33} - bu\lambda\omega_1)\alpha_3,$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ fiind coordonatele planelor reperului $A_0 A_1 A_2 A_3$. Ecuația diferențială a liniilor asimptotice ale riglatei R_1

$$[dMd\pi] = -b\lambda\omega_1\{\omega_{00} + (l - bu)\lambda\omega_1\} + \omega_1\{bd\lambda - j\lambda\omega_1 - b\lambda(\omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{33})\} +$$
$$+ b\omega_1(d\lambda + \lambda\omega_{22}) + b\lambda\omega_1(\omega_{33} - bu\lambda\omega_1) = 0$$

se descompune în ecuația

$$\omega_1 = 0,$$

ce corespunde generatoarelor riglatei, și în ecuația

$$d\lambda + \lambda(\omega_{22} - \omega_{00}) = \frac{\lambda}{2b}(bl\lambda + j)\omega_1, \tag{17}$$

ce determină asimptoticele curbilinii ale lui R_1.

Ținînd seama de această ecuație, variația dM pentru o deplasare a lui M de-a lungul unei asimptotice curbilinii a lui R_1 devine

$$dM = (\omega_{00} + l\lambda\omega_1) M + \omega_1 \left\{ -bu\lambda A_0 + A_1 + \frac{\lambda}{2b}(j - bl\lambda) A_2 + b\lambda A_3 \right\} \tag{18}$$

și ne arată că

$$M_1 = -bu\lambda A_0 + A_1 + \frac{\lambda}{2b}(j - bl\lambda) A_2 + b\lambda A_3 \tag{19}$$

este un punct al tangentei la asimptotica curbilinie ce trece prin M.

Un punct oarecare al acestei tangente

$$P = \mu M_1 + M \tag{20}$$

are, față de reperul local $A_0 A_1 A_2 A_3$, coordonatele relative

$$x_0 = 1 - bu\lambda\mu, \; x_1 = \mu, \; x_2 = \lambda + \frac{\lambda\mu}{2b}(j - bl\lambda), \; x_3 = b\lambda\mu, \tag{21}$$

iar prin eliminarea parametrilor λ, μ se obține ecuația cuadricei osculatoare la riglata R_1

$$(2bu - l) x_3^2 + j x_1 x_3 - 2 b^2 x_1 x_2 + 2 b x_0 x_3 = 0. \tag{22}$$

În mod asemănător obținem și ecuația cuadricei osculatoare la riglata R_2

$$(2as - h)x_3^2 + g x_2 x_3 - 2a^2 x_1 x_2 + 2a x_0 x_3 = 0. \tag{23}$$

În [3] am arătat că o varietate neolonomă dată determină în fiecare punct A_0 al regiunii, în care este definită, o corespondență proiectivă între dreptele ce trec prin A_0

$$\Delta = x_1 [A_0 A_1] + x_2 [A_0 A_2] + x_3 [A_0 A_3],$$

și dreptele planului tangent în A_0 la varietate

$$\Delta' = x_1' [A_0 A_1] + x_2' [A_0 A_2] + x_3' [A_0 A_3].$$

Această corespondență, numită *polaritate fundamentală*, este definită de relațiile

$$x_1' = b x_1, \quad x_2' = -a x_2, \quad x_3' = x_3. \tag{24}$$

Dacă $x_3 = 0$, avem și $x_3' = 0$, adică unei drepte (Δ) situată în planul tangent și trecînd prin A_0 îi corespunde o dreaptă (Δ') din planul tangent ce trece tot prin A_0.

Polaritatea fundamentală induce în planul tangent la varietate o proiectivitate în fasciculul de drepte cu centrul în A_0

$$x_1' = b x_1, \quad x_2' = -a x_2. \tag{25}$$

al cărei invariant este

$$I = -\frac{b}{a} \tag{26}$$

și pe care îl vom numi *invariant fundamental* al varietății.

Dacă

$$I = -1 \qquad (a = b)$$

proiectivitatea este involutorie iar varietatea este olonomă, după cum rezultă din (4), iar dacă

$$I = +1 \qquad (a + b = 0),$$

asimptoticele varietății sînt nedeterminate și varietatea este un sistem nul.

Înlăturînd aceste două cazuri, să cercetăm varietățile al căror invariant fundamental păstrează o valoare constantă în toate punctele A_0 ale regiunii de definiție (R) (diferită de $+1$ și -1).

Aceste varietăți prezintă un interes mult mai general decît acela în legătură cu problema ce ne punem.

Ele au fost considerate de Al. Pantazi [4] în problema deformabilității proiective a varietăților neolonome.

Ținînd seama de ecuațiile sistemului (1), avem

$$dI = \frac{1}{a^2}\left\{ a j \omega_1 - bg\omega_2 + (al - bh)\omega_3 \right\}. \tag{27}$$

Varietățile cu invariant fundamental constant sînt caracterizate deci de condițiile

$$aj = bg = al - bh = 0. \tag{28}$$

Vom face ipoteza că liniile asimptotice ale varietății nu sînt curbe plane, adică

$$ab \neq 0.$$

Relațiile caracteristice (28) se pot scrie

$$g = j = 0, \quad h = a\sigma, \quad l = b\sigma, \tag{29}$$

σ fiind un argument auxiliar.

Ecuațiile

$$da + a(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) + g\omega_2 + h\omega_3 = 0,$$
$$db + b(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) + j\omega_1 + l\omega_3 = 0,$$

se scriu

$$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} = \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} - \sigma\omega_3$$

și dau, prin diferențiere exterioară și ținînd seama de ecuațiile sistemului (1), condiția

$$\sigma = K(s - u), \tag{30}$$

unde

$$K = \frac{2}{3} \cdot \frac{a+b}{a-b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-I}{1+I} = \text{const.}$$

Introducînd condiția (30) între variabilele sistemului (1), obținem un sistem diferențial care nu este în involuție.

Ar trebui să prelungim acest sistem, spre a vedea dacă se ajunge la un sistem în involuție sau dacă rezultă noi legături între coeficienți.

Nu vom efectua prelungirea sistemului (1), ci vom considera varietăți particulare ale acestei clase.

În [3] am introdus curbele directoare de prima specie, adică acele curbe ale varietății de-a lungul cărora normala proiectivă A_0A_3 determină riglate desfășurabile.

Ele formează două congruențe ce aparțin varietății și care sînt definite de sistemul diferențial

$$r\omega_1^2 + (s-u)\omega_1\omega_2 - v\omega_2^2 = 0, \quad \omega_3 = 0. \tag{31}$$

Condiția necesară și suficientă ca aceste două congruențe directoare să formeze un sistem armonic cu congruențele asimptotice ale varietății este exprimată de relația

$$s = u. \tag{32}$$

Vom spune că cele două congruențe sînt conjugate în raport cu varietatea neolonomă dată.

Urmează că varietățile neolonome cu invariant fundamental constant și cu congruențe directoare de prima specie conjugate sînt caracterizate de relațiile

$$g = j = h = l = 0, \; s = u \qquad (\sigma = 0). \tag{33}$$

Dar din diferențierea exterioară a ecuației

$$da + a(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) = 0$$

rezultă ecuația

$$(i - at - bt)[\omega_1\omega_3] + (p - az - bz)[\omega_2\omega_3] = 0,$$

ale cărei consecințe sînt relațiile

$$i = (a+b)t, \quad p = (a+b)z. \tag{34}$$

Sistemul Pfaff, care dă aceste varietăți, se deduce din (1) ținînd seama de legăturile introduse de (33) și (34).

Sistemul său exterior este

$$\left.\begin{array}{lll} [\Delta c\,\omega_1] & & +[\Delta f\,\omega_3]=0, \\ & [\Delta m\,\omega_2] & +[\Delta n\,\omega_3]=0, \\ [\Delta s\,\omega_1] & +[\Delta v\,\omega_2] & +[\Delta z\,\omega_3]=0, \\ [\Delta r\omega_1] & +[\Delta s\,\omega_2] & +[\Delta t\,\omega_3]=0, \\ [\Delta f\,\omega_1] & & +[\Delta t\,\omega_3]=0, \\ & [\Delta n\,\omega_2] & +[\Delta z\,\omega_3]=0, \end{array}\right\} \tag{35}$$

unde $\Delta_c, \ldots, \Delta_z$ se deduc din (12), avînd în vedere (33) și (34).

Rezolvarea acestui sistem se face prin introducerea a 12 coeficienți arbitrari, iar numerele caracteristice ale sistemului Pfaff sînt

$$s_1 = 6,\ s_2 = 3.$$

Deci, sistemul este în involuție cu $s_2 = 3$.

Varietățile neolonome cu invariant fundamental constant și cu congruențe directoare de prima specie conjugate depind de trei funcții arbitrare de două argumente.

Să numim *curbe directoare de a doua specie* acele curbe ale varietății, de-a lungul cărora dreptele $A_1 A_2$, polarele normalelor proiective în polaritatea fundamentală, determină riglate desfășurabile.

Deplasarea infinitezimală a unui punct al dreptei $A_1 A_2$

$$M = A_1 + xA_2$$

este dată de relația

$$dM = (\omega_{10} + x\,\omega_{20})\,A_0 + (\omega_{11} + x\omega_{21})\,A_1 + (\omega_{12} + x\,\omega_{22})\,A_2 + (\omega_{13} + x\,\omega_{23})\,A_3.$$

Punctul M descrie o curbă tangentă la $A_1 A_2$, pentru o deplasare a lui A_0 pe varietate, dacă diferențialele parametrilor de poziție a acestui punct verifică relațiile

$$\omega_{10} + x\,\omega_{20} = 0, \qquad \omega_{13} + x\,\omega_{23} = 0, \qquad \omega_3 = 0$$

sau, eliminînd pe x,

$$\omega_{13}\,\omega_{20} - \omega_{23}\,\omega_{10} = 0,\ \omega_3 = 0. \tag{36}$$

Curbele directoare de a doua specie sînt curbele integrale ale sistemului diferențial

$$\left.\begin{array}{l} b[(a+b)f - ar]\,\omega_1^2 + [bh - al - ab\,(s-u)]\,\omega_1\omega_2 - a\,[(a+b)f - bv]\omega_2^2 = 0, \\ \omega_3 = 0. \end{array}\right\} \tag{37}$$

Congruențele formate de aceste curbe sînt conjugate dacă este îndeplinită condiția

$$bh - al - ab\,(s-u) = 0. \tag{38}$$

În cazul pe care îl studiem, această relație este verificată pe baza relațiilor caracteristice (33).

Dacă una din congruențele directoare ale unei varietăți neolonome cu invariant fundamental constant este conjugată, atunci și cealaltă congruență este conjugată.

Ecuațiile (22) și (23), ce reprezintă cuadricele lui Lie în cazul general, devin în cazul studiat

$$sx_3^2 - bx_1x_2 + x_0x_3 = 0, \tag{39}$$

$$sx_3^2 - ax_1x_2 + x_0x_3 = 0. \tag{40}$$

În afară de punctul A_0, unde sînt tangente planului tangent la varietate, pe care îl taie după tangentele asimptotice, cuadricele taie normala proiectivă în același punct

$$sA_0 - A_3$$

și admit în acest punct planul tangent comun

$$x_0 + sx_3 = 0.$$

Cele două cuadrice sînt deci bitangente, coarda de contact fiind normala proiectivă.

Această ultimă proprietate este caracteristică varietăților neolonome studiate mai sus.

Într-adevăr, dacă cele două cuadrice Lie ale unei varietăți neolonome sînt bitangente și admit normala proiectivă drept coardă de contact, varietatea are invariantul fundamental constant și congruențele directoare conjugate.

Cuadricele Lie (22) și (23), în afară de punctul A_0, taie — respectiv — normala proiectivă în punctele.

$$(P_1) \qquad x_1 = x_2 = 0, \qquad (2bu - l)x_3 + 2bx_0 = 0,$$

$$(P_2) \qquad x_1 = x_2 = 0, \qquad (2as - h)x_3 + 2ax_0 = 0,$$

unde admit planele tangente

$$(\pi_1) \qquad (2bu - l)x_3 + jx_1 + 2bx_0 = 0,$$

$$(\pi_2) \qquad (2as - h)x_3 + gx_2 + 2ax_0 = 0.$$

Pentru ca cele două cuadrice să fie bitangente iar normala proiectivă să fie coardă de contact, este necesar și suficient ca punctele P_1 și P_2 să coincidă și același lucru să se petreacă cu planele (π_1) și (π_2).

Avem deci condițiile

$$g = j = 0, \quad 2ab(u - s) = al - bh. \tag{41}$$

Din diferențierea exterioară a ecuațiilor

$$da + a(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) + h\omega_3 = 0,$$

$$db + b(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) + l\omega_3 = 0,$$

rezultă relațiile

$$\left.\begin{aligned} 2a\{(h - l) + (a + b)(u - s)\} + h(a - b) &= 0, \\ 2b\{(h - l) + (a + b)(u - s)\} + l(a - b) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

În ipoteza făcută

$$ab \neq 0, \quad a + b \neq 0,$$

ţinînd seama de a treia din relaţiile (41) şi punînd

$$l = 2b\sigma, \quad h = 2a\tau,$$

unde σ şi τ sînt două argumente auxiliare, condiţiile (42) se transformă în

$$\sigma + 2\tau = 0, \quad 2\sigma + \tau = 0,$$

deci

$$\sigma = \tau = 0.$$

Varietăţile sînt aşadar caracterizate de relaţiile de condiţie

$$g = j = h = l = 0, \; s = u, \tag{43}$$

care definesc varietăţile neolonome cu invariant fundamental constant şi cu congruenţe directoare conjugate.

Deoarece suprafeţele izotermo-asimptotice sînt caracterizate de faptul că familiile de curbe directoare formează o reţea conjugată, vom numi varietăţile înfăţişate mai sus varietăţi neolonome *izotermo-asimptotice.*

3. Dacă se asociază reperului $A_0 A_1 A_2 A_3$, în mod invariant, o dreaptă (Δ), se obţine — cînd A_0 variază în regiunea (R) — o congruenţă triplă (Δ).

Dacă A_0 se deplasează de-a lungul unei curbe determinate (C) din (R), dreptele congruenţei (Δ) formează o suprafaţă riglată. În cazul în care riglata este desfăşurabilă, curba (C) se numeşte *curbă focală* a congruenţei (Δ).

Să considerăm congruenţa triplă formată de normalele proiective $A_0 A_3$. Variaţiile coordonatelor pluckeriene ale normalei $A_0 A_3$, pentru o deplasare infinitezimală a punctului A_0, sînt date de formula

$$\begin{aligned} d\,[A_0 A_3] = (\omega_{00} + \omega_{33})\,[A_0 A_3] + \omega_{31}\,[A_0 A_1] + \omega_{32}\,[A_0 A_2] + \\ + \omega_1\,[A_1 A_3] + \omega_2\,[A_2 A_3]. \end{aligned} \tag{44}$$

Dacă deplasarea lui A_0 se face de-a lungul unei curbe focale, trebuie să avem

$$\{d\,[A_0 A_3]\}^2 = (\omega_2\,\omega_{31} - \omega_1\,\omega_{32})\,[A_0 A_1 A_2 A_3] = 0,$$

adică

$$\omega_1\,\omega_{32} - \omega_2\,\omega_{31} = 0. \tag{45}$$

Curbele focale ale congruenţei normalelor proiective ale varietăţii neolonome sînt deci curbele integrale ale ecuaţiei

$$r\,\omega_1^2 + (s - u)\,\omega_1\,\omega_2 - v\,\omega_2^2 + t\,\omega_1\,\omega_2 - z\,\omega_2\,\omega_3 = 0, \tag{46}$$

care este *o ecuaţie de tip Monge.*

În mod asemănător, din relaţia

$$\begin{aligned} d\,[A_1 A_2] = (\omega_{11} + \omega_{22})\,[A_1 A_2] - \omega_{20}\,[A_0 A_1] + \omega_{10}\,[A_0 A_2] + \\ + \omega_{23}\,[A_1 A_3] - \omega_{13}\,[A_2 A_3] \end{aligned} \tag{47}$$

deducem

$$\{d\,[A_1 A_2]\}^2 = (\omega_{13}\,\omega_{20} - \omega_{23}\omega_{10})\,[A_0 A_1 A_2 A_3] = 0.$$

Curbele integrale ale ecuaţiei

$$\omega_{13}\,\omega_{20} - \omega_{23}\omega_{10} = 0$$

sau

$$\begin{aligned} b\,[(a + b)\,f - ar]\,\omega_1^2 + [bh - al - ab\,(s - u)]\,\omega_1\,\omega_2 - \\ - a\,[(a + b)\,n - bv]\,\omega_2^2 + b\,(i - at)\,\omega_1\,\omega_3 - a\,(p - bz)\,\omega_2\,\omega_3 = 0 \end{aligned} \tag{48}$$

sînt curbele focale ale congruenței formată de dreptele $A_1 A_2$, polarele normalelor proiective în raport cu polaritatea fundamentală determinată de varietatea neolonomă considerată.

4. Problema pusă de E. J. Wilczinski pentru suprafețe se poate extinde, în cazul varietăților neolonome, sub forma următoare: să se determine varietățile neolonome ale căror normale proiective formează o congruență triplă cu curbe focale nedeterminate.

Din ecuația (46) rezultă că aceste varietăți sînt determinate de condițiile

$$r = t = v = z = 0,\ s = u. \tag{49}$$

Introducînd aceste legături în sistemul (1) și considerînd ecuațiile

$$\omega_{31} = s\,\omega_1,\ \omega_{32} = s\,\omega_2, \tag{50}$$

deducem, diferențiindu-le exterior, ecuațiile exterioare

$$\left.\begin{aligned} [ds + s\,(\omega_{00} - \omega_{33}) - \omega_{30} + s^2\,\omega_3,\ \omega_1] = 0, \\ [ds + s\,(\omega_{00} - \omega_{33}) - \omega_{30} + s^2\,\omega_3,\ \omega_2] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

care au drept consecință ecuația Pfaff

$$ds + s\,(\omega_{00} - \omega_{33}) - \omega_{30} + s^2\,\omega_3 = 0\,. \tag{52}$$

Sistemul diferențial ce determină aceste varietăți particulare este deci

$$\begin{aligned} &\omega_{13} = a\,\omega_3\,, && \omega_{23} = b\ \omega_1\,, \\ &\omega_{12} = c\omega_1 + f\,\omega_3\,, && \omega_{21} = m\ \omega_2 + n\,\omega_3\,, \\ &\omega_{10} + a\,\omega_{32} = (a+b)\,f\,\omega_1 + h\ \omega_2 + i\ \omega_3\,, \\ &\omega_{20} + b\,\omega_{31} = l\ \omega_1 + (a+b)\ n\,\omega_2 + p\,\omega_3\,, \\ &\omega_{31} = s\ \omega_1\,, && \omega_{32} = s\ \omega_2\,, \\ &da + a\,(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) + g\,\omega_2 + h\ \omega_3 = 0, \\ &db + b\,(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) + j\ \omega_1 + l\ \omega_3 = 0, \\ &ds + s\,(\omega_{00} - \omega_{33}) - \omega_{30} + s^2\omega_3 = 0 \end{aligned} \tag{53}$$

și admite sistemul exterior

$$\left.\begin{aligned} &[\Delta\ c\ \omega_1] && && + && [\Delta\ f\ \omega_3] = 0\,, \\ & && && [\Delta\ m\ \omega_2] + && [\Delta\ n\ \omega_3] = 0\,, \\ (a+b)\ &[\Delta\ f\ \omega_1] + && && [\Delta\ h\ \omega_2] + && [\Delta\ i\ \omega_3] = 0\,, \\ &[\Delta\ \ \omega_1] + && (a+b) && [\Delta\ n\ \omega_2] + && [\Delta\ p\ \omega_3] = 0\,, \\ & && && [\Delta\ g\ \omega_2] + && [\Delta\ h\ \omega_3] = 0\,, \\ &[\Delta\ j\ \omega_1] && && + && [\omega\ l\ \omega_3] = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

unde $\Delta c, \ldots, \Delta p$ sînt 10 forme Pfaff independente, care se deduc din tabloul (12), ținînd seama de (49).

Numerele caracteristice ale sistemului (53) sînt

$$s_1 = 6,\ s_2 = 4\,,$$

iar rezolvarea ecuațiilor exterioare (54) se face introducînd 14 coeficienți arbitrari. Sistemul este deci în involuție cu $s_2 = 4$.

Varietățile neolonome ale căror normale proiective formează o congruență triplă cu curbe focale nedeterminate depind de patru funcții arbitrare de două argumente.

Normalele proiective A_0A_3 trec prin punctul fix

$$sA_0 - A_3. \tag{55}$$

Într-adevăr, avînd în vedere ecuațiile sistemului (53), deducem

$$d(sA_0 - A_3) = \omega_{33}(sA_0 - A_3).$$

Varietățile găsite generalizează *sferele proiective Țițeica-Wilczinski* în cazul neolonom.

5. Spre deosebire de cazul olonom, curbele focale ale congruenței A_1A_2 —care în general nu coincid cu curbele focale ale congruenței normalelor proiective —nu sînt nedeterminate.

Punînd problema nedeterminării curbelor focale ale congruenței A_1A_2, sîntem conduși la o varietate deosebită de sfera proiectivă neolonomă găsită mai sus.

Dacă congruența A_1A_2 are curbe focale nedeterminate, din ecuația (48) deducem condițiile

$$\left.\begin{aligned} &(a+b)f = ar, \quad b(h - as) = a(l - bu), \\ &(a+b)n = bv, \quad i = at, \quad p = bz. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

În ipoteza că nici una din congruențele asimptotice nu este formată din curbe plane și că varietatea nu este un sistem nul, adică dacă avem

$$ab \neq 0, \quad a + b \neq 0,$$

și introducînd argumentele auxiliare ρ, σ, τ, relațiile de condiție (56) se scriu

$$\left.\begin{aligned} &f = a\sigma, \quad r = (a+b)\sigma, \quad h = a(\rho + s), \\ &n = b\tau, \quad v = (a+b)\tau, \quad l = b(\rho + u), \\ &i = at, \quad p = bz. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Sistemul (1) devine, în urma acestor legături intervenite între coeficienți

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{13} = a\omega_2, \ \omega_{23} = b\omega_1, \ \omega_{12} = c\omega_1 + a\sigma\omega_3, \ \omega_{21} = m\omega_2 + b\tau\omega_3, \\ &\omega_{31} = u\omega_1 + (a+b)\tau\omega_2 + z\omega_3, \ \omega_{32} = (a+b)\sigma\omega_1 + s\omega_2 + t\omega_3, \\ &\omega_{10} = a\rho\omega_2, \ \omega_{20} = b\rho\omega_1, \\ &da = a(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) + g\omega_2 + a(\rho + s)\omega_3 = 0, \\ &db + b(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) + j\omega_1 + b(\rho + u)\omega_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Ca și în cazul precedent, vom prelungi parțial acest sistem. Diferențiind exterior ecuațiile

$$\omega_{10} = a\rho\omega_2, \ \omega_{20} = b\rho\omega_1,$$

obținem ecuațiile exterioare

$$[d\rho + \rho(\omega_{00} - \omega_{33}) + \omega_{30} - \rho^2\omega_3, \ \omega_1] = 0,$$
$$[d\rho + \rho(\omega_{00} - \omega_{33}) + \omega_{30} - \rho^2\omega_3, \ \omega_2] = 0,$$

care au drept consecință ecuația Pfaff

$$d\rho + \rho(\omega_{00} - \omega_{33}) + \omega_{30} - \rho^2\omega_3 = 0, \tag{59}$$

ce se adaugă sistemului (58). Prelungirea parțială este permisă, deoarece derivarea exterioară a ecuației (59) duce la un rezultat nul dacă se ține seama de ecuațiile sistemului (58).

Sistemul exterior asociat sistemului Pfaff format de ecuațiile (58) și (59) este

$$\left.\begin{array}{rrrr} [\Delta c\,\omega_1] & & + a\,[\Delta\sigma\,\omega_3] = 0\,, \\ & [\Delta m\omega_2] & + b\,[\Delta\tau\,\omega_3] = 0\,, \\ [\Delta u\,\omega_1[+ & (a+b)\,[\Delta\tau\omega_2] & + [\Delta z\,\omega_3] = 0\,, \\ (a+b)\,[\Delta\sigma\,\omega_1] + & & [\Delta s\,\omega_2] + [\Delta t\,\omega_3] = 0\,, \\ & & [\Delta g\,\omega_2] + a\,[\Delta s\,\omega_2] = 0\,, \\ [\Delta j\,\omega_1] & & + b\,[\Delta u\,\omega_3] = 0\,, \end{array}\right\} \tag{60}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} \Delta\sigma &= d\sigma + \sigma(2\,\omega_{22} - 2\,\omega_{33}) - (g\sigma + c\tau + t)\,\omega_2\,, \\ \Delta\tau &= d\tau + \tau(2\,\omega_{11} - 2\,\omega_{33}) - (j\,\tau + m\sigma + z)\,\omega_1\,, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

iar celelalte forme $\Delta c, \ldots, \Delta z$ se deduc din (12), ținînd seama de legăturile (57).

Sistemul este în involuție cu

$$s_1 = 6,\ s_2 = 4.$$

Ca și sferele proiective neolonome, varietățile neolonome, a căror congruență A_1A_2 are curbe focale nedeterminate, depind de patru funcții arbitrare de două argumente.

Dreptele congruenței A_1A_2 sînt situate în planul

$$[\rho A_0 - A_3,\ A_1A_2] = \rho\,[A_0A_1A_2] + [A_1A_2A_3], \tag{62}$$

care este fix, după cum rezultă din relația

$$d\{\rho\,[A_0A_1A_2] + [A_1A_2A_3]\} = d\,(\rho\alpha_3 - \alpha_0) = \\ = \rho\,\omega_3\,(\rho\alpha_3 - \alpha_0)\,.$$

Aceste varietăți neolonome le vom numi varietăți cu *plan director*.

6. Rămîne să cercetăm varietățile pentru care atît congruența normalelor, cît și congruența polarelor lor, au curbe focale nedeterminate.

Aceste varietăți sînt caracterizate de condițiile

$$\left.\begin{array}{ll} r = t = v = z = 0\,, & s = u\,, \\ (a+b)\,f = ar\,, & (a+b)\,n = bv\,, \\ b(h - as) = a(l - bu)\,, & i = at,\ p = bz\,. \end{array}\right\} \tag{63}$$

În aceeași ipoteză ca pînă acum

$$ab \neq 0,\ a + b \neq 0,$$

introducînd argumentul auxiliar σ, condițiile (63) se scriu

$$f = i = n = p = r = t = v = z = 0,\ h = a\sigma,\ l = b\sigma \tag{64}$$

iar sistemul (1) devine

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_{13} = a\,\omega_2\ , \quad \omega_{23} = b\omega_1 \\
&\omega_{12} = c\,\omega_1\ , \quad \omega_{21} = m\,\omega_2\ , \quad \omega_{31} = s\,\omega_1, \omega_{32} = s\,\omega_2, \\
&\omega_{10} + a\,\omega_{32} = a\,\sigma\omega_2\ , \quad \omega_{20} + b\omega_{31} = b\sigma\,\omega_1, \\
&da + a\,(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) + g\,\omega_2 + a\,\sigma\,\omega_3 = 0, \\
&db + b\,(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}) + j\omega_1 + b\sigma\,\omega_3 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Diferențiind exterior ecuațiile

$$\omega_{31} = s\,\omega_1\ , \qquad \omega_{32} = s\,\omega_2\ ,$$

obținem ecuațiile exterioare

$$[ds + s\,(\omega_{00} - \omega_{33}) - \omega_{30} + s^2\,\omega_3, \omega_1] = 0,$$
$$[ds + s\,(\omega_{00} - \omega_{33}) - \omega_{20} + s^2\omega_3,\ \omega_2] = 0,$$

din care rezultă ecuația

$$ds + s\,(\omega_{00} - \omega_{33}) - \omega_{30} + s^2\,\omega_3 = 0, \tag{66}$$

iar din ecuațiile

$$\omega_{10} + a\,\omega_{32} = a\,\sigma\,\omega_2\ , \quad \omega_{20} + b\,\omega_{31} = b\sigma\,\omega_1$$

se obține

$$[d\sigma + \sigma\,(\omega_{00} - \omega_{33}) + \sigma\,(2\,s - \sigma)\,\omega_3,\ \omega_2] = 0\ ,$$
$$[d\sigma + \sigma\,(\omega_{00} - \omega_{33}) + \sigma\,(2\,s - \sigma)\,\omega_3,\ \omega_1] = 0\ ,$$

deci

$$d\sigma + \sigma\,(\omega_{00} - \omega_{33}) + \sigma\,(2\ s - \sigma)\,\omega_3 = 0. \tag{67}$$

Amîndouă ecuațiile (66) și (67) dau, prin diferențiere exterioară, un rezultat nul, dacă se ține seama de ecuațiile (65).

Sistemul Pfaff format de ecuațiile (65), (66) și (67) au sistemul exterior

$$\left.\begin{aligned}
&[\Delta\,c\,\omega_1] = 0, \qquad [\Delta\,m\,\omega_2] = 0, \\
&[\Delta\,g\,\omega_2] = 0, \qquad [\Delta j\,\omega_1] = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

unde

$$\left.\begin{aligned}
\Delta c &= dc + c\,(\omega_{00} - 2\,\omega_{11} + \omega_{22}) + c\,s\,\omega_3\ , \\
\Delta m &= dm + m\,(\omega_{00} + \omega_{11} - 2\,\omega_{22}) + m\,s\,\omega_3\ , \\
\Delta g &= dg + g\,(2\,\omega_{00} - \omega_{11} - 2\omega_{22} - \omega_{33}) + 3a\,(a - b)\,\sigma\omega_1 + g\,(s + \sigma)\,\omega_3\ , \\
\Delta j &= dj + j\,(2\,\omega_{00} - 2\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) - 3b\,(a - b)\,\sigma\,\omega_2 + j\,(s + \sigma)\,\omega_3
\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

și este în involuție cu $s_1 = 4$.

Varietățile considerate, sfere proiective neolonome cu plan director, depind de patru funcții arbitrare de un argument.

Caracteristicile sînt date de ecuația

$$\omega_1^2\,\omega_2^2 = 0. \tag{70}$$

Pentru identificarea lor să observăm că din relațiile

$$\omega_1' = [\omega_{00} - \omega_{11} - s\omega_3,\ \omega_1]\ ,$$
$$\omega_2' = [\omega_{00} - \omega_{22} - s\omega_3,\ \omega_2]\ ,$$

deducem

$$[\omega_1'\,\omega_1] = 0\ , \qquad [\omega_2'\,\omega_2] = 0. \tag{71}$$

Dacă, în general, asociem punctul A_0 cu planul $[A_0\ A_2\ A_3]$ și cu planul $[A_0\ A_1\ A_3]$, obținem două varietăți neolonome asociate varietății date și ale căror ecuații de definiție sînt — respectiv —

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1 = 0 && \text{pentru } A_0\,[A_0\ A_2\ A_3]\,, \\ &\omega_2 = 0 && \text{pentru } A_0\,[A_0\ A_1\ A_3]\,. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

În cazul sferelor proiective neolonome cu plan director, ecuațiile exterioare (71) exprimă că fiecare din ecuațiile (72) este complet integrabilă. Varietățile definite de aceste ecuații sînt olonome, adică sînt formate de familii de suprafețe ce depind de un parametru.

Orice curbă, situată pe o suprafață ce aparține uneia din aceste două familii, este o curbă caracteristică pentru sistemul (65) — (67).

Normalele proiective trec prin punctul fix

$$sA_0 - A_3, \tag{73}$$

deci familiile de suprafețe definite de (72) sînt conuri cu vîrful în punctul (73).

Polarele normalelor proiective sînt situate în planul fix

$$(\sigma - s)\,[A_0\ A_1\ A_2] + [A_1\ A_2\ A_3]. \tag{74}$$

7. Problemele puse ne-au condus la trei clase distincte de varietăți neolonome, spre deosebire de cazul olonom, unde aceleași probleme duc la o singură clasă de suprafețe: *sferele proiective Țițeica-Wilczinski.*

Deosebirea este accentuată de faptul că nici una din cele trei clase de varietăți neolonome nu au congruențele asimptotice formate din curbe ce aparțin unor complexe liniare.

Dacă punem problema determinării sferelor proiective neolonome, care au invariantul fundamental constant, găsim varietăți ce admit această proprietate.

Ținînd seama de relațiile (28) și (49), putem scrie sistemul Pfaff al acestor varietăți

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{13} = a\omega_2\,, \quad \omega_{23} = b\,\omega_1\,, \quad \omega_{12} = c\omega_1 + f\omega_3\,, \quad \omega_{21} = m\omega_2 + n\omega_3\,, \\ &\omega_{31} = s\,\omega_1\,, \quad \omega_{32} = s\,\omega_2\,, \quad ds - s\,(\omega_{00} - \omega_{33}) - \omega_{30} + s^2\omega_3 = 0\,, \\ &\omega_{10} + a\,\omega_{32} = (a+b)\,f\,\omega_1 + a\sigma\,\omega_2 + i\,\omega_3\,, \\ &\omega_{20} + b\,\omega_{31} = b\sigma\,\omega_1 + (a+b)\,n\,\omega_2 + p\omega_3\,, \\ &da + a(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}) + a\,\sigma\,\omega_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

$$(b = -aI).$$

Diferențierea exterioară a ultimei ecuații a sistemului conduce la relația exterioară

$$3\,(a-b)\,\sigma\,[\omega_1\,\omega_2] + [d\sigma + \sigma\,(\omega_{00} - \omega_{33}),\,\omega_3] + 2\,i\,[\omega_1\,\omega_3] + \\ + 2\,p\,(\omega_2\omega_3) = 0,$$

din care rezultă

$$\sigma = i = p = 0. \tag{76}$$

Ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{10} + a\,\omega_{32} = a\,(1 - I)\,f\,\omega_1, \\ &\omega_{20} - a\,I\,\omega_{31} = a\,(1 - I)\,n\,\omega_2 \end{aligned}\right\}$$

dau ecuațiile exterioare

$$[df + f(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}) + cn\omega_2 + 2fs\omega_3, \omega_1] + 2fn[\omega_2\omega_3] = 0,$$
$$[dn + n(\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}) + fm\omega_1 + 2ns\omega_3, \omega_2] + 2fn[\omega_1\omega_3] = 0,$$

care au consecință

$$f = n = 0. \tag{77}$$

Varietățile aparțin clasei sferelor proiective neolonome cu plan director. Centrul varietății este situat în planul director ($\sigma = 0$).

Sistemul exterior corespunzător este

$$[\Delta c\omega_1] = 0, \qquad [\Delta m\omega_2] = 0. \tag{78}$$

deci sistemul Pfaff format de ecuațiile (75) în care se introduc legăturile (76) și (77), este în involuție cu $s_1 = 2$.

Sferele neolonome proiective cu invariant fundamental constant depind de două funcții arbitrare de un argument și sînt varietăți neolonome izotermo-asimptotice.

Punînd condiția ca tangenta asimptotică A_0A_1, considerată de-a lungul curbei asimptotice

$$(C_1) \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0,$$

să aparțină complexului liniar fix

$$\Gamma = \alpha[A_0A_1] + \beta[A_0A_2] + \gamma[A_0A_3] + \alpha'[A_1A_2] + \beta'[A_2A_3] + \gamma'[A_2A_3],$$

găsim

$$\gamma' = 0. \tag{79}$$

Diferențiind și ținînd seamă de condițiile de fixitate cunoscute, precum și de ecuațiile sistemului (75), obținem succesiv

$$1)\ \beta' = 0,$$
$$2)\ b\alpha' + \gamma = 0,$$
$$3)\ \beta = 0,$$
$$4)\ \alpha = 0.$$

Există deci un complex liniar fix care conține tangentele unei curbe asimptotice (C_1)

$$\Gamma = aI[A_0A_3] + [A_1A_2]. \tag{80}$$

În mod analog se constată că o curbă asimptotică

$$(C_2) \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_3 = 0.$$

aparține complexului liniar fix

$$\Gamma' = a[A_0A_3] + [A_1A_2] \tag{18}$$

Curbele congruențelor asimptotice ale sferelor proiective neolonome cu plan director și cu invariant fundamental constant aparțin unor complexe liniare fixe.

Cuadricele osculatoare riglatelor asimptotice asociate punctelor regiunii (R) trec toate prin punctul fix $A_0 - A_3$ și sînt tangente în acest punct la planul director al varietății.

НЕГОЛОНОМНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ТИПА ЦИЦЕЙКА—ВИЛЬЦИНСКОГО

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Автор рассматривает тройные конгруенции, образованные проективными нормалями неголономного многообразия V_3^2 и прямыми, соответствующими в фундаментальной полярности, определенной многообразием, и предлагает задачу, аналогичную задаче, предложенной Вильцинским для поверхностей, то есть определение V_3^2, вышеуказанные конгруенции которых являются конгруенциями неопределенных фокальных кривых.

Сначала рассматривается довольно распространенный класс многообразий V_3^2, основной инвариант которых (инвариант проективности введенной основной полярностью в пучок прямых плоскости касательной к V_3^2 в произвольной регулярной ее точке) постоянный и направляющие кривые которых образуют две гармонично сопряженные конгруенции стносительно асимптотических конгруенций.

Эти V_3^2, называемые изотермоасимптотическими многообразиями, зависят от трех произвольных функций двух аргументов и характеризуются свойством квадрик, соприкасающихся с двумя асимптотически регулярными поверхностями, двукратно касаться в двух точках проективной нормали многообразия.

Неголономные многообразия V_3^2, фокальные кривые конгруенции проективных нормалей которых неопределены, существуют и зависят от четырех произвольных функций двух аргументов.

Проективные нормали проходят через фиксированную точку, являющуюся центром многообразия.

Эти V_3^2 являются следовательно неголономными проективными сферами. Многообразия V_3^2, фокальные кривые конгруенции которого, образуемые полярными проективных нормалей, оказываются неопределенными, образуют обособленный от предшествующего класс.

Они зависят от четырех произвольных функций двух аргументов, прямые же рассматриваемой конгруенции расположены на фиксированной плоскости — направляющей плоскости многообразия.

Наконец V_3^2, фокальные кривые двух конгруенций которого оказываются одновременно неопределенными, находятся в зависимости от четырех произвольных функций какого-либо аргумента.

Проективные нормали проходят через фиксированную точку, и их полярные лежат на фиксированной плоскости. Эти многообразия являются неголономными проективными сферами с направляющей плоскостью.

Неголономные проективные сферы с постоянным основным инвариантом суть изотермо-асимптотические V_3^2 с направляющей плоскостью, причем центр многообразия принадлежит направляющей плоскости.

Они зависят от двух произвольных функций какого-либо аргумента и их ассимптоты принадлежат линейным комплексам.

Квадрики, соприкасающиеся с их асимптотически регулярными поверхностями, проходят через центр многообразия и являются касательными к направляющей плоскости.

VARIÉTÉS NON-HOLONOMES DU TYPE ŢIŢEICA-WILCZINSKI

(RÉSUMÉ)

On considère les congruences triples, formées par les normales projectives d'une variété non-holonome V_3^2 et par les droites qui leur correspondent dans la *polarité fondamentale*, déterminée par la variété, et on se propose un problème analogue à celui posé par Wilczinski pour les surfaces, c'est-à dire la détermination des V_3^2 dont les congruences mentionnées sont à courbes focales indéterminées.

On étudie d'abord une clases assez étendue de variétés V_3^2 dont *l'invariant fondamental* (l'invariant de la projectivité induite par la polarité fondamentale dans le faisceau de droites du plan tangent à la V_3^2 en un point régulier arbitraire de celle-ci) est constant et dont les courbes directrices forment deux congruences harmoniquement conjuguées par rapport aux congruences asymptotiques.

Ces V_3^2, qu'on nomme variétés *isothermo-asymptotiques*, dépendent de trois fonctions arbitraires de deux arguments et sont caractérisées par la propriété des quadriques osculatrices, aux deux surfaces réglées asymptotiques, d'être bitangentes en deux points de la normale projective de la variété.

Les variétés non-holonomes V_3^2, dont les courbes focales de la congruence des normales projectives sont indéterminées, existent et dépendent de quatre fonctions arbitraires de deux arguments.

Les normales projectives passent par un point fixe, le *centre* de la variété. Ces V_3^2 sont donc des *sphères projectives* non-holonomes. Les variétés V_3^2, dont les courbes focales de la congruence formée par les polaires des normales projectives sont indéterminées, forment une classe distincte de la précédente.

Elles dépendent de quatre fonctions arbitraires de deux arguments et les droites de la congruence considérées sont situées dans un plan fixe, le *plan directeur* de la variété.

Enfin les V_3^2 dont les courbes focales des deux congruences sont simultanément indéterminées dépendent de quatre fonctions arbitraires d'un argument.

Les normales projectives passent par un point fixe et leurs polaires sont situées dans un plan fixe. Ces variétés sont des sphères projectives non-holonomes, à plan directeur.

Les sphères projectives non-holonomes, à invariant fondamental constant sont des V_3^2 isothermo-asymptotiques à plan directeur, le centre de la variété appartenant au plan directeur.

Elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument et leurs asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires.

Les quadriques osculatrices de leurs surfaces réglées asymptotiques passent par le centre de la variété et y sont tangentes au plan directeur.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Ţiţeica, *Opere*, Bucureşti, 1941, p. 128.
2. E. J. Wilczynski, *Über Flächen mit unbestimten Direktrix kurven*. Mathematische Annalen, 1915, t. 76, p. 129 — 160.
3. Tiberiu Mihăilescu, *Sur les variétés non-holonomes de l'S_3 projectif*. Bull. Math. Soc. Roum. Sci., Bucureşti, 1942, t. 44, nr. 1 — 2, p. 35 — 53.
4. Al. Pantazi, *Sur les variétés non-holonomes à asymptotiques rectilignes et leur déformation projective*. Bull. Math. Soc. Roum. Sci., Bucureşti, 1947, t. 48, nr. 1—2, p. 326,

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 1–2, 1955

ASUPRA SPAŢIILOR V_5 SIMETRICE *)

DE

C. TELEMAN

INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [1] am afirmat că spaţiile riemanniene V_5, cu grup tranzitiv de mişcări şi având ca grup de stabilitate a originii, în coordonate normale, grupul de rotaţii

$$X = X_{12} + 2\,X_{34},\quad Y = \sqrt{3}\,X_{25} + X_{13} + X_{24},\quad Z = \sqrt{3}\,X_{15} - X_{14} + X_{23}$$
$$\left(X_{ij} = x^i \frac{\partial f}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial f}{\partial x^i}\right), \tag{1}$$

sînt spaţii euclidiene. Grupul (1) fiind singurul subgrup ireductibil al grupului complet de rotaţii în cinci variabile, am dedus că nu există spaţii V_5 simetrice, ireductibile şi cu curbură variabilă.

Prof. G. Vrănceanu ne-a atras atenţia că această concluzie nu este adevărată, deoarece din clasificarea spaţiilor simetrice dată de E. Cartan [2], rezultă că există spaţii V_5 simetrice. Şi anume, dacă considerăm coeficienţii a_{ij} ai unei forme pozitiv definite $a_{ij}\,x^i\,x^j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ drept coordonate omogene într-un spaţiu V_5 şi dotăm acest spaţiu cu grupul de mişcări (care este un grup proiectiv G_8)

$$a'_{ij} = p^r_i\,p^s_j\,a_{rs} \quad (p^r_i \text{ constante reale}), \tag{2}$$

atunci V_5^- este un spaţiu riemannian simetric cu curbură negativă.

Aceasta rezultă din faptul că grupul (2) este simplu, deschis şi tranzitiv în V_5^-, iar grupul de stabilitate al punctului $a_{ij} = \delta^i_j$, deci al originii sistemului de coordonate x^i definit de **)

$$x^1 = \frac{\sqrt{6}\,a_{23}}{a_{11}+a_{22}+a_{33}},\quad x^2 = \frac{\sqrt{6}\,a_{31}}{a_{11}+a_{22}+a_{33}},\quad x^3 = \frac{\sqrt{6}\,a_{12}}{a_{11}+a_{22}+a_{33}},$$
$$x^4 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{11}+a_{22}+a_{33}},\quad x^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{a_{11}+a_{22}-2\,a_{33}}{a_{11}+a_{22}+a_{33}}, \tag{3}$$

*) Lucrare prezentată Institutului de matematică la data de 24 noiembrie 1954.

**) Să observăm că deşi grupul de stabilitate este liniar în variabilele x^i, aceste variabile nu constituie un sistem normal în origine, deoarece dacă ar fi aşa, grupul complet de mişcări al lui V_5^- dat de (2) fiind proiectiv în variabilele x^i, geodezicele lui V_5^- ar fi dreptele spaţiului, deci V_5^- ar avea curbura constantă.

este, în acest sistem, grupul de rotații (1) iar transformările grupului de stabilitate sînt invariate de transformarea care face să corespundă fiecărei forme $c_{ij}\, x^i\, x^j$ transformata ei prin polaritate față de forma $\varepsilon_j^i\, x^i\, x^j$, deci fiecărui punct $P(a_{ij})$ din V_5^- îi corespunde punctul $P'\ (\alpha_{ij})$, unde α_{ij} sînt minorii normalizați ai determinantului $|a_{ij}|$; spațiul V_5^- admite deci o simetrie în jurul fiecărui punct.

În această lucrare vom relua calculele din [1] și vom arăta că spațiile simetrice V_5^- și spațiile simetrice V_5^+ cu curbură pozitivă, care le corespund, sînt singurele spații V_5 omogene avînd ca grup de stabilitate grupul (1); vom da apoi unele proprietăți ale acestor spații.

Se observă că spațiile V_5^- au grupul simplu tranzitiv, real, de mișcări

$$a'_{ij} = p_i^r\, p_j^s\, a_{rs} \quad (p_i^r = 0 \text{ dacă } r < i). \tag{4}$$

Dintr-o teoremă stabilită de prof. G. Vrănceanu [3], rezultă că spațiile V_5^+ posedă un grup simplu tranzitiv imaginar.

Proprietatea se menține pentru spațiile $V_{n(n+1)/2-1}^-$, considerate de E. Cartan [2], care au drept coordonate omogene coeficienții a_{ij} ai unei forme pătratice pozitiv definite în n variabile și care au ca grup de mișcări grupul G_{n^2-1} dat de (2), deoarece grupul (4) cu $r, s, i, j = 1, 2, \ldots, n$ este un subgrup tranzitiv în $V_{n(n+1)/2-1}^-$.

Se știe că proprietatea de a poseda un grup $\mathcal{G}$ simplu tranzitiv de mișcări aparține tuturor spațiilor cu curbură constantă [3], precum și spațiilor $V_{2p}(\lambda)$ considerate de prof. G. Vrănceanu [4], grupul $\mathcal{G}$ fiind real dacă curbura spațiului este negativă.

Menționăm o proprietate interesantă a grupului (1): ținînd seama că în variabilele a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, legate de $x^1, \ldots, x^5$ prin formulele (3), acest grup invariază determinantul $|a_{ij}|$, rezultă că grupul (1) invariază polinomul armonic

$$2x^1 x^2 x^3 - (x^1)^2 x^4 + (x^2)^2 x^4 - \frac{x^5}{\sqrt{3}}\left[(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2(x^3)^2 - 2(x^4)^2 + \frac{2(x^5)^2}{3}\right].$$

1. *Structura grupului de mișcări al spațiului* V_5. Vom determina acum structura grupului tranzitiv G_8, care conține grupul (1) ca grup de stabilitate al unui punct din V_5.

Structura grupului (1) este

$$(XY) = Z,\ (YZ) = X,\ (ZX) = Y; \tag{5}$$

putem alege convenabil operatorii

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \text{termeni de ordinul 1 sau de ordin superior în } x^1, \ldots, x^5$$

$(i = 1, 2, \ldots, 5)$, care formează împreună cu (1) grupul G_8, astfel încît să avem o structură de forma

$$\begin{array}{lll}
(A_1X) = A_2, & (A_1Y) = A_3, & (A_1Z) = -A_4 + \sqrt{3}\,A_5 \\
(A_2X) = -A_1 + kY + nZ, & (A_2Y) = A_4 + \sqrt{3}A_5, & (A_2Z) = A_3 + \alpha X + \beta Y + rZ, \\
(A_3X) = 2A_4 + \ldots, & (A_3Y) = -A_1 + aX + cZ, & (A_3Z) = -A_2 + pX + qY + rZ, \\
(A_4X) = -2A_3 + \ldots, & (A_4Y) = -A_2 + \ldots, & (A_4Z) = A_1 + \ldots, \\
(A_5X) = \ldots, & (A_5Y) = -\sqrt{3}A_2 + \ldots, & (A_5Z) = -\sqrt{3}A_1 + \ldots,
\end{array} \tag{6}$$

unde punctele țin locul unor combinații liniare de X, Y, Z.

Să indicăm cu (U, V, W) egalitatea ce se obține formînd identitatea lui Iacobi

$$[(UV)W] + [(VW)U] + [(WU)V] = 0,$$

U, V, W fiind operatorii grupului G_8; avem atunci

$$(XYA_1): \quad (A_3X) = 2A_4,$$

$$(XZA_1): \quad (A_4X) - \sqrt{3}(A_5X) + 2A_3 + \alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0 \tag{7}$$

$$(A_2XY): \quad (A_4X) + \sqrt{3}(A_5X) + 2A_3 + (n+\alpha)X + \beta Y + \gamma Z = 0,$$

deci

$$(A_4X) = -2A_3 - \left(\frac{n}{2} + \alpha\right)X - \beta Y - \gamma Z, \tag{8}$$

$$(A_5X) = -\frac{n}{2\sqrt{3}}X, \tag{9}$$

$$(A_1YZ): \quad (A_4Y) - \sqrt{3}(A_5Y) + (A_3Z) - A_2 = 0,$$

$$(A_2XZ): \quad (A_3X) = 2A_4 + kX - \gamma Y + \beta Z, \tag{10}$$

comparînd cu (7), avem

$$k = \beta = \gamma = 0, \tag{11}$$

$$(A_2YZ): \quad (A_4Z) + \sqrt{3}(A_5Z) - (A_3Y) + A_1 - (n+\alpha)Z = 0, \tag{12}$$

$$(A_3XY): \quad (A_4Y) = -A_2 + \frac{P}{2}X + \frac{c+q}{2}Y + \frac{r}{2}Z, \tag{13}$$

și din (10) rezultă

$$(A_5Y) = -\sqrt{3}A_2 + \frac{p\sqrt{3}}{2}X + \frac{c+3q}{2\sqrt{3}}Y + \frac{r\sqrt{3}}{2}Z, \tag{14}$$

$$(A_3XZ): \quad A_4Z) = A_1 - \frac{a}{2}X + \frac{r}{2}Y - \frac{c+n+q}{2}Z, \tag{15}$$

iar din (12)

$$(A_5Z) = -\sqrt{3}A_1 + \frac{a\sqrt{3}}{2}X - \frac{r}{2\sqrt{3}}Y + \frac{3n+q+3c+2\alpha}{2\sqrt{3}}Z, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &(A_3ZY): \quad a = p = r = 0, \\ &(A_4XY): \quad c + \alpha = q + n, \\ &(A_4XZ): \quad c + \alpha = q - n, \end{aligned} \tag{17}$$

deci

$$n = 0, \ \alpha = q - c. \tag{18}$$

$$(A_5YZ): \quad c = 0, \ \alpha = q. \tag{19}$$

Ţinînd seama de (7), (8), (9) (11), (13), (14), (17), (18), (19), structura (6) se scrie, punînd $\alpha = 2m$,

$$\begin{array}{lll} (A_1X) = A_2, & (A_1Y) = A_3, & (A_1Z) = -A_4 + \sqrt{3}A_5, \\ (A_2X) = -A_1, & (A_2Y) = A_4 + \sqrt{3}A_5, & (A_2Z) = A_3 + 2mX, \\ (A_3X) = 2A_4, & (A_3Y) = -A_1, & (A_3Z) = -A_2 + 2mY, \\ (A_4X) = -2A_3 - 2mX, & (A_4Y) = -A_2 + mY, & (A_4Z) = A_1 - mZ, \\ (A_5X) = 0, & (A_5Y) = -\sqrt{3}A_2 + & (A_5Z) = -\sqrt{3}A_1 + \\ & + \sqrt{3}mY, & + \sqrt{3}mZ. \end{array} \tag{20}$$

Avem apoi

$$(A_1A_2X):\quad (A_1A_2) = \lambda X + \mu A_5, \tag{21}$$

$$(A_1A_3Y):\quad (A_1A_3) = -3kA_4 + \sqrt{3}kA_5 + qY, \tag{22}$$

$$(A_2A_3Z):\quad (A_2A_3) = 2mA_1 + 3k'A_4 + \sqrt{3}k'A_5 + q'Z, \tag{23}$$

$$(A_3A_4X):\quad (A_3A_4) = \lambda' X + \mu' A_5 - 2mA_3, \tag{24}$$

$$(A_1A_3X):\quad (A_1A_4) = -mA_1 + 3kA_3 - \frac{3k'}{2}A_4 - \frac{k'\sqrt{3}}{2}A_5 + 6mkX - (q+q')Z, \tag{25}$$

$$(A_3A_4Y):\quad k = k' = \mu' = 0,\ \lambda' = q + 2q' \tag{26}$$

şi (22), (23), (24), (25) devin

$$\left.\begin{array}{l} (A_1A_3) = qY,\quad (A_2A_3) = 2mA_1 + q'Z, \\ (A_3A_4) = -2mA_3 + (q+2q')X,\ (A_1A_4) = -mA_1 - (q+q')Z; \end{array}\right\} \tag{27}$$

$$(A_3A_4Z):\quad (A_2A_4) = mA_2 + 2q'Y, \tag{28}$$

$$(A_2A_3X):\quad q = 3q', \tag{29}$$

$$(A_1A_2X):\quad (A_1A_5) = m\sqrt{3}A_1 - \mu\sqrt{3}A_2 + m\mu\sqrt{3}Y + \frac{\lambda + 5q'}{\sqrt{3}}Z, \tag{30}$$

$$(A_1A_2Z):\quad (A_2A_5) = \mu\sqrt{3}A_1 + m\sqrt{3}A_2 + \frac{\lambda + 5q'}{\sqrt{3}}Y - \sqrt{3}m\mu Z, \tag{31}$$

$$(A_1A_3Z):\quad (A_3A_5) = \frac{2q' - \lambda}{\sqrt{3}}X - \mu A_5, \tag{32}$$

$$(A_1A_4Y):\quad \mu = 0,\ \lambda = q', \tag{33}$$

$$(A_1A_4Z):\quad (A_4A_5) = 0, \tag{34}$$

$$(A_2A_3Y):\quad q' = 0. \tag{35}$$

Ţinînd seama de (26), (29), (33), (35), formulele (21), (27), (28), (30), (31), (32) ne dau, cu (34), relaţiile de structură

$$\left.\begin{array}{l} (A_1A_2) = (A_1A_3) = (A_3A_5) = (A_4A_5) = 0,\ (A_1A_4) = -mA_1, \\ (A_1A_5) = m\sqrt{3}A_1,\ (A_2A_3) = 2mA_1,\ (A_2A_4) = mA_2,\ (A_2A_5) = m\sqrt{3}A_2, \\ (A_3A_4) = -2mA_3, \end{array}\right\} \tag{36}$$

care împreună cu (5) și (20) ne dau structura grupului G_8; m este o constantă reală sau complexă astfel încît să existe o transformare de operatori

$$B_i = A_i + p_i X + q_i Y + r_i Z \quad (i = 1, \ldots, 5),$$

cu parantezele $(B_i B_j)$, $(B_i X)$, $(B_i Y)$, $(B_i Z)$ combinații liniare cu coeficienți reali de B_i, X, Y, Z.

Punînd

$$B_1 = A_1 - m Z, \; B_2 = A_2 - m Y, \; B_3 = A_3 + m X, \; B_4 = A_4, \; B_5 = A_5 \quad (36')$$

avem structura, notînd cu $X = B_6$, $Y = B_7$, $Z = B_8$,

$$\left.\begin{array}{lll}
(B_1 B_2) = m^2 B_6, & (B_1 B_3) = m^2 B_7, & (B_1 B_4) = -m^2 B_8, \\
(B_1 B_5) = \sqrt{3}\, m^2 B_8, & (B_2 B_3) = m^2 B_8, & (B_2 B_4) = m^2 B_7, \\
(B_2 B_5) = \sqrt{3}\, m^2 B_7, & (B_3 B_4) = 2 m^2 B_6, & \\
(B_3 B_5) = (B_4 B_5) = 0, & & \\
(B_1 B_6) = B_2, & (B_1 B_7) = B_3, & (B_1 B_8) = -B_4 + \sqrt{3} B_5, \\
(B_2 B_6) = -B_1, & (B_2 B_7) = B_4 + \sqrt{3} B_5, & (B_2 B_8) = B_3, \\
(B_3 B_6) = 2 B_4, & (B_3 B_7) = -B_1, & (B_3 B_8) = -B_2, \\
(B_4 B_6) = -2 B_3, & (B_4 B_7) = -B_2, & (B_4 B_8) = B_1, \\
(B_5 B_6) = 0, & (B_5 B_7) = -\sqrt{3} B_2, & (B_5 B_8) = -\sqrt{3} B_1, \\
(B_6 B_7) = B_8, & (B_7 B_8) = B_6, & (B_8 B_6) = B_7.
\end{array}\right\} \quad (37)$$

Aceste relații ne arată că G_8 este real dacă m este real sau pur imaginar și atunci G_8 este grupul de mișcări al unui spațiu simetric al lui Cartan, deoarece structura lui G_8 este de forma

$$(B_h B_k) = C^{\alpha}_{hk} B_{\alpha}, \; (B_k B_{\beta}) = a^h_{k\beta} B_h, \; (B_{\beta} B_{\gamma}) = C^{\alpha}_{\beta\gamma} B_{\alpha} \quad (37')$$
$$(h, k = 1, \ldots, 5; \; \alpha, \beta, \gamma = 6, 7, 8).$$

Tensorul de curbură al spațiului V_5 ce posedă grupul G_8 este dat de

$$\gamma^h_{klr} = a^h_{k\alpha} C^{\alpha}_{lr},$$

deci punînd $\lambda = -m^2$ și ținînd seama de valorile coeficienților $a^h_{k\alpha}$, C^{α}_{lr}, avem pentru componentele γ^h_{klr} nenule

$$\begin{array}{c}
\gamma^1_{212} = \lambda, \; \gamma^3_{412} = 2\lambda, \; \gamma^1_{313} = \lambda, \; \gamma^2_{413} = \lambda, \; \gamma^2_{513} = \lambda\sqrt{3}, \\
\gamma^1_{414} = \lambda, \; \gamma^1_{514} = -\lambda\sqrt{3}, \; \gamma^2_{314} = -\lambda, \; \gamma^1_{515} = 3\lambda, \; \gamma^2_{315} = \lambda\sqrt{3}, \\
\gamma^2_{323} = \lambda, \; \gamma^2_{424} = \lambda, \; \gamma^2_{524} = \lambda\sqrt{3}, \; \gamma^2_{525} = 3\lambda, \; \gamma^3_{434} = 4\lambda,
\end{array} \quad (38)$$

unde nu am scris componentele γ^h_{klr} ce se deduc din cele de mai sus folosind relațiile

$$\gamma^h_{klr} = -\gamma^k_{hlr}, \; \gamma^h_{klr} = \gamma^l_{rhk};$$

Componentele tensorului de curbură contractat $\gamma^{\rho}_{k\rho k}$ sînt

$$\gamma_{hk} = 6\lambda \delta^h_k. \quad (39)$$

Avem deci următoarea

T e o r e m ă. *Spațiile V_5 cu grup tranzitiv G_8 de mișcări și avînd grupul de stabilitate al originii, în coordonate normale, dat de* (1), *sînt spațiile simetrice avînd tensorul de curbură dat de* (38), *grupul G_8 avînd structura simetrică* (37), *cu $\lambda = -m^2$. Spațiile* (38) *avînd curbura negativă, deci pentru care m este real, posedă grupul real simplu tranzitiv definit de operatorii A_i dați de* (36'), *acest grup avînd Structura* (36).

2. *Spațiile V_5^- avînd un grup G_8 și curbura negativă.* Să considerăm grupul G_8 definit prin operatorii $A_1, \ldots, A_5$, $A_6 = X$, $A_7 = Y$, $A_8 = Z$, care satisfac structura definită prin (5), (20), (36) și care sînt reali dacă m este real, deci dacă curbura spațiului V_5 este negativă.

Fie $X_8(a^1, \ldots, a^8)$ spațiul parametrilor grupului G_8 de mișcări al lui V_5^-. Ecuațiile Maurer-Cartan sînt, $ds^1, \ldots, ds^8$ fiind formele Pfaff invariate de G_8 în X_8.

$$\Delta s^1 = -[ds^2\, ds^6] - [ds^3\, ds^7] + [ds^4\, ds^8] - \sqrt{3}\,[ds^5\, ds^8] - m\,[ds^1\, ds^4] + \sqrt{3}m\,[ds^1\, ds^5] + 2m\,[ds^2\, ds^3],$$

$$\Delta s^2 = [ds^1\, ds^6] - [ds^3\, ds^8] - [ds^4\, ds^7] - \sqrt{3}\,[ds^5\, ds^7] + m\,[ds^2\, ds^4] + \sqrt{3}m\,[ds^2\, ds^5],$$

$$\Delta s^3 = [ds^1\, ds^7] + [ds^2\, ds^8] - 2\,[ds^4\, ds^6] - 2m\,[ds^3\, ds^4],$$

$$\Delta s^4 = -[ds^1\, ds^8] + [ds^2\, ds^7] + 2\,[ds^3\, ds^6],$$

$$\Delta s^5 = \sqrt{3}\,[ds^1\, ds^8] + \sqrt{3}\,[ds^2\, ds^7],$$

$$\Delta s^6 = 2m\,[ds^2\, ds^8] - 2m\,[ds^4\, ds^6] + [ds^7\, ds^8],$$

$$\Delta s^7 = 2m\,[ds^3\, ds^8] + m\,[ds^4\, ds^7] + \sqrt{3}m\,[ds^5\, ds^7] + [ds^8\, ds^6],$$

$$\Delta s^8 = -m\,[ds^4\, ds^8] + \sqrt{3}m\,[ds^5\, ds^8] + [ds^6\, ds^7],$$

unde $\Delta s^a = \delta ds^a - d\delta\, s^a$ și $[ds^a\, ds^b] = ds^a\, \delta s^b - ds^b\, \delta s^a$.

Din aceste relații reiese că sistemul $ds^h = 0$ $(h = 1, \ldots, 5)$ este complet integrabil, deci putem alege variabilele a^i astfel încît să avem

$$ds^h = \lambda_k^h\, da^k \quad (h, k = 1, \ldots, 5),$$

λ_k^h fiind funcții de $a^1, \ldots, a^8$ și se arată atunci ușor că forma

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^5)^2 \tag{40}$$

nu depinde de a^6, a^7, a^8. Pentru aceasta, considerăm după C a r t a n doi operatori $da^4, \delta a^4$ cu $da^6 = da^7 = da^8 = \delta a^h = 0$ și avem, ținînd seama de relațiile Maurer-Cartan și de $\delta s^h = 0$, $\delta(ds^2) = 2\,ds^h\,\delta\,ds^h = 2\,ds^h\,\Delta\,s^h = 0$.

Rezultă că ds^2 dat de (40) este metrica unui spațiu V_5^- ce are grupul G_8 ca grup tranzitiv de mișcări.

Observăm că ecuațiile Maurer-Cartan au soluția particulară

$$\left.\begin{aligned} ds^1 &= e^{-mx^4 + \sqrt{3}mx^5}\,(dx^1 - 2mx^2\,dx^3)\quad ds^2 = e^{mx^4 + \sqrt{3}mx^5}\,dx^2, \\ ds^3 &= e^{-2mx^4}\,dx^3,\quad ds^4 = dx^4,\quad ds^5 = dx^5,\quad ds^6 = ds^7 = ds^8 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

primele cinci forme fiind de altfel formele Pfaff invariante de grupul simplu tranzitiv (36).

Rezultă că metrica lui V_5^- se poate scrie

$$ds^2 = e^{-2mx^4 + 2\sqrt{3}mx^5}(dx^1 - 2\,m\,x^2\,dx^3)^2 + e^{2mx^4+2\sqrt{3}mx^5}(dx^2)^2 + \\ + e^{-4mx^4}(dx^3)^2 + (dx^4)^2 + (dx^5)^2 \tag{42}$$

și deci spațiul V_5^- este o varietate deschisă ce se poate acoperi cu o singură vecinătate.

Avem deci următoarea

Teoremă. *Spațiile V_5^- simetrice, cu curbura negativă, posedînd grupul* (5), (20), (36) *ca grup de mișcări (m real) sînt varietăți simple și au metrica dată de* (42).

Punînd

$$y^1 = \frac{x^1}{m^3},\quad y^2 = \frac{x^2}{m},\quad y^3 = \frac{x^3}{m},\quad y^4 = \frac{e^{mx^4}}{m},\quad y^5 = me^{\sqrt{3}mx^5},$$

metrica (42) devine

$$ds^2 = \frac{1}{m^2}\left\{\left(\frac{y^5}{y^4}\right)^2(dy^1 - 2y^2dy^3)^2 + (y^4\,y^5)^2\,(dy^2)^2 + \frac{(dy^3)^2}{(y^4)^4} + \left(\frac{dy^4}{y^4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{dy^5}{y^5}\right)^2\right\}$$

și rezultă că spațiile V_5^- au metricile egale, abstracție făcînd de un factor constant.

Putem spune același lucru despre spațiile V_5^+ cu curbură pozitivă; într-adevăr, schimbînd operatorii $B_1, \ldots, B_5$ din (37) în $\frac{B_1}{m}, \ldots, \frac{B_5}{m}$, ceea ce revine a schimba coordonatele normale x^i ale originii $O(x^i = 0)$ în mx^i, structura grupului G_8 nu mai depinde de m, deci spațiile V_5^+ au același grup de mișcări și atunci metricile lor sînt proporționale, factorul de proporționalitate fiind constant.

Să arătăm acum că există o transformare complexă

$$x^i = f^i(z^1, \ldots, z^5) \qquad (i = 1, \ldots, 5)$$

care transformă metrica (42) într-o formă $-d\sigma^2$ negativ definită, $d\sigma^2$ fiind metrica unui spațiu V_5^+. Într-adevăr, aceasta rezultă din faptul că dacă y^i sînt coordonate normale ale originii din V_5^- și dacă

$$ds^2 = g_{ij}\,dy^i\,dy^j \tag{43}$$

este metrica (42) în aceste coordonate, atunci funcțiile g_{ij} sînt funcții pare de y^i, deci, dacă punem în (43) în loc de y^i și dy^i, variabilele $\sqrt{-1}\,u^i$ și $\sqrt{-1}\,du^i$, obținem o formă reală $-d\sigma^2$, care este negativ definită în origine, deoarece pentru $u^i = y^i = 0$, avem

$$g_{ij} = \delta^i_j.$$

Pe de altă parte, metrica $d\sigma^2$ are un grup $\overline{G_8}$ de mișcări cu opt parametri, care este transformatul grupului de mișcări G_8 al metricii (42) prin transformarea

$$y^i = \sqrt{-1}\,u^i \qquad (i = 1, \ldots, 5)$$

și grupul $\overline{G_8}$ nu poate fi complex, deoarece $d\sigma^2$ este reală.

Aceste considerații sînt valabile în general, pentru spațiile simetrice V_n, care au același grup de stabilitate, ireductibil în coordonate normale.

Să observăm, în sfîrşit, că dacă punem în (42) $ds^4 + \sqrt{3}\, ds^5 = dx^4 + \sqrt{3}\, dx^5 = 0$, deci $x^4 + \sqrt{3}\, x^5 = \text{const}$, obţinem o familie de spaţii Vrănceanu $V_4(\lambda)$ ($\lambda = -m^2$) [5], care este invariată de grupul (36), deci fiecare spaţiu $V_4(\lambda)$ din această familie posedă un grup simplu tranzitiv de mişcări care este conţinut în grupul (36). Menţionăm că spaţiile V_5^- şi $V_4(\lambda)$ cu curbură negativă au grupuri G_8 de mişcări, simple, deschise, ce au aceeaşi structură complexă cu grupul închis de rotaţii $\overline{G}_8$, format din operatorii în şase variabile permutabili cu operatorul

$$X_{12} + X_{34} + X_{56}.$$

De asemenea, spaţiile V_5^+ şi $V_4(\lambda)$ cu curbură pozitivă au grupuri $\mathcal{G}_8$ simple, închise, izomorfe real cu grupul $\overline{G}_8$.

Să considerăm acum geodezicele spaţiilor V_5^- pe care le putem defini drept spaţii reprezentative ale formelor pătratice $a_{ij}x^i x^j$ în trei variabile, pozitiv definite, două forme ce diferă de un factor fiind considerate identice [2]. Geodezicele unui spaţiu simetric fiind curbele simetrice faţă de oricare din punctele ce le conţin [6] şi ţinînd seama că simetria faţă de un punct din V_5^-, deci faţă de o formă pozitiv definită, de exemplu $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ este polaritatea faţă de acea formă, rezultă că *geodezica spaţiului V_5^- ce trece prin punctele infinit vecine $P(a_{ij} = \delta_j^i)$ şi P' $(a'_{ij} = \delta_j^i\, e^{\omega_i^{\,t}}\, dt$, este definită parametric de ecuaţiile $a_{ij} = \delta_j^i e^{\omega_i^{\,t}}$.* Rezultă atunci imediat următoarea

Teoremă. *Prin două puncte oarecare din V_5^- trece una şi o singură geodezică.*

Într-adevăr putem presupune că cele două puncte P, Q au coordonatele $a_{ij}^0 = \delta_j^i$, respectiv $a_{ij}^1 = e^{\omega_i}\, \delta_j^i$. Prin aceste puncte trece geodezica definită parametric prin

$$a_{ij} = e^{\omega_i\, t} \delta_j^i . \tag{44}$$

Fie atunci (g) o geodezică oarecare ce trece prin punctele P, Q; printr-o transformare convenabilă (2) a coordonatelor a_{ij}, putem face ca ecuaţiile geodezicei (g) să fie de forma

$$\bar{a}_{ij} = e^{\rho_i\, t}\, \delta_j^i \tag{45}$$

şi coordonatele lui P să rămînă $\bar{a}_{ij} = \delta_j^i$. Punctul Q găsindu-se pe (g), trebuie ca pentru o anumită valoare a lui t în (45) să obţinem coordonatele lui Q; putem presupune că această valoare este $t=1$. Rezultă atunci că avem $\rho_i = \omega_i$ deoarece e^{ρ_i} sînt rădăcinile ecuaţiei caracteristice ale formei pătratice reprezentate de punctul Q. Deci, în sistemul de coordonate $\bar{a}_{ij}$, punctele P, Q au aceleaşi coordonate ca şi în sistemul a_{ij}, deci între a_{ij} şi $\bar{a}_{ij}$ avem formule de forma

$$\bar{a}_{ij} = \lambda_i \lambda_j a_{ij}$$

şi atunci ecuaţiile (44) şi (45) reprezintă aceeaşi curbă, deci prin P şi Q trece o singură geodezică.

Se verifică în acelaşi timp o proprietate enunţată de Cartan în [6]: produsul a două simetrii corespunzînd la două puncte oarecare P şi Q de pe o geodezică, este o transformare ce aparţine unui grup cu un parametru G_1 ce depinde numai de geodezică; în cazul nostru grupul G_1 este dat de

$$a'_{ij} = e^{\frac{1}{2}(\omega_i + \omega_j)\, t}\, a_{ij}$$

О СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ V_5

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В более ранней работе [1] автор утверждал, что группа вращений (1) не может быть группой устойчивости неевклидова однородного риманова пространства V_5, что однако не соответствует действительности; в самом деле, Элли Картан показал [2], что пространство V_5, имеющее в качестве однородных координат коэффициента a_{ij} определенной квадратичной формы с тремя переменными, и группу с восьмью параметрами

$$a'_{ij} = p_i^r p_j^s a_{rs} \tag{2}$$

в качестве группы движения, представляет собой несократимое симметрическое пространство. С другой стороны, группа (1) является единственной несократимой группой вращений пяти переменных.

Повторяя в настоящей работе вычисления, приведенные в [1], автор находит, что группа (1) содержится в группе G_8 с симметричесиой структурой (37), где $\lambda = -m^2$ и m есть действительная или мнимая постоянная.

Соответствующие пространства V_5 имеют просто транзитивную группу движения, определенную операторами A_i из (36′), и структуру (36), вследствие чего эта группа действительна, если m действительно; в этом случае метрика V_5 дана формулой

$$ds^2 = e^{-2mx^4+253\,n^5}\,(dx^1 - 2mx^2\,dx^3)^2 + e^{2\,mx^4+253\,mx^5}\,(dx^2)^2 + \\ + e^{-4\,mx^4}\,(dx^3)^2 + (dx^4)^2 + (dx^5)^2, \tag{42}$$

откуда следует, что V_5 есть многообразие, покрытое единственной окрестностью.

При любом m ненулевые составляющие тензора кривизны даны формуламы (38).

Пространство Картана V_5 относится к случаю $m^2 > 0$, а потому V_5 имеет отрицательную кривизну и, в подходящей системе координат, метрику (42); просто транзитивная группа (36) соответствует подгруппе в формуле (2), для которой имеем $p_1^r = 0$, если $r < i$.

Автор доказывает наконец следующую теорему:

Через любые две точки V_5 всегда проходит одна и только одна геодезическая линия.

SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES V_5

(RÉSUMÉ)

Dans son travail [1], l'Auteur a affirmé que le groupe de rotations (1) ne peut être le groupe de stabilité d'un espace de Riemann homogène V_5 non euclidien, ce qui n'est pas vrai; en effet, Elie Cartan [2] a montré que l'espace V_5, ayant pour coordonnées homogènes les coefficients a_{ij} d'une forme quadratique définie, à trois variables, et le groupe à huit paramètres

$$a'_{ij} = p_i^r p_j^s a_{rs} \tag{2}$$

comme groupe de mouvement, est un espace symétrique irréductible. D'autre part, le groupe (1) est le seul groupe irréductible de rotations à cinq variables.

Dans ce travail, on reprend les calculs de [1] et on trouve que le groupe (1) est contenu dans un groupe G_8 ayant la structure symétrique (37), où $\lambda = -m^2$ et m est une constante réelle ou imaginaire.

Les espaces correspondants V_5 ont un groupe simplement transitif de mouvement, défini par les opérateurs A_i tirés de (36') et ayant la structure (36), donc ce groupe est réel si m est réel; dans ce cas, la métrique de V_5 est donnée par

$$ds^2 = e^{-2mx^4 + 253\,m^5}(dx^1 - 2m\,x^2\,dx^3)^2 + e^{2mx^4 + 253\,mx^5}(dx^2)^2 + \\ + e^{-4mx^4}(dx^3)^2 + (dx^4)^2 + (dx^5)^2 \tag{42}$$

donc V_5 est une variété couverte par un seul voisinage.

Pour m quelconque, les composantes non nulles du tenseur de courbure sont données par les formules (38).

L'espace de Cartan V_5 appartient au cas $m^2 > 0$, donc V_5 est à courbure négative et a, dans un système convenable de coordonnées, la métrique (42); le groupe simplement transitif (36) correspond au sous-groupe de (2) pour lequel on a $p_i^r = 0$ et $r < i$.

On démontre enfin le théorème suivant:

Par deux points quelconques de V_5, passe toujours une géodésique et une seule.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Teleman, *Grupurile de mişcare tranzitive ale spaţiilor riemanniene V_5.* Studii şi cercetări matematice, t. IV, nr. 3 — 4, iulie-decembrie 1953, p. 504.
2. E. Cartan, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann.* Bull. Soc. Math. de France, 1927, t. 55, p. 128.
3. G. Vrănceanu, *Les sousgroupes simplement transitifs d'un groupe transitif de mouvement.* Bul. Soc. ştiinţ. Cluj, 1932, t. VI, p. 434.
4. — *Asupra unei clase de spaţii riemanniene omogene.* Studii şi cercetări matematice, t. V, nr. 1 — 2, ianuarie-iunie 1954, p. 173.
5. — *Asupra grupurilor de mişcare ale unui spaţiu riemannian cu patru dimensiuni.* Studii şi cercetări matematice, t. IV, nr. 1 — 2, ianuarie-iunie 1953, p. 121.
6. E. Cartan, *Jubilé Scientifique.* Paris, 1939, p. 94.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 1–2, 1955

ASUPRA CONFIGURAŢIILOR RELATIVE LA ECHILIBRUL ASTATIC *)

DE

DAN HULUBEI

I

Cazul general

1. *Formulele echilibrului astatic.* Fie un solid (S) supus la n forţe constante $\overline{F}_i$, aplicate în punctele P_i, fixe în corp. Ne propunem să dăm o nouă formă relaţiilor între configuraţiile punctelor de aplicaţie P_i şi configuraţia forţelor $\overline{F}_i$, pentru ca solidul să fie în echilibru în orice poziţie, adică să fie în *echilibru astatic*, şi să deducem unele proprietăţi geometrice ale acestor configuraţii, în special în cazurile a 4, 5 sau 6 puncte de aplicaţie.

Condiţiile cardinale de echilibru

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_i = 0 \tag{1}$$

şi

$$\overline{M} = \sum (P_i - 0) \times \overline{F}_i = 0, \tag{2}$$

trebuie să aibă loc oricum s-ar roti solidul. O rotaţie poate influenţa numai pe $\overline{M}$. Fie $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ trei versori ortogonali şi variabili, dirijaţi pe trei axe ox, oy, oz, invariabil legate cu solidul. Vectorul $P_i - 0$ fiind egal cu

$$P_i - 0 = x_i \overline{i} + y_i \overline{j} + z_i \overline{k},$$

relaţia (2) devine

$$\overline{M} = \overline{i} \times \sum x_i \overline{F}_i + \overline{j} \times \sum y_i \overline{F}_i + \overline{k} \times \sum z_i \overline{F}_i = 0, \tag{3}$$

care este satisfăcută oricare sînt $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$.

Înmulţind scalar pe $\overline{M}$ cu $\overline{i}$, obţinem

$$\overline{M} \cdot \overline{i} = \overline{k} \cdot \sum y_i \overline{F}_i - \overline{j} \sum z_i \overline{F}_i = 0. \tag{4}$$

Dacă $\sum y_i \overline{F}_i = 0$, rezultă că şi $\sum z_i \overline{F}_i = 0$ şi la fel trebuie ca şi $\sum x_i \overline{F}_i = 0$. Dacă presupunem $\sum y_i \overline{F}_i \neq 0$, luînd $\overline{j}$ arbitrar, iar $\overline{k}$ normal pe $\overline{j}$ şi $\sum y_i \overline{F}_i$, rezultă că $\sum z_i \overline{F}_i = 0$. Urmează că şi $\sum x_i \overline{F}_i = 0$, $\sum y_i \overline{F}_i = 0$. Rezultă deci că

*) Prezentată Institutului de matematică la data de 24 noiembrie 1954.

pentru echilibrul astatic trebuie îndeplinite următoarele patru condiții vectoriale, necesare și suficiente:

$$\sum \overline{F}_i = 0, \quad \sum x_i \overline{F}_i = 0, \quad \sum y_i \overline{F}_i = 0, \quad \sum z_i \overline{F}_i = 0. \tag{5}$$

Dacă numim cu X_i, Y_i, Z_i componentele forțelor $\overline{F}_i$ pe trei axe ortogonale, condițiile de echilibru astatic sînt prin urmare în număr de 12, și anume:

$$\left.\begin{array}{lll} \sum X_i = 0, & \sum Y_i = 0, & \sum Z_i = 0, \\ \sum x_i X_i = 0, & \sum x_i Y_i = 0, & \sum x_i Z_i = 0, \\ \sum y_i X_i = 0, & \sum y_i Y_i = 0, & \sum y_i Z_i = 0, \\ \sum z_i X_i = 0, & \sum z_i Y_i = 0, & \sum z_i Z_i = 0, \quad [1], [2]^*) \end{array}\right\} \begin{array}{l} (6) \\ (6') \end{array}$$

Dacă notăm vectorii $P_i - 0$, cu $\bar{r}_i$, ecuațiile (6′) se pot scrie încă

$$\sum \bar{r}_1 X_i = 0, \quad \sum \bar{r}_i Y_i = 0, \quad \sum \bar{r}_i Z_i = 0. \tag{7}$$

Să notăm cu $\overline{u}$ un vector oarecare și cu Ω un punct oarecare, iar $\overline{\rho_i}$ vectorul $P_i - \Omega$. În acest caz, condițiile (5) sau (6) și (6′) se pot rezuma într-o singură relație

$$\sum [(P_i - \Omega)\, \overline{u}]\ \overline{F}_i = \sum (\overline{\rho_i}, \overline{u})\ \overline{F}_i = 0, \tag{8}$$

pentru $\bar{u}$ și Ω oricare. Este suficient de altfel ca relația (8) să aibă loc pentru două poziții ale lui Ω și trei direcții necoplanare $\overline{u}$. Relațiile (6) și (7) se pot la fel rezuma într-o altă ecuație, anume

$$\sum (P_i - \Omega) \cdot (\overline{F}_i \overline{u}) = \sum \overline{\rho_i}\, (\overline{F}_i \overline{u}) = 0, \tag{9}$$

care să aibă loc pentru două puncte Ω și trei direcții $\overline{u}$ necoplanare.

Să ducem printr-un punct O_1 vectorii $\overline{O_1 Q_i} = \overline{F}_i$ și fie O centrul distanțelor medii ale punctelor P_i (centroid). Relațiile (8) și (9) arată că fiecare punct Q_i, este centrul de greutate al celorlalte puncte Q_j, de mase proporționale cu $(P_i - 0)\, \overline{u}$ și la fel fiecare punct P_i este centrul de greutate al celorlalte puncte P_j de mase proporționale cu $\overline{F}_i \overline{u}$.

2. *Reciprocitate între configurațiile punctelor de aplicație P_i și configurația forțelor $\overline{F}_i$.* Dacă Ω este centrul de greutate O al punctelor P_i, relațiile (8) și (9) devin

$$\sum (\bar{r}_i \bar{u}) \cdot \overline{F}_i = 0 \tag{8'}$$

și

$$\sum \bar{r}_i \cdot (\overline{F}_i \overline{u}) = 0, \tag{9'}$$

cu condițiile $\sum \bar{r}_i = \sum (P_i - O) = 0$ și $\sum \overline{F}_i = \sum (Q_i - O_1) = 0$.

Să considerăm deci două grupe, de puncte P_i și Q_i de centre O și O_1.

Relațiile (8′) și (9′) ne conduc la

Teorema 1. *Dacă se aplică în punctele P_i forțe proporționale cu $O_1 Q_i$ și în punctele Q_i forțe proporționale cu OP_i, se obțin două sisteme, astfel că dacă unul este în echilibru astatic, atunci și celălalt este în echilibru astatic.*

*) p. 167.

3. *Construcția punctelor de aplicație cînd se dau forțele.* Să presupunem că forțele $\overline{F}_i$ cu suma nulă nu sînt paralele cu un plan (necoplanare) și fie de exemplu $\overline{F}_1 \times \overline{F}_2 \cdot \overline{F}_3 \neq 0$. În acest caz vom putea alege arbitrar n—3 puncte P_i de aplicație ($i = 4, \ldots, n$) celelalte trei putîndu-se deduce. Într-adevăr, să însemnăm

$$\bar{u}_1 = \overline{F}_2 \times \overline{F}_3,$$
$$\bar{u}_2 = \overline{F}_3 \times \overline{F}_1$$

și

$$\bar{u}_3 = \overline{F}_1 \times \overline{F}_2.$$

Vectorii $\bar{u}_i$ ($i = 1, 2, 3$) sînt și ei necoplanari, produsul lor mixt fiind $(\overline{F}_1 \times \overline{F}_2 \cdot \overline{F}_3)^2 \neq 0$. Să construim punctele P_1, P_2, P_3 cu ajutorul formulei (9), în care vom face succesiv $\bar{u}$ egal cu $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, presupunînd că punctele $P_4, \ldots, P_n$ sînt date. Avem

$$P_1 - \Omega \equiv \bar{r}_1 = \frac{\sum_4^n (\overline{F}_j \bar{u}_1) \bar{r}_j}{\sum_4^n (\overline{F}_j \bar{u}_1)}, \tag{10}$$

care ne arată că P_1 este centrul de greutate a punctelor $P_4, \ldots, P_n$ de mase $(\overline{F}_j \bar{u}_1)$ (unde $j = 4, \ldots, n$).

În mod analog vom construi P_2 și P_3.

Punctele P_i astfel construite satisfac condiția (9). Într-adevăr, relația (10) și celelalte două relații analoge se scriu

$$\sum (\overline{F}_i \bar{u}_h)(P_i - \Omega) = 0 \quad (h = 1, 2, 3).$$

O direcție oarecare $\bar{u}$ este dată de

$$\bar{u} = \sum_1^3 \alpha_h \bar{u}_h$$

iar ecuația (9) devine

$$\sum (\overline{F}_i \bar{u})(P_i - \Omega) = \sum (\overline{F}_i \alpha_h \bar{u}_h)(P_i - \Omega) = \sum \alpha_h \sum_i (\overline{F}_i \bar{u}_h)(P_i - \Omega) = 0,$$

care este identic nulă, oricare este α_h, deci oricare este $\bar{u}$.

Dacă $\overline{F}_i$ sînt coplanare, se vede în mod analog că se pot lua n—2 puncte P_i arbitrare și celelalte două se deduc, iar dacă $\overline{F}_i$ sînt paralele cu o dreaptă, putem alege n—1 puncte în mod arbitrar și al n-lea este centrul de greutate al primelor n—1 puncte, de mase proporționale cu valorile algebrice ale forțelor $\overline{F}_i$. Vom lua, de exemplu, în cazul forțelor coplanare $\bar{u}_1$ și $\bar{u}_2$, în planul forțelor, normale respectiv la $\overline{F}_2$ și $\overline{F}_1$. Formula (9) ne va da pe P_1 și P_2.

4. *Construcția forțelor cînd sînt date punctele de aplicație.* Vom întrebuința două metode pentru aceasta. Prima metodă se bazează pe reciprocitatea configurațiilor punctelor P_i și a forțelor $\overline{F}_i$. Fie O centrul (distanțelor medii) punctelor P_i și să notăm cu $\bar{r}_i$ vectorii $P_i - O$. Avem $\sum \bar{r}_i = 0$, ca și $\sum \overline{F}_i = 0$.

Cu ajutorul relației dedusă din (8), analogă cu (9),

$$\sum (\bar{r}_i \bar{u}) \overline{F}_i = \sum (\bar{r}_i \bar{u})(Q_i - O) = 0, \tag{11}$$

vom construi n puncte Q_i. Forțele $\overline{F}_i$ vor fi proporționale cu vectorii $\overline{O_1 Q_i}$ care merg din centrul O_1 al punctelor Q_i la aceste puncte.

Putem construi $\overline{F}_i$ cînd se dau punctele P_i și astfel:

Fie patru puncte P_n, P_1, P_2, P_3 necoplanare și să luăm $n-4$ forțe arbitrare, $\overline{F}_4, \overline{F}_5, \ldots, \overline{F}_{n-1}$. Luăm Ω în P_n și fie $\overline{\rho_i} = \overline{P_n P_i}$.

Să notăm cu $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ respectiv vectorii $\rho_2 \times \rho_3$, $\rho_3 \times \rho_1$, $\rho_1 \times \rho_2$. Dacă facem în (8) pe $\bar{u} = \bar{u}_1$, obținem

$$\sum_1^n (\overline{\rho_i} \bar{u}_1) \overline{F}_i = (\overline{\rho_1} x \overline{\rho_2} \cdot \overline{\rho_3}) \overline{F}_1 + \sum_4^{n-1} (\overline{\rho_j} \cdot \bar{u}_1) \overline{F}_j = 0 . \tag{12}$$

Această formulă ne va da pe $\overline{F}_1$.

Schimbînd pe $\bar{u}_1$ cu $\bar{u}_2$ și $\bar{u}_3$, vom obține $\overline{F}_2$ și $\overline{F}_3$. Forța $\overline{F}_n$ va fi egală cu $-\sum_1^{n-1} \overline{F}_i$.

În felul acesta, formula (8) este verificată pentru orice vector $\bar{u}$ și orice punct Ω, ceea ce se poate vedea ca și mai sus.

Dacă punctele P_i sînt într-un plan, vom lua trei puncte necoliniare, de exemplu P_n, P_1, P_2, forțele $\overline{F}_3, \ldots, \overline{F}_{n-1}$ în număr de $n-3$ arbitrare și vom determina pe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ cu ajutorul formulei (8), unde Ω este în P_n. Vom lua pentru aceasta $\bar{u}_1$ normal pe $P_n P_2$, și $\bar{u}_2$ normal pe $P_n P_1$. Făcînd pe $\bar{u} = \bar{u}_1$ și apoi $\bar{u} = \bar{u}_2$, vom obține succesiv pe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$. Forța $\overline{F}_n$ va fi apoi $-\sum_1^{n-1} \overline{F}_i$.

Dacă punctele P_i sînt coliniare, vom putea alege arbitrar forțele $\overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_{n-1}$, dacă $P_1 \neq P_n$. Dacă numim cu ρ_i valorile algebrice ale segmentelor $P_n P_i$ pe dreapta punctelor, atunci forța $\overline{F}_1$ va fi dată de relația

$$\sum_1^n \rho_i \overline{F}_i = \rho_1 \overline{F}_1 + \sum_2^{n-1} \rho_j \overline{F}_j = 0 . \tag{12'}$$

Forța $\overline{F}_n$ va fi $-\sum_1^{n-1} \overline{F}_i$.

Să analizăm diversele cazuri corespunzătoare la anumite valori ale lui n.

II

Cazurile $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$

Dacă $n = 1$, $\overline{F}_1$ trebuie să fie nulă.

Dacă $n = 2$, cele două puncte P_1 și P_2 trebuie să coincidă, deoarece fiecare este centrul de greutate al celuilalt. Cele două forțe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ sînt egale și direct opuse.

Dacă $n = 3$, cele trei forțe $\overline{F}_i$ sînt coplanare, întrucît $\sum \overline{F}_i = 0$. Putem alege arbitrar $n - 2 = 1$ punct și deci celelalte două puncte coincid cu primul.

Dacă cele trei forțe sînt paralele cu o dreaptă, putem alege $n - 1 = 2$ puncte, de exemplu P_1 și P_2, iar P_3 este pe dreapta primelor două puncte și anume centrul de greutate al lui P_1 și P_2 de mase F_1 și F_2, valorile algebrice ale lui $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$.

III

Cazul $n = 4$

1. *Cazul forțelor oricare.* Dacă cele patru forțe $\overline{F}_i$ sînt date neparalele cu un plan, se pot alege $n-3=1$ punct P arbitrar și celelalte coincid cu el. Rezultă că cele patru puncte P_i trebuie să coincidă.

2. *Cazul forțelor paralele cu un plan.* Dacă forțele $\overline{F}_i$ sînt *paralele cu un plan*, se pot alege $n-2=2$ puncte de aplicație în mod arbitrar și celelalte două sînt pe dreapta lor. Cele patru puncte P_i sînt deci coliniare.

Dacă luăm $\bar{u}$ normal pe $\overline{F}_i$ și Ω în P_1, relația (9) devine

$$\overline{P_1P_2}(\overline{F}_2\bar{u}) + (\overline{P_1P_3})\overline{F}_3\bar{u} = 0 . \tag{13}$$

Considerînd figura formată de forțele $\overline{F}_i$, concurente în O_1, anume $\overline{O_1Q_i} = \overline{F}_i$, relația (13) arată că P_1 este centrul de greutate al punctelor P_2, P_3 de mase proporționale cu distanțele lui Q_2 și Q_3 la dreapta OQ_4.

Relația (9) pentru un Ω oarecare și $\bar{u}$ normal la $\overline{F}_4$ ne dă

$$\sum_1^3 \overline{\rho_i}(\overline{F}_i\bar{u}) = 0 ,$$

care arată că P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 sînt proporționale cu distanțele lui Q_1, Q_2, Q_3 la dreapta OQ_4.

În mod analog se obțin și alte relații între segmentele determinate de punctele de aplicație.

Dacă utilizăm relația (8) obținem, pentru Ω pe dreapta punctelor P_i și $\bar{u}$ paralel cu această dreaptă

$$\sum_1^4 \rho_i \cdot \overline{F}_i = 0 . \tag{14}$$

Între $\overline{F}_i$ mai avem relația $\sum \overline{F}_i = 0$, deci orice relație între $\overline{F}_i$ este o combinație liniară între aceste două, adică este de forma

$$\sum(\rho_i + \lambda)\, F_i = 0 . \tag{15}$$

Aceasta ne arată că punctele P_i au ca abscise pe dreapta lor coeficienții unei relații liniare între forțele $\overline{F}_i$. Chiar dacă considerăm relația $\sum \overline{F}_i = 0$, aceasta arată că punctele P_i au aceeași abscisă, deci coincid. Este evident că și în acest caz sistemul este în echilibru astatic.

Teorema precedentă 1 ne conduce la

T e o r e m a 2. *În cazul forțelor $\overline{F}_i$ paralele cu un plan formînd un sistem astatic, cele patru puncte de aplicație P_i sînt coliniare și au un biraport egal cu acel al direcțiilor forțelor corespunzătoare.*

Într-adevăr, dacă între forțele $\overline{F}_i$ avem relațiile independente

$$\sum_1^4 \rho_i\overline{F}_i = 0 \text{ și } \sum_1^4 \overline{F}_i = 0 \text{ cu } \rho_i = \Omega F_i .$$

Ω fiind un punct de pe dreapta celor 4 puncte P_i, ele sînt echivalente cu relațiile

$$(\rho_4 - \rho_3)\overline{F}_3 = (\rho_1 - \rho_4)\overline{F}_1 + (\rho_2 - \rho_4)\overline{F}_2 ,$$

$$(\rho_3 - \rho_4)\overline{F}_4 = (\rho_1 - \rho_3)\overline{F}_1 + (\rho_2 - \rho_3)\overline{F}_2 .$$

Biraportul direcțiilor (g_i) ale forțelor $\overline{F}_i$ (paralele cu un plan) este dat de tabloul

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \rho_1 - \rho_4 & \rho_1 - \rho_3 \\ 0 & 1 & \rho_2 - \rho_4 & \rho_2 - \rho_3 \end{vmatrix} = (g_1, g_2, g_3 g_4).$$

El este deci egal cu

$$\frac{\rho_2 - \rho_4}{\rho_2 - \rho_3} : \frac{\rho_1 - \rho_4}{\rho_1 - \rho_3} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = (P_1, P_2, P_3, P_4),$$

adică

$$(g_1, g_2, g_3, g_4) = (P_1, P_2, P_3, P_4). \tag{16}$$

Dacă birapoartele (16) sînt egale, forțele $\overline{F}_i$ cu suma nulă nu sînt bine determinate în mărime. Pentru echilibrul astatic mai trebuie ca și relațiile (13), (14)

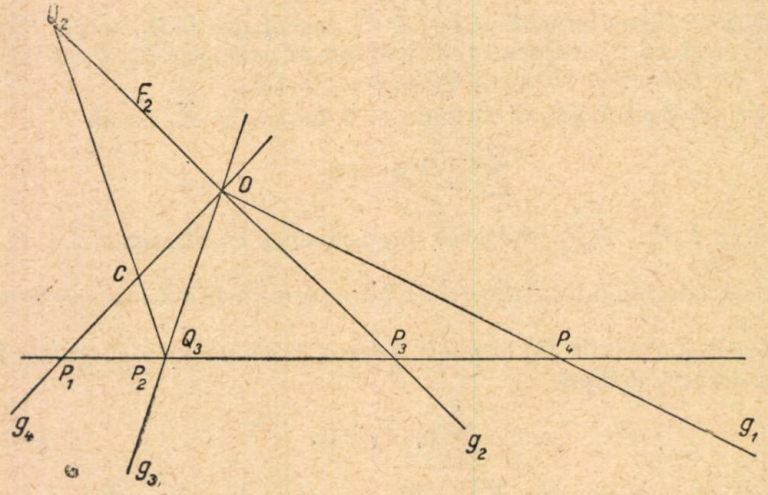


Fig. 1

sau (15) să fie verificate. Putem construi o solicitare astatică atunci cînd se dau punctele coliniare în felul următor: se duc dintr-un punct O dreptele OP_i și să le numim de exemplu $OP_1 = (g_4)$, $OP_4 = (g_1)$, $OP_3 = (g_2)$, $OP_2 = (g_3)$, schimbînd în relația $OP_i = (g_i)$ doi indici ai lui P în același timp cu ceilalți doi.

Descompunînd $\overline{P_1P_4}$ (ori $\overline{P_2P_3}$) după (g_1), (g_4) și $\overline{P_4P_1}$ (ori $\overline{P_3P_2}$) după (g_2), (g_3), obținem o solicitare astatică. În felul acesta solicitarea obținută satisface și condiția (13), adică raportul $\dfrac{P_1P_2}{P_1P_3}$ este egal și de semn contrar cu raportul în care dreapta (g_4) împarte segmentul Q_3Q_2, după cum se constată ușor (relația 13, fig. 1).

Cînd O variază în plan, se obțin toate solicitările de echilibru astatic, cu aproximație de un factor constant.

Putem găsi cele patru forțe $\overline{F}_i$ și în felul următor:

Să luăm pe trei axe neparalele, concurente și coplanare, de exemplu (g_1), (g_2), (g_3), trei forțe $\overline{\Phi}_i$ cu suma nulă, și să luăm forțele $\overline{F}_i$ egale cu

$$\overline{F}_i = \frac{\overline{\Phi}_i}{P_4P_i} \ (i = 1, 2, 3) \text{ iar } \overline{F}_4 = -\sum \overline{F}_i.$$

Aceste forțe satisfac relația (8), unde am luat pe Ω în P_4, anume

$$\sum_1^3 P_4 P_i \cdot \overline{F}_i = 0 .$$

Forța $\overline{F}_4$ rezultă în mod automat așezată pe (g_4), care cu primele trei drepte are un biraport egal cu acel al punctelor P_i.

Dacă ducem prin P_i forțele $\overline{F}_i$ astfel găsite și dăm o rotație dreptei punctelor P_i, cele patru forțe $\overline{F}_i$ formează încă un sistem echivalent cu zero. Deoarece [2]*) axele celor patru forțe sînt pe patru generatoare de un sistem al unui paraboloid, rezultă că biraportul direcțiilor lor este egal cu biraportul celor patru puncte de intersecție a generatoarelor (g_i) cu o generatoare $P_1P_2P_3P_4$ de sistem diferit, după cum am găsit mai sus.

Reciproc, fie patru forțe $\overline{F}_i$, paralele cu un plan (α), dar neconținute într-un plan, și care formează un sistem echivalent cu zero. Dacă facem să alunece aceste patru forțe pînă cînd punctele lor de aplicație sînt în linie dreaptă, se obține o solicitare astatică. Într-adevăr, cele patru forțe $\overline{F}_i$ sînt pe patru generatoare (g_i) de un sistem al unui paraboloid și le putem face să alunece pînă cînd P_i vine pe o generatoare (d) de un alt sistem.

Dacă numim cu $\bar{u}$ versorul de pe (d) și cu x_i abscisele punctelor P_i pe (d), atunci sistemul, fiind echivalent cu zero, avem

$$\sum \overline{F}_i = 0 \text{ și } \overline{M} = \overline{u} \times \sum x_i \overline{F}_i = 0$$

Dacă $\sum x_i \overline{F}_i \neq 0$, atunci $\bar{u}$ ar trebui să fie paralel cu planul (α), ceea ce nu se poate; rezultă $\sum x_i \overline{F}_i = 0$, adică tocmai condiția pe care trebuie să o satisfacă forțele $\overline{F}_i$ pentru a forma o solicitare astatică.

Dacă cele patru forțe $\overline{F}_1$ formînd un sistem echivalent cu zero sînt chiar într-un plan (α), să le facem să alunece pînă cînd originile lor P_i sînt pe o dreaptă (d). Fie x_1 abscisele punctelor P_i și $\bar{u}$ versorul de pe (d). Condițiile ca sistemul să fie echivalent cu zero sînt

$$\sum \overline{F}_i = 0 \quad \text{și} \quad \sum x_i \overline{F}_i = \lambda \bar{u}.$$

Să notăm cu (π) parabola înscrisă în patrulaterul axelor celor patru forțe $\overline{F}_i$ și cu (d_1) și (d_2) două tangente ale parabolei, de versori $\bar{u}$ și $\overline{u}_1$.

Dacă luăm pe dreptele (d_1) și (d_2) ca origine punctele lor de intersecție cu (g_1), condițiile precedente ne dau

$$\sum \overline{F}_i = 0, \sum_2^4 x_i \overline{F}_i = \lambda \bar{u} \quad \text{și} \quad \sum_2^4 y_i \overline{F}_i = \mu \bar{u}_1.$$

Deoarece x_i și y_i sînt proporționale, rezultă că $\sum_2^4 x_i \overline{F}_i = \sum_2^4 y_i \overline{F}_i = 0$.

Solicitările $(\overline{F}_i)$ cu originile P_2 pe o tangentă a lui (π) sînt deci astatice.

Avem deci

Teorema 3. *Pentru a obține o solicitare de patru forțe în echilibru astatic, se construiește în plan un sistem de patru forțe în echilibru și le facem să alunece pînă în punctele P_i de întîlnire cu o tangentă oarecare a parabolei înscrisă în patrulaterul axelor forțelor date.*

*) p. 131.

Dacă se rotesc forțele $\overline{F}_i$ cu un același unghi în jurul unor axe paralele, trecînd prin P_i, sistemul obținut este iarăși în echilibru, iar axele (g_i) ale forțelor $\overline{F}_i$ sînt prin urmare pe un paraboloid.

Caz particular. Dacă două forțe, de exemplu $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ sînt paralele, atunci $P_3 = P_4$. Într-adevăr, relația

$$P_4P_1 \cdot \overline{F}_1 + P_4P_2\overline{F}_2 + P_4P_3 \cdot \overline{F}_3 = 0$$

nu poate avea loc decît dacă $P_3P_4 = 0$, iar $P_3 = P_4$ este centrul vectorilor paraleli $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$. Același lucru se vede și din ecuația dedusă din (9), unde $\overline{u}$ este normal pe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$.

$$\rho_3(\overline{F}_3\,\overline{u}) + \rho_4(\overline{F}_4\,\overline{u}) = 0.$$

Deoarece $(\overline{F}_3\,\overline{u}) + (\overline{F}_4\,\overline{u}) = 0$, rezultă $\rho_3 = \rho_4$, adică $P_3 = P_4$.

Acest rezultat este în concordanță cu rezultatul precedent, deoarece parabola (π), considerată ca înfășurătoare, se reduce la două fascicule liniare, unul cu centrul la ∞ pe (g_1) și altul la intersecția lui (g_3) cu (g_4), care este $P_3 = P_4$.

3. *Cazul a patru forțe paralele între ele.* În acest caz putem alege $n - 1 = 3$ puncte în mod arbitrar și al patrulea este în același plan cu primele.

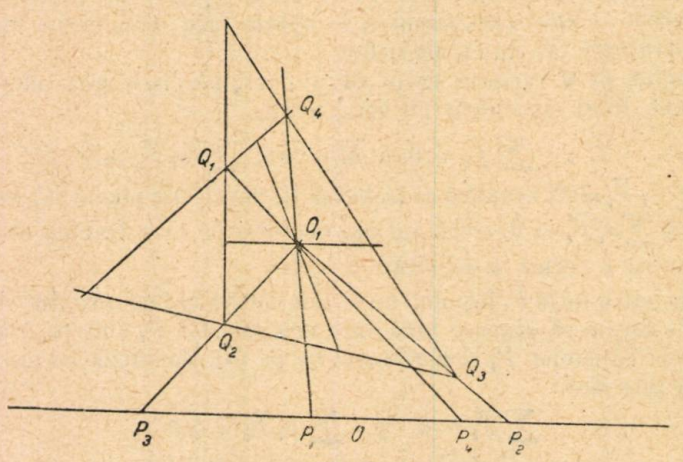


Fig. 2

Considerînd din nou cazul forțelor paralele cu un plan, fie O centrul punctelor coliniare P_i și $r_i = \overline{OP_i}$ patru vectori cu sumă evident nulă. Relațiile (8) și (9) ne dau

$$\sum (\bar{r}_i \cdot \bar{u})\,\overline{F}_i = 0 \text{ și } \sum \bar{r}_i\,(\overline{F}_i\,\bar{u}) = 0,$$

cu

$$\sum \bar{r}_i = 0 \text{ și } \sum \overline{F}_i = 0.$$

Acestea ne arată că, dacă aplicăm în punctele coplanare $Q_i = O_1 + \overline{F}_i$ forțe proporționale cu $\bar{r}_i$, obținem o solicitare astatică.

Urmează deci că, ținînd seama de reciprocitatea între configurațiile punctelor de aplicație și configurația forțelor, cele patru forțe paralele se pot construi astfel (fig. 2):

Fie O_1 centrul de greutate al poligonului $Q_1Q_2Q_3Q_4 - O_1$ este punctul de intersecție a trei drepte care unesc mijloacele a cîte două laturi opuse. Să ducem o

paralelă la una din aceste drepte — de exemplu la latura care unește mijlocul lui Q_1Q_2 cu mijlocul lui Q_3Q_4. Dreptele O_1Q_i taie această dreaptă în patru puncte P_i, cărora să le dăm indicii lui O_1Q_i schimbați 1 cu 2 și 3 cu 4. Se obțin patru puncte P_i cu centrul de greutate O. Forțele căutate sînt proporționale cu $\overline{OP}_i$. Fie $r_i = \varphi_i$ valorile vectorilor $\overline{OP}_i$ pe direcția lor.

Ținînd seama de relațiile

$$\sum r_i \overline{F} = \sum r_i (Q_i - O_1) = \sum r_i (Q_i - \Omega) = 0,$$

cu $\sum r_i = 0$, rezultă că r_i sînt proporționale cu ariile a cîte trei puncte Q_i,

$$\frac{\varphi_1}{Q_2Q_3Q_4} = \frac{-\varphi_2}{Q_1Q_3Q_4} = \frac{\varphi_3}{Q_1Q_2Q_4} = \frac{-\varphi_4}{Q_1Q_2Q_3}, \tag{17}$$

ariile de la numitor fiind luate în valoare algebrică.

Se verifică, că

$$\sum \varphi_i = Q_2Q_3Q_4 - Q_1Q_3Q_4 + Q_1Q_2Q_4 - Q_1Q_2Q_3 = 0.$$

Ecuațiile (17) ne dau deci intensitățile forțelor care aplicate în Q_i lasă patrulaterul în echilibru astatic. Aceste forțe sînt luate evident paralele. Ele sînt proporționale cu forțele $\overline{OP}_i$ găsite mai sus în mod geometric.

4. *Relații metrice pe un paraboloid.* Fie patru forțe $\overline{F}_i$, cu axele (g_i), aplicate în punctele P_i de pe o dreaptă (d) și formînd un sistem în echilibru astatic.

Dacă facem să alunece $\overline{F}_i$ pe (g_i) pînă cînd originile lor vin în P_i', pe o altă generatoare (d') a paraboloidului determinat de (g_i), se obține o altă solicitare astatică. Punctele P_i' sînt legate de P_i prin relații de forma

$$P_i' = P_i + \rho_i \overline{F}_i$$

și ele satisfac condiția $\sum (P_i' - O)(\overline{F}_i \bar{u}) = 0$, pentru orice $\bar{u}$. Ultima ecuație va da o relație în ρ_i și anume

$$\sum \rho_i \overline{F}_i (\overline{F}_i \bar{u}) = 0. \tag{18}$$

Fie (α) planul la care $\overline{F}_i$ sînt paralele și $\bar{u}$ o direcție în (α), normală la $\overline{F}_4$. Relația (18) devine

$$\rho_1 \overline{F}_1 F_1 \sin (41) + \rho_2 \overline{F}_2 F_2 \sin (42) + \rho_3 \overline{F}_3 F_3 \sin (43) = 0, \tag{19}$$

unde unghiurile $(\hat{ij})$ sînt unghiurile făcute în (α) de $\overline{F}_i$ cu $\overline{F}_j$. În (19) cantitățile F_i pot fi luate pozitive.

Să proiectăm (19) pe o normală la $\overline{F}_3$. Se obține

$$\rho_1 F_1^2 \sin (41) \sin (31) + \rho_2 F_2^2 \sin (42) \sin (32) = 0. \tag{20}$$

Fie s_i distanțele P_iP_i', în direcția forțelor $\overline{F}_i$; avem $s_i = \rho_i F_i$, cu $F_i > 0$. Relația (20) devine

$$s_1 F_1 \sin (41) \sin (31) + s_2 F_2 \sin (42) \sin (32) = 0. \tag{21}$$

Avem șase astfel de relații (21).

Între $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ avem relațiile (17) și (19), deci rezultă relațiile

$$\frac{P_4P_1}{s_1 \sin (41)} = \frac{P_4P_2}{s_2 \sin (42)} = \frac{P_4P_3}{s_3 \sin (43)}, \tag{22}$$

precum și alte trei șiruri de egalități analoge.

Relațiile de forma (21) devin

$$F_1 \cdot P_4P_1 \cdot \sin(31) + F_2P_4P_2 \cdot \sin(32) = 0. \tag{23}$$

Relațiile (23) ne arată că $\frac{\sin(31)}{\sin(32)}$ și cu $\frac{P_4P_1}{P_4P_2}$ au semne contrare și aceleași relații ne dau intensitățile forțelor $\overline{F}_i$, cînd se dau direcțiile forțelor.

Relațiile (22) ne dau distanțele pe generatoarele paraboloidului între două generatoare de același sistem d,d'.

IV

Cazul $n = 5$

1. *Cazul forțelor oricare.* Să presupunem că cele cinci forțe $\overline{F}_i$ sînt oricare. În acest caz putem lua $n - 3 = 2$ puncte P_i arbitrare și pe dreapta lor se găsesc celelalte trei puncte. *Originile P_i sînt deci colinare.*

Cazuri particulare. Dacă trei din cele cinci forțe sînt paralele cu un plan, atunci punctele P de indici diferiți sînt confundate. Într-adevăr, dacă $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ sînt paralele cu un plan (α) fie $\bar{u}$ un vector normal pe (α). Relația (9) devine

$$\bar{r}_4 (\overline{F}_4 \bar{u}) + \bar{r}_5 (\overline{F}_5 \bar{u}) = 0.$$

Deoarece $(\overline{F}_4\bar{u}) = -(\overline{F}_5\bar{u})$, rezultă $\bar{r}_5 = \bar{r}_5$, adică $P_4 = P_5$.

Dacă două forțe sînt paralele între ele, atunci punctele P de indici diferiți sînt confundate, după cum se vede luînd pe $\bar{u}$ normal la cele două forțe paralele și la o alta.

Primul caz se reduce la cazul $n = 4$, cu forțele coplanare și al doilea la cazul $n = 3$, cînd forțele sînt paralele între ele.

În cazul cînd forțele sînt oricare, să luăm $\bar{u} = \overline{F}_1 \times \overline{F}_2$ și $O = P_3$. Ecuația (9) devine

$$\overline{P_3P_4}\,(412) + \overline{P_3P_5}\,(512) = 0. \tag{24}$$

unde

$$(412) = (\overline{F}_4 \times \overline{F}_1 \cdot \overline{F}_2) \text{ și } (512) = (\overline{F}_5 \cdot \overline{F}_1 \times \overline{F}_2).$$

Dacă notăm ca mai sus $Q_i = O_1 + \overline{F}_i$, ecuația (24) arată că un punct P_α este centrul de greutate al punctelor P_β, P_γ de mase egale cu distanțele lui Q_β, Q_γ la planul forțelor de indici diferiți de α, β, γ.

Vom arăta, ca și în cazul $n-4$, *că dacă $\overline{F}_i$ nu sînt paralele cu un plan, în cazul echilibrului astatic, abscisele punctelor P_i pe dreapta lor sînt proporționale cu coeficienții unei relații liniare oarecare între $\overline{F}_i$ și reciproc.*

Toate grupele de cinci puncte P_i astfel obținute sînt ori formate din puncte confundate, ori sînt asemenea între ele.

Într-adevăr, între $\overline{F}_i$ avem două relații liniare independente

$$\sum \overline{F}_i = 0, \qquad \sum \alpha_i \cdot \overline{F}_i = 0. \tag{25}$$

Între $\overline{F}_i$ nu putem avea o altă relație independentă de primele deoarece atunci $\overline{F}_i$ ar fi coplanare.

Orice altă relație între $\overline{F}_i$ este de forma

$$\sum \xi_i \overline{F}_i = 0 \text{ cu } \xi_i = \lambda + \mu\alpha_i. \tag{25'}$$

Pe de altă parte, între $\overline{F}_i$ avem relația (8).

$$\sum OP_i . \overline{F}_i = 0,$$

unde O este un punct oarecare pe dreapta punctelor P_i. Urmează că

$$\rho\, OP_i = \lambda + \mu\, \alpha_i,$$

care demonstrează teorema de mai sus. Întotdeauna putem alege pe O astfel ca $\rho\, OP_i = \alpha_i$

De exemplu, dacă între $\overline{F}_1 \ldots, \overline{F}_4$ avem relația $\sum_1^4 \alpha_i \overline{F}_i = 0$, rezultă că punctele P_i sînt determinate de abscisele α_1, α_2, α_3, α_4, 0.

Dacă trei forțe $\overline{F}_i$ sînt paralele cu un plan, avem relația

$$\sum_1^3 \alpha_i \overline{F}_i = 0,$$

iar punctele P_i au abscisele α_1, α_2, α_3, 0, 0, punctele P_3 și P_4 fiind confundate, după cum s-a văzut.

Dacă două forțe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ sînt paralele, fără ca toate forțele $\overline{F}_i$ să fie paralele cu un plan, între cele cinci forțe avem relațiile

$$\alpha_1 \overline{F}_1 + \alpha_2 \overline{F}_2 = 0 \text{ și } \Sigma \overline{F}_i = 0.$$

Punctele P_i au abscisele α_1, α_2, 0, 0, 0, punctele P_3, P_4, P_5 fiind confundate, după cum s-a văzut mai sus. Orice altă configurație a punctelor P_i este asemenea cu cea de mai sus.

Să demonstrăm proiectivitatea între grupul celor cinci puncte de aplicație și cele cinci drepte suport ale forțelor.

Fie forțele $\overline{F}_i$ aplicate în același punct O_1, de axe (g_i) și să căutăm biraportul planelor ce trec prin (g_5) și celelalte patru axe (g_i). Vom considera pentru aceasta dreptele normale pe cele patru plane $(g_5\, g_i)$, determinate de vectorii

$$\overline{v}_i = \overline{F}_5 \times \overline{F}_i.$$

Avem deci $\sum v_i = 0$.

Deoarece între $\overline{F}_i$ avem relația $\sum_1^5 \alpha_i \overline{F}_i = 0$, rezultă că avem

$$\sum_1^4 \alpha_i (\overline{F}_5 \times \overline{F}_i) = \sum_1^4 \alpha_i \overline{v}_i = 0.$$

După cum am văzut mai sus, biraportul normalelor și deci al planelor $(g_5\, g_i)$ este egal cu biraportul celor patru valori α_i, care la rîndul lui este egal cu biraportul celor patru puncte $P_1, \ldots, P_4$ de aplicație, α_i fiind proporționale cu abscisele acestor puncte.

Dar biraportul celor patru plane este egal cu biraportul generatoarelor $(g_1), \ldots, (g_4)$ pe conul de gradul doi determinat de cele cinci drepte (g_i).

Deoarece putem lăsa deoparte în loc de (g_5) pe rînd celelalte generatoare, rezultă

Teorema 4. *În cazul echilibrului astatic pentru $n = 5$, cele cinci axe ale forțelor necoplanare considerate pe conul de gradul 2 determinat de ele, formează un grup proiectiv cu acel al punctelor de aplicație ale forțelor care se află pe o dreaptă.*

Dacă se dau punctele de aplicație P_i și direcțiile (g_i) ale forțelor, satisfăcînd condiția de proiectivitate de mai sus, se pot construi forțele $\overline{F}_i$ în felul următor:

Se ia o forță, de exemplu $\overline{F}_1$ pe (g_1), în mod arbitrar și o descompunem după (g_2), (g_3) și (g_4). Vom avea

$$\overline{F}_1 = \overline{\Phi}_2 + \overline{\Phi}_3 + \overline{\Phi}_4 .$$

Vom lua $\overline{F}_2 = \lambda_3 \overline{\Phi}_3$, $\overline{F}_3 = \lambda_3 \overline{\Phi}_3$ și $\overline{F}_4 = \lambda_4 \overline{\Phi}_4$, rămîmnînd să determinăm pe λ_i.

Deoarece între $\overline{F}_i$ avem relațiile

$$P_5P_1 \cdot \overline{F}_1 + P_5P_2 \cdot \overline{F}_2 + P_5P_3 \cdot \overline{F}_3 + P_5P_4 \overline{F}_4 = 0,$$

rezultă

$$P_5P_1 (\overline{\Phi}_2 + \overline{\Phi}_3 + \overline{\Phi}_4) + P_5P_2 \cdot \lambda_2 \overline{\Phi}_2 + P_5P_3 \cdot \lambda_3 \overline{\Phi}_3 + P_5P_4 \cdot \lambda_4 \overline{\Phi}_4 = 0.$$

Coeficienții lui $\overline{\Phi}_2$, $\overline{\Phi}_3$, $\overline{\Phi}_4$ trebuind să fie nuli, rezultă

$$P_5P_1 + P_5P_2 \cdot \lambda_2 = 0,\ P_5P_1 + \lambda_3 \cdot P_5P_3 = 0,\ P_5P_1 + \lambda_4 \cdot P_5P_4 = 0,$$

și deci forțele $\overline{F}_i$ sînt

$$\left.\begin{aligned} &\overline{F}_1,\ -\overline{\Phi}_2 \frac{P_5P_1}{P_5P_2},\ -\overline{\Phi}_3 \frac{P_5P_1}{P_5P_3},\ -\overline{\Phi}_4 \frac{P_5P_1}{P_5P_4} \\ &P_5P_1 \left(\frac{\overline{\Phi}_2}{P_5P_2} + \frac{\overline{\Phi}_3}{P_5P_3} + \frac{\overline{\Phi}_4}{P_5P_4} \right) - \overline{F}_1 ; \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

ultima forță $\overline{F}_5$ va fi în mod necesar pe (g_5).

Dacă luăm deci patru forțe $\overline{\psi}_1$, $\overline{\psi}_2$, $\overline{\psi}_3$, $\overline{\psi}_4$ pe $(g_1), \ldots, (g_4)$ cu suma nulă, cele cinci forțe $\overline{F}_i$ sînt

$$\overline{F}_i = \frac{\overline{\psi}_i}{P_5P_i} \text{ și } \overline{F}_5 = -\sum_1^4 \overline{F}_i (i = 1 \ldots 4), \qquad (26')$$

a cincea forță trebuind să se afle pe (g_5).

Din cele de mai sus se vede că putem lua arbitrar cele cinci P^i, precum și direcțiile a patru forțe (g_1), (g_2), (g_3), (g_4).

Fie P'_i punctele la ∞ de pe axele (g_i) ale forțelor $\overline{F}_i$; ele determină o conică (γ) care, în general, nu este degenerată. Din cele de mai sus se vede că cele cinci puncte P'_i pe conica (γ) și cele cinci puncte P_i pe dreapta lor, fie (a), se corespund într-o omografie. Dreptele care unesc punctele omoloage formează o suprafață de gradul trei, (S_3). Toate aceste generatoare mai taie încă o dreaptă (b), al cărui punct B la ∞ este pe (γ). Dreapta (a) este pe (S_3) o dreaptă cuspidală (dreaptă de plane dublu-tangente), iar (b) este o dreaptă de puncte duble. [3] *).

Punctul A la ∞ pe (a) are ca omolog pe (γ) un punct A' astfel încît dreapta AA' trece prin B. Planul la ∞ este deci un plan tangent la (S_3) în A'.

Se vede că cele cinci generatoare (g_i) fac parte dintr-o congruență liniară, ele tăind două drepte (a) și (b). Aceasta este întotdeauna adevărat pentru cinci forțe în echilibru [2] **).

Suprafața (S_3) poate degenera într-un hiperboloid dacă $A = A'$.

*) p. 129.
**) p. 152.

2. *Cazul a cinci forțe paralele cu un plan și al punctelor de aplicație coliniare.* Dacă $\overline{F}_i$ sînt paralele cu un plan (α), punctele P_i sînt în general într-un plan (β), deoarece se pot alege arbitrar $n-2=3$ puncte.

Dacă alegem cele trei puncte pe o dreaptă (Δ), celelalte două sînt la fel pe (Δ). Fie $\bar{u}$ versorul acestei drepte. Ecuația (8) pentru Ω pe (Δ) devine

$$\Sigma r_i \overline{F}_i = 0 \text{ cu } \Sigma \overline{F}_i = 0, \tag{27}$$

unde

$$r_i = \Omega P_i.$$

Să proiectăm ecuațiile (27) pe două axe X,Y din planul (α). Obținem patr ecuații:

$$\Sigma r_i X_i = 0,\ \Sigma r_i Y_i = 0,\ \Sigma X_i = 0,\ \Sigma Y_i = 0. \tag{28}$$

Dacă forța $\overline{F}_i$ face cu axa ox unghiul (α_i), ecuațiile (28) devin

$$\Sigma r_i F_i \cos \alpha_i = 0,\ \Sigma r_i F_i \sin \alpha_i = 0,\ \Sigma F_i \cos \alpha_i = 0,\ \Sigma F_i \sin \alpha_i = 0. \tag{29}$$

Dacă se dau punctele P_i și direcțiile (g_i) ale forțelor $\overline{F}_i$, ecuațiile (29) arată că în general intensitățile forțelor sînt bine determinate, cu aproximație de un factor. Valorile lor se află rezolvînd sistemul (29).

Cele cinci puncte coliniare și cele cinci direcții coplanare pot fi luate în orice mod.

Pentru a găsi intensitățile forțelor $\overline{F}_i$, putem proceda și astfel:

Să luăm în ecuația (27) pe Ω în P_5 și să o proiectăm pe o direcție normală la (g_4), conținută în planul (α). Obținem

$$F_1 \cdot P_5P_1 \cdot \sin (41) + F_2 \cdot P_5P_2 \cdot \sin (42) + F_3 \cdot P_5P_3 \cdot \sin (43) = 0. \tag{30}$$

La fel avem și relația

$$F_1 \cdot P_4P_1 \cdot \sin (51) + F_2 \cdot P_4P_2 \cdot \sin (52) + F_3 \cdot P_4P_3 \cdot \sin (53) = 0. \tag{30'}$$

Între F_i avem astfel $A_5^2 = 20$ relații compatibile, dintre care patru sînt independente. Din relațiile de forma (30) și (30') vom scoate pe F_i.

În aceste relații unghiurile $(\hat{ij})$, distanțele P_iP_j și intensitățile F_i au valor algebrice.

Dacă ecuațiile de forma (30) și (30') au coeficienți proporționali, ecuațiile (29), ca și (30) și (30') sînt independente numai în număr de trei.

În acest caz, grupul de puncte P_i împreună cu grupul de direcții (g_i) sînt legate proiectiv. Rezultă că din cele cinci forțe putem alege arbitrar intensitățile a două din ele. Putem construi o astfel de solicitare astatică luînd o combinație liniară oarecare a două solicitări astatice relative la două grupe diferite de cîte patru puncte din cele cinci puncte P_i.

3. *Cazul general cînd forțele $\overline{F}_i$ sînt paralele cu un plan* (α), *adică atunci cînd punctele P_i sînt într-un plan* (β). Dacă forțele $\overline{F}_i$ sînt date împreună cu punctele P_1, P_2, P_3, vom putea construi celelalte două puncte cu ajutorul formulei (9), luînd pe $\bar{u}$ succesiv egal cu $\overline{F}_5 \times \overline{k}$ și $\overline{F}_4 \times \overline{k}$, $\overline{k}$ fiind un vector normal pe planul (α).

În primul caz obținem P_4 din relația

$$\sum_1^4 \overline{r}_i (\overline{F}_i \times \overline{F}_5 \cdot \overline{k}) = 0, \text{ unde } \sum_1^4 \overline{F}_i \times \overline{F}_5 \cdot \overline{k} = 0. \tag{31}$$

Păstrînd aceleași notații ca mai sus, cantitățile $\overline{F_i} \times \overline{F_5} \cdot \overline{k}$ sînt proporționale cu distanțele de la Q_i la axa lui F_5. Urmează că P_4 este centrul de greutate al punctelor P_1, P_2, P_3, de mase proporționale cu distanțele de la Q_1, Q_2, Q_3 la (g_4).

Dacă $\overline{F_4}$ și $\overline{F_5}$ sînt paralelele, relația (31) devine o relație liniară între $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$, $\overline{r_3}$ cu suma coeficienților nulă. Urmează că P_1, P_2, P_3 sînt coliniare.

În acest caz, putem construi cele cinci puncte dacă ne dăm trei puncte dintre care cel puțin unul să corespundă la o forță din cele două forțe paralele.

Dacă se înlocuiesc forțele paralele prin rezultanta lor echivalentă, obținem cazul a patru forțe paralele cu un plan, ale căror puncte de aplicație sînt pe o dreaptă.

Dacă trei forțe sînt paralele, cele două puncte de indici diferiți sînt confundate; acest caz se reduce la acel a patru forțe paralele.

Să vedem în cazul general care este biraportul dreptelor P_5P_i. Pentru aceasta vom utiliza ecuația (9) cu Ω în P_5. Dacă luăm $\overline{u}$ normal la $\overline{F_4}$, obținem

$$\sum_1^3 \overline{P_5P_i}\,(\overline{F_i}\,\overline{u}) = 0,$$

adică

$$-F_3 \sin (43)\, \overline{P_5P_3} = F_1 \sin (41)\, \overline{P_5P_1} + F_2 \sin (42)\, \overline{P_5P_2}.$$

Dacă u este normal la $\overline{F_3}$, obținem

$$-F_4 \sin (34)\, \overline{P_5P_4} = F_1 \sin (31)\, \overline{P_5P_1} + \overline{P_2} \sin (32)\, \overline{P_5P_2}.$$

Biraportul $P_5(P_1, P_2, P_3, P_4)$ este deci dat de tabloul

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & F_1 \sin (41) & F_1 \sin (31) \\ 0 & 1 & F_2 \sin (42) & F_2 \sin (32) \end{vmatrix} = \frac{\sin (42)}{\sin (32)} : \frac{\sin (41)}{\sin (31)} =$$

$$= (g_1, g_2, g_3, g_4).$$

Urmează ca fasciculele P_5P_i și (g_i) $(i = 1, \ldots, 4)$ au același biraport. Schimbînd indicele i cu toți ceilalți, obținem

Teorema 5. *În cazul echilibrului astatic a cinci forțe paralele cu un plan, punctele P_i sînt într-un plan și formează pe conica lor un grup de cinci puncte omografic cu direcțiile forțelor.*

Din ecuația (31) se vede că P_4 are față de triunghiul $P_1P_2P_3$ coordonatele baricentrice egale cu coordonatele baricentrice ale dreptei (g_5) față de triunghiul $Q_1Q_2Q_3$ și P_5 are drept coordonate față de $P_1P_2P_3$ coordonatele dreptei (g_4) față de $Q_1Q_2Q_3$.

Bazîndu-ne pe această propoziție, putem construi forțele cînd se dau direcțiile lor și punctele de aplicație. Vom lua o forță $\overline{F_1} = \overline{O_1Q_1}$ pe (g_1) și punctele Q_2 și Q_3 le vom lua astfel ca distanțele lor la (g_5) să fie proporționale cu coordonatele baricentrice ale lui P_4 față de $P_1P_2P_3$; vom descompune apoi suma schimbată de semn a forțelor $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ găsite, după (g_4) și (g_5), iar componentele aflate sînt $\overline{F_4}$ și $\overline{F_5}$.

Pentru a construi forțele $\overline{F_i}$ cînd se dau P_i și (g_i), putem utiliza și remarca următoarea:

Fie δ_1, δ_2, δ_3 distanțele de la P_1, P_2, P_3 la dreapta P_4P_5, adică coordonatele baricentrice ale dreptei P_4P_5 față de triunghiul P_1, P_2, P_3. Dacă luăm pe Ω pe dreapta P_4P_5 și $\overline{u}$ normal la această dreaptă, ecuația (8) devine

$$\delta_1\overline{F}_1+\delta_2\overline{F}_2+\delta_3\overline{F}_3=0. \tag{31'}$$

Urmează că între trei forțe $\overline{F}_i$ avem o relație liniară ai cărei coeficienți sînt coordonatele baricentrice ale dreptei de indici diferiți față de triunghiul format cu punctele de aplicație de aceiași indici. Aceiași coeficienți δ_i sînt și coordonatele baricentrice ale lui O_1 față de $Q_1Q_2Q_3$ (presupunem că $\delta_1+\delta_2+\delta_3\neq 0$, adică $Q_1Q_2Q_3$ nu sînt coliniari).

Fie trei forțe $\overline{\Phi}_i$ pe cele trei drepte (g_1), (g_2), (g_3) astfel ca suma lor să fie nulă. Forțele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ vor fi respectiv

$$\frac{\overline{\Phi}_1}{\delta_1},\ \frac{\overline{\Phi}_2}{\delta_2},\ \frac{\overline{\Phi}_3}{\delta_3}.$$

Celelalte două forțe $\overline{F}_5$ și $\overline{F}_5$ se vor construi ca mai sus. Putem să considerăm trei forțe $\overline{\Phi}_1$, $\overline{\Phi}_4$, $\overline{\Phi}_5$ cu suma nulă pe dreptele (g_1), (g_4), (g_5). Forțele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$ vor fi proporționale cu

$$\frac{\overline{\Phi}_1}{\rho_1},\ \frac{\overline{\Phi}_4}{\rho_4},\ \frac{\overline{\Phi}_5}{\rho_5},$$

unde ρ_1, ρ_4, ρ_5 sînt distanțele punctelor P_1, P_4, P_5 la dreapta P_2P_3. Cele cinci forțe vor fi deci

$$\frac{\overline{\Phi}_1}{\delta_1},\ \frac{\overline{\Phi}_2}{\delta_2},\ \frac{\overline{\Phi}_3}{\delta_3},\ \frac{\overline{\Phi}_4}{\delta_4}\cdot\frac{\rho_1}{\delta_1},\ \frac{\overline{\Phi}_5}{\rho_5},\frac{\rho_1}{\delta_1}.$$

Suma lor trebuie să rezulte nulă.

O transformare afină aplicată punctelor P_i și o transformare afină aplicată punctelor Q_1 ne conduc la o solicitare astatică, deoarece printr-o transformare afină, centrele de greutate se transformă tot în centre de greutate.

4. *Cazul a cinci forțe paralele între ele.* În acest caz, punctele Q_i sînt coliniare, cu baricentrul O_1. Dintre punctele P_i patru pot fi alese arbitrar și al cincelea este centrul de greutate al primelor, de mase proporționale cu intensitățile forțelor corespunzătoare.

Acest caz este reciproc cu cazul cînd forțele sînt oricare și punctele lor de aplicație coliniare. Urmează că grupul de cinci puncte Q_i este omografic cu grupul de cinci drepte OP_i, pe conul lor, O fiind baricentrul (centroidul) punctelor P_i. Abscisele punctelor Q_i pe dreapta lor, de exemplu intensitățile forțelor, sînt coeficienții unei relații liniare între vectorii $\overline{OP_i}$.

Bazîndu-ne pe reciprocitatea configurațiilor punctelor de aplicație și a forțelor $\overline{F}_i$, rezultă că în cazul cînd punctele P_i sînt coplanare și deci și Q_i sînt coplanare, grupul de cinci puncte Q_i pe conica lor este omografic cu fasciculul OP_i, O fiind baricentrul punctelor P_i. O dreaptă $Q_\alpha Q_\beta$ are față de triunghiul Q_i de indici diferiți, coordonatele baricentrice egale cu coordonatele baricentrice ale lui O față de triunghiul P_i.

Fie (γ) conica punctelor P_i, situată în planul (β), și (a) dreapta la infinit din planul (α), pe care se găsesc punctele P'_i la infinit de pe axele (g_i) ale forțelor $\overline{F}_i$. Dreptele $(g_i)=P_iP'_i$ se află pe o suprafață (S_3) de gradul 3, avînd dreapta

(a) ca dreaptă de plane dublu tangente. Planul (β) este un plan tangent la (S_3) în punctul A de pe (γ), care corespunde punctului A' de pe (a) conținut în (β). Suprafața (S_3) este în acest caz un conoid.

Dreptele (g_i) mai taie încă o dreaptă (b) care întîlnește conica (γ) în punctul I de intersecție a lui (γ) cu AA'. Aceasta este o dreaptă a punctelor duble de pe (S_3).

Dacă facem să alunece $\overline{F}_i$ pe (g_i) pînă în punctele P_i'' de intersecție a lui (b) cu (g_i), se obține tot o solicitare astatică, de forma menționată la punctul (2), IV. Într-adevăr, fie u versorul de pe (b) și Ω pe (b). Sistemul fiind în echilibru, avem

$$\overline{M} = \sum \overline{r}_i \times \overline{F}_i = \overline{u} \times \sum r_i \overline{F}_i = 0.$$

Deoarece dreapta (b) nu taie dreapta (a) decît dacă planele (α) și (β) coincid, ceea ce nu presupunem, înseamnă că $\bar{u}$ și $\sum r_i \overline{F}_i$ care este în (α) nu sînt paralele, deci trebuie să avem $\sum r_i \overline{F}_i = 0$, care este condiția ca solicitarea (P_i'', F_i) să fie astatică (fig. 3).

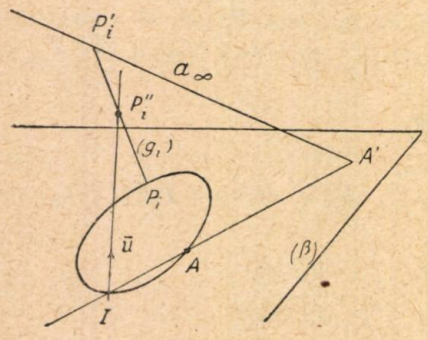


Fig. 3

Dacă se dau cinci drepte (g_i), întîlnind două alte drepte (a) și (b) care nu se taie, se pot construi pe (g_i) cinci forțe $\overline{F}_i$ care să formeze un sistem echivalent cu zero și aceasta într-un singur mod.

Dacă punctele la infinit P_i' de pe (g_i) cu punctul B_∞ de pe (b) sînt pe aceeași conică (γ_∞) făcînd să alunece $\overline{F}_i$ pe (g_i) pînă în punctele de intersecție cu (a), obținem o solicitare astatică. Aceasta este cazul de la punctul 1, IV.

Dacă avem cinci drepte (g_i) paralele cu un plan (α) și întîlnind o altă dreaptă (b), se pot găsi pe (g_i) cinci forțe $\overline{F}_i$ în echilibru, într-un singur mod. Aceasta în caz cînd patru din dreptele (g_i) nu sînt pe un paraboloid. În cazul general, dreptele (g_i) se găsesc pe o suprafață (S_3), avînd dreapta de la infinit (a_∞) din (α) ca dreaptă de plane dublu tangente.

Pentru a construi această suprafață (S_3) ce conține cele cinci generatoare (g_i), se duce un plan (β) printr-una din dreptele (g_i), fie (g_5). Se construiește conica (γ) care trece prin punctele P_i (unde $i = 1, = 4$) de întîlnire a dreptelor (g_i) cu (β) și prin punctul B de întîlnire a dreptei (b) cu (β). Fie P_5 celălalt punct de intersecție a lui (γ) cu (g_5), grupul de cinci puncte P_i de pe (γ) este omografic cu grupul de cinci puncte P_i' de intersecție a lui (a_∞) cu (g_i). Suprafața (S_3) se obține unind punctele omoloage de pe (γ) și (a_∞).

Dacă facem să alunece $\overline{F}_i$ pînă în punctele de intersecție a dreptei (g_i) cu (b), obținem o solicitare astatică de felul celei descrise la punctul 2, IV. Dacă facem să alunece $\overline{F}_i$ pînă în punctele de intersecție a generatoarelor (g_i) cu un plan tangent (τ) la (S_3), obținem solicitarea astatică de la punctul 3, IV.

Un plan (τ) tangent la (S_3) conține o generatoare și taie (S_3) după încă o conică (γ') care conține și punctul de intersecție a dreptei (b) cu plarul (τ). Dreptele (g_i) taie conica (γ') în P_i'', iar grupul de cinci puncte P''_i pe (γ') este omografic cu P_i' de pe (a_∞) (fig. 4).

Să vedem și în cazul a cinci forțe paralele care este legătura dintre coeficienții relațiilor liniare independente între $\overline{F}_1$ și poziția punctelor P_i.

Între $\overline{F}_i$ avem trei relații liniare independente,

$$\sum \overline{F}_i = 0, \quad \sum \alpha_i \overline{F}_i = 0, \quad \sum \beta_i \overline{F}_i = 0. \tag{32}$$

Dacă punctele P_i se află în planul (xy), condiția (8) ne dă, pentru $\bar{u}$ în direcția axei (x) și axei (y) respectiv,

$$\sum x_i \overline{F}_i = 0, \quad \sum y_i \overline{F}_i = 0. \tag{33}$$

Cum între $\overline{F}_i$ nu avem decît trei relații independente, rezultă

$$x_i = u + v\alpha_i + w\beta_i, \quad y_i = u' + v'\alpha_i + w'\beta_i \tag{34}$$

Aceasta arată că punctele P_i se obțin din configurația (α_i, β_i) printr-o transformare afină. Această transformare poate fi și degenerată, de exemplu să luăm $v' = w' = 0$, cînd cele cinci puncte sînt coliniare.

Să presupunem că rezolvăm pe $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ în funcție de $\overline{F}_4$ și $\overline{F}_5$ din trei relații independente dintre forțele $\overline{F}_i$ (paralele cu un plan). Vom avea deci

$$\begin{aligned} \overline{F}_1 &+ \alpha_1 \overline{F}_4 + \beta_1 \overline{F}_5 = 0, \\ F_2 &+ \alpha_2 \overline{F}_4 + \beta_2 \overline{F}_5 = 0, \\ \overline{F}_3 &+ \alpha_3 \overline{F}_4 + \beta_3 \overline{F}_5 = 0. \end{aligned}$$

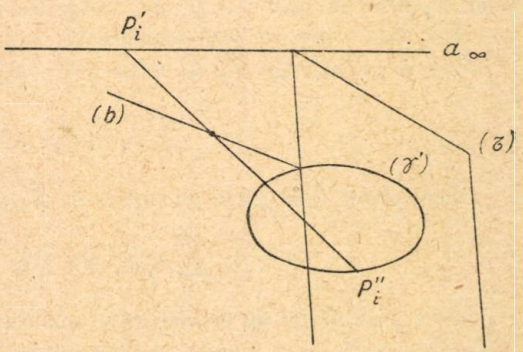


Fig. 4

Deoarece $\sum \overline{F}_i = 0$, rezultă că $\sum_1^3 \alpha_i = 1$ și $\sum_1^3 \beta_i = 1$.

Introducînd aceste valori în relația (9), unde $\bar{u}$ este normal pe $\overline{F}_4$, obținem

$$\sum \bar{r}_i (\overline{F}_i \cdot \bar{u}) = -\bar{r}_1 \beta_1 (\overline{F}_5 \bar{u}) - \bar{r}_2 \cdot \beta_2 (\overline{F}_5 \bar{u}) - \bar{r}_3 \cdot \beta_3 (\overline{F}_5 \bar{u}) + \bar{r}_5 (\overline{F}_5 \bar{u}) = 0,$$

de unde

$$\bar{r}_5 - \sum_1^3 \beta_i \bar{r}_i = 0.$$

La fel se vede că $\bar{r}_4 = \sum_1^3 \alpha_i \bar{r}_i$.

De aici urmează că α_i și β_i sînt coordonatele baricentrice ale lui P_4 și P_5 față de triunghiul $P_1P_2P_3$.

5. *Relații metrice.* În cele de mai jos vom da cîteva relații metrice pe o suprafață (S_3). Să facem să alunece forțele $\overline{F}_i$, aplicate în P_i, pînă în P_i', astfel ca noua solicitare să fie tot astatică. Va trebui deci să avem relația dedusă din (9)

$$\sum (P_1' - O)\ (\overline{F}_i \bar{u}) = 0 \tag{35}$$

pentru orice $\bar{u}$.

Deoarece $P_i' = P_i + \lambda_i \overline{F}_i$, relația (35) devine

$$\sum_1^5 \lambda_i \overline{F}_i (\overline{F}_i \bar{u}) = 0. \tag{36}$$

Dacă proiectăm ecuația (36) pe trei axe, obținem șase relații

$$\sum \lambda_i X_i^2 = 0, \quad \sum \lambda_i Y_i X_i = 0, \quad \sum_i Y_i^2 = 0,$$
$$\sum \lambda_i X_i Z_i = 0, \quad \sum \lambda_i Y_i Z_i = 0, \quad \sum \lambda_i Z_i^2 = 0, \tag{37}$$

omogene în λ_i și de rangul 3, ceea ce se poate vedea imediat luînd planul (xy) paralel cu planul (α) al forțelor. La fel se vede dacă considerăm toți determinanții de ordinul 4, primele trei linii fiind formate cu coeficienții primelor trei ecuații (37). Toți acești determinanți sînt nuli.

Putem alege deci două din valorile λ_i în mod arbitrar și celelalte trei sînt atunci bine determinate. Avem astfel ∞^2 soluții care dau ∞^2 alunecări ale forțelor $\overline{F}_i$ pînă la cele ∞^2 plane, tangente la (S_3).

Ecuațiile (36) se pot transforma și astfel:

Fie $\bar{u}$ normal pe $\overline{F}_5$. Ecuația (36) devine

$$\sum_1^4 \lambda_i \overline{F}_i \overline{F}_i \cdot \sin\,(5i) = 0. \tag{38}$$

Proiectînd (38) pe o normală la $\overline{F}_4$, obținem

$$\sum_1^3 \lambda_i F_i^2 \sin\,(4i) \sin\,(5i) = 0. \tag{39}$$

Sînt zece astfel de ecuații care formează un sistem liniar în λ_i de rangul 3. Înlocuind $\lambda_i F_i$ cu s_i, egale cu distanțele $P_i P'$ în sensul lui $\overline{F}_i$, obținem zece ecuații de forma

$$\sum_1^3 s_i F_i \sin\,(\alpha_i) \sin\,(\beta_i) = 0, \tag{40}$$

α și β fiind două oricare din numerele de la 1 la 5.

În ecuațiile (40) putem alege arbitrar două valori s_i și celelalte trei sînt determinate. Punctele P' date de $P_i P_i' = s_i$ în sensul lui $\overline{F}_i$ determină un plan tangent la (S_3).

Pe de altă parte, între trei forțe $\overline{F}_i$ avem relația (31′)

$$\delta_1 \overline{F}_1 + \delta_2 \overline{F}_2 + \delta_3 \overline{F}_3 = 0,$$

precum și relația care leagă trei versori într-un plan

$$\frac{\overline{F}_1 \sin\,(23)}{F_1} + \frac{\overline{F}_2}{\overline{F}_2} \sin\,(31) + \frac{\overline{F}_3}{\overline{F}_3} \sin\,(12) = 0.$$

Rezultă proporțiile

$$\frac{F_1 \cdot \delta_1}{\sin\,(23)} = \frac{F_2 \cdot \delta_2}{\sin\,(31)} = \frac{F_3 \cdot \delta_3}{\sin\,(12)},$$

precum și alte nouă analoge.

Înlocuind aceste valori ale lui $\overline{F}_i$ în (40), obținem relații care dau pe s_i în funcție de elementele geometrice ale lui (S_3).

6. *Exprimarea vectorială a proiectivității.* Pentru ca cinci forțe paralele cu un plan (α) și cinci puncte P_i de aplicație dintr-un plan (β) să formeze o solicitare

astatică, este necesar ca grupul de cinci direcții și grupul punctelor pe conica lor să fie omografic. Vom exprima aceasta printr-o formulă vectorială.

Să presupunem că cele două plane (α) și (β) sînt confundate cu planul (xy) și fie φ_i unghiurile făcute de ox cu direcțiile forțelor $\overline{F_i}$. Condițiile de echilibru astatic sînt

$$\sum x_i X_i = \sum x_i F_i \cos \varphi_i = 0, \qquad \sum Y_i = \sum F_i \sin \varphi_i = 0,$$
$$\sum y_i X_i = \sum y_i F_i \cos \varphi_i = 0, \qquad \sum x_i Y_i = \sum x_i F_i \sin \varphi_i = 0,$$
$$\sum X_i = \sum F_i \cos \varphi_i = 0, \qquad \sum y_i Y_i = \sum y_i F_i \sin \varphi_i = 0.$$

Aceste șase condiții se mai pot scrie

$$\sum x_i X_i = 0, \ \sum y_i X_i = 0, \ \sum X_i = 0, \ \sum X_i \operatorname{tg} \varphi_i = 0, \ \sum x_i X_i \operatorname{tg} \varphi_i = 0,$$
$$\sum y_i X_i \operatorname{tg} \varphi_i = 0.$$

Aceste ecuații trebuie să aibă o soluție în X_i, deci rangul lor trebuie să fie 4. Vom anula pentru aceasta cei doi determinanți de ordinul 5 conținînd primele patru linii. Vom numi cu T_{ik} determinanții de ordinul 3 formați din primele trei linii, unde am suprimat coloanele i și $k > i$ și care reprezintă dublul ariilor triunghiurilor formate cu cele cinci puncte.

Dezvoltînd cei doi determinanți după regula lui Laplace, vom obține

$$\sum (-1)^{i+k} T_{ik} (x_i - x_k) \operatorname{tg} \varphi_i \operatorname{tg} \varphi_k = 0,$$
$$\sum (-1)^{i+k} T_{ik} (y_i - y_k) \operatorname{tg} \varphi_i \operatorname{tg} \varphi_k = 0.$$

Aceste două formule se pot condensa într-o singură formulă vectorială

$$(-1)^{i+k} T_{ik} (P_i - P_k) \operatorname{tg} \varphi_i \,.\, \operatorname{tg} \varphi_k = 0 \quad (i < k), \tag{41}$$

care reprezintă condiția de omografie menționată mai sus. Această relație conține zece termeni.

Dacă rotim direcțiile forțelor cu același unghi θ, relația (41) va fi iarăși satisfăcută, adică relația

$$(-1)^{i+k} T_{ik} (P_i - P_k) \operatorname{tg} (\varphi_i + \theta) \operatorname{tg} (\varphi_k + \theta) = 0, \tag{42}$$

este satisfăcută pentru orice θ, dacă relația (41) este satisfăcută.

Între cei zece vectori $P_i - P_k$ (unde $i < k$) avem întotdeauna relația

$$(-1)^{i+k} T_{ik} (P_i - P_k) = 0, \tag{43}$$

după cum se constată dezvoltînd doi determinanți de ordinul 5, prima linie și a patra avînd ca elemente 1, a doua și a treia x_i, respectiv y_i, iar a cincea pe rînd x_i și y_i. Relația (43) se obține din (42) dînd o rotație pînă cînd toate direcțiile $\varphi_k + \theta$ devin izotrope. Pentru aceasta trebuie ca $\operatorname{tg} \theta = i$ și rezultă $\operatorname{tg} (\varphi_k + \theta) = -i$.

Dacă luăm ca origine a absciselor unghiulare axa (y), condiția (41) devine

$$\sum (-1)^{i+k} \frac{T_{ik} (P_i - P_k)}{\operatorname{tg} \varphi_i \operatorname{tg} \varphi_k} = 0, \tag{44}$$

care este satisfăcută odată cu (42).

Remarcăm că dacă în (41) avem un produs între $\operatorname{tg} \varphi_i = 0$ și $\operatorname{tg} \varphi_k = \infty$, conform relației (42) el va trebui înlocuit cu (—1).

V

Cazul $n = 6$

1. *Cazul forțelor oricare.* Cele șase forțe, fiind în echilibru, au axele aparținînd unui complex liniar [2].

Dacă cele șase forțe nu sînt paralele cu un plan, ecuația (9) arată că cele șase puncte de aplicație sînt într-un plan, deoarece putem alege $n-3=3$ puncte arbitrar și celelalte trei sînt centrele de greutate ale primelor.

De exemplu, dacă luăm $\bar{u} = \overline{F}_5 \times \overline{F}_6$, ecuația (9) ne dă

$$\sum_1^4 \bar{r}_i \,.\, (\overline{F}_i \bar{u}) = 0\,, \tag{45}$$

cu $\sum_1^4 (\overline{F}_i \bar{u}) = 0$. Urmează că cele patru puncte $P_1, \ldots, P_4$ sînt coplanare și la fel se vede că toate sînt într-un același plan.

Între cele șase forțe neparalele cu un plan, avem trei relații liniare

$$\sum \cdot \overline{F}_i = 0\,, \quad \sum a_i \overline{F}_i = 0\,, \quad \sum b_i \overline{F}_i = 0\,. \tag{46}$$

Dacă luăm ca plan (xy) planul celor șase puncte P_i, relația (8) ne dă

$$\sum x_i \overline{F}_i = 0\,, \quad \sum y_i \overline{F}_i = 0.$$

Urmează că

$$x_i = u + va_i + wb_i\,,$$
$$y_i = u' + v'a_i + w'b_i\,,$$

adică cele șase puncte se pot obține din punctele de coordonate (a_i, b_i) printr-o transformare afină oarecare.

Presupunînd că $\overline{F}_4, \overline{F}_5, \overline{F}_6$ nu sînt paralele cu un plan din (46), putem rezolva pe $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$, adică avem

$$\left.\begin{aligned} \overline{F}_1 \quad &+ \alpha_1 \overline{F}_4 + \beta_1 \overline{F}_5 + \gamma_1 \overline{F}_6 = 0\,, \\ \overline{F}_2 \quad &+ \alpha_2 \overline{F}_5 + \beta_2 \overline{F}_5 + \gamma_2 \overline{F}_6 = 0\,, \\ \overline{F}_3 \quad &+ \alpha_3 \overline{F}_4 + \beta_3 \overline{F}_5 + \gamma_3 \overline{F}_6 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Adunăm aceste trei ecuații și ținînd seama că $\Sigma \overline{F}_i = 0$, se obține

$$\sum \alpha_i = \sum \beta_i = \sum \gamma_i = 1. \tag{48}$$

Dacă introducem valorile (47) în (45), obținem

$$(\overline{F}_4 \times \overline{F}_5 \,.\, \overline{F}_6) \left[\bar{r}_4 - \sum_1^3 \alpha_i \bar{r}_i \right] = 0\,.$$

Aceasta arată că P_4 este centrul de greutate al punctelor P_1, P_2, P_3 de mase α_1, α_2, α_3, adică α_i sînt coordonatele baricentrice ale lui P_4 față de triunghiul $P_1P_2P_3$. În mod analog se vede că P_5 și P_6 au coordonatele β_i și γ_i față de același triunghi.

Să căutăm biraportul dreptelor care proiectează punctele $P_2P_3P_4P_5$ din P_1. Ecuațiile acestor drepte, față de triunghiul $P_1P_2P_3$ sînt

$$x_3 - 0,\ x_2 = 0,\ \frac{x_2}{\alpha_2} - \frac{x_3}{\alpha_3} = 0,\ \frac{x_2}{\beta_2} - \frac{x_3}{\beta_3} = 0.$$

deci biraportul este dat de tabloul

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\alpha_2} & \frac{1}{\beta_2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha_3} & -\frac{1}{\beta_3} \end{vmatrix},$$

adică este egal cu $\frac{\beta_2}{\beta_3} : \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$,

Să căutăm și biraportul planelor care proiectează forțele $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$ din $\overline{F}_6$, forțele fiind considerate concurente în O_1. Vom considera pentru aceasta vectorii $\overline{F}_6 \times \overline{F}_i$ $(i = 2, 3, 4, 5)$.

Dacă ținem seama de ecuațiile (47), rezultă

$$\overline{F}_6 \times \overline{F}_2 = +\alpha_2 \overline{F}_4 \times \overline{F}_6 + \beta_2 \overline{F}_5 \times \overline{F}_3,$$
$$\overline{F}_6 \times \overline{F}_3 = \alpha_3 \overline{F}_4 \times \overline{F}_6 + \beta_3 \overline{F}_5 \times \overline{F}_6.$$

Urmează că biraportul căutat este dat de tabloul

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & -1 & 0 \\ \beta_2 & \beta_3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} : \frac{\beta_3}{\alpha_3},$$

adică este același ca mai sus.

Dacă numim cu P'_i punctele la ∞ pe axele g_i ale forțelor F_i, rezultă

Teorema 6. *În cazul echilibrului astatic pentru $n=6$ și $\overline{F}_i$ neparalele cu un plan, punctele de aplicație P_i sînt într-un plan și biraportul dreptelor care proiectează patru puncte P_i din P_α ori P_β, de indici diferiți de i, este egal cu biraportul dreptelor care proiectează punctele P'_i din P'_α, respectiv P'_β.*

De aici rezultă că *cinci puncte P_i formează pe conica lor un grup omografic cu cele cinci drepte ce proiectează P'_i din P'_α $(\alpha \neq i)$ și reciproc.*

Dacă cele șase puncte P_i sînt pe o conică, atunci cele șase direcții (g_i) sînt pe un con de gradul 2 și reciproc.

2. *Construcția forțelor cînd se dau punctele.* Se știe că dîndu-se punctele P_i într-un plan, putem alege trei forțe în mod arbitrar, fie $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$. Ecuațiile (46) ne vor da $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, punctele P_i avînd coordonatele $(a_i b_i)$.

Dacă numim cu h_1, α_1, β_1, γ_1, distanțele P_1, P_4, P_5, P_6 la dreapta $P_2 P_3$ relația (8) ne dă

$$h_1 \overline{F}_1 + \alpha_1 \overline{F}_4 + \beta_1 \overline{F}_5 + \gamma_1 \overline{F}_6 = 0. \tag{49}$$

Această ecuație ne arată că P_1, P_2, P_3 nu trebuie să fie coliniare, deoarece între $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$ nu avem o relație liniară.

Relațiile (49) nu sînt altceva decît relațiile (47).

Putem construi forțele $\overline{F}_i$ cînd se dau direcțiile a patru dintre ele, precum și punctele P_i de aplicație. Vom considera pentru aceasta punctele la infinit P' de pe (g_i), din care P'_1, P'_4, P'_5, P'_6 le presupunem date.

Vom duce dreptele P'_1, P'_2, și P', P'_3 astfel ca fasciculul cu centrul cu P'_1 să fie omografic cu punctele $P_2, \ldots, P_6$ de pe conica lor. Vom duce apoi $P'_4 P'_2$ și $P'_4 P'_3$ astfel ca fasciculul cu centrul în P'_4, din care avem trei drepte, să fie omografic cu grupul P_1, P_2, P_3, P_5, P_6, pe conica lor. Punctele P'_2 și P'_3 vor fi astfel aflate și deci avem și celelalte două direcții (g_2), (g_3) ale forțelor.

Pentru a construi forțele $\overline{F}_i$, vom lua pe patru din direcții, de exemplu pe g_1, g_4, g_5, g_6, patru forțe $\overline{\Phi}_1$, $\overline{\Phi}_4$, $\overline{\Phi}_5$, $\overline{\Phi}_6$ cu suma nulă. Vom lua deci, conform ecuației (49),

$$\overline{F}_1 = \frac{\overline{\Phi}_1}{h_1}, \quad \overline{F}_4 = \frac{\overline{\Phi}_4}{\alpha_1}, \quad \overline{F}_5 = \frac{\overline{\Phi}_5}{\beta_1}, \quad \overline{F}_6 = \frac{\overline{\Phi}_6}{\gamma_1}.$$

Suma forțelor astfel găsite este în același plan cu (g_2) și (g_3).

Descompunînd-o după (g_2) și (g_3), obținem $-\overline{F}_2$ și $-\overline{F}_3$. Sau încă, putem găsi $\overline{F}_2$ și $\overline{F}_3$ cu ajutorul formulelor (46).

Să presupunem că avem șase forțe în echilibru, aplicate în $A_i(x_i, y_i, z_i)$ și de intensități $\overline{F}_i(X_i, Y_i, Z_i)$. Axele lor (g_i) aparțin la un complex liniar. Dacă le facem să alunece, putem obține în general o singură poziție de echilibru astatic. Într-adevăr, un punct de pe (g_i) este dat de

$$P_i = A_i + \lambda_i \overline{F}_i.$$

Condiția (9) de echilibru astatic ne dă

$$\Sigma (P_i - 0)\ (\overline{F}_i \bar{u}) = \Sigma [A_i - O + \lambda_i \overline{F}_i],\ (\overline{F}_i \bar{u}) = 0. \tag{50}$$

Luînd pe $\bar{u}$ succesiv paralel cu cele trei axe și proiectînd pe (50) pe axe, obținem nouă ecuații care se reduc la (6), sistemul fiind în echilibru. Aceste ecuații ne vor da pe λ_i și deci și punctele P_i. Punctele obținute sînt într-un plan, după cum s-a văzut mai sus.

Cazuri particulare. Dacă trei puncte de aplicație sînt în linie dreaptă, forțele de indici diferiți sînt paralele cu un plan. Într-adevăr, dacă punctele P_1, P_2, P_3 sînt coliniare și luăm O pe dreapta acestor puncte, relația (8), pentru $\bar{u}$ normal pe dreaptă, ne dă

$$\alpha_1 \overline{F}_4 + \beta_1 \overline{F}_5 + \gamma_1 \overline{F}_6 = 0,$$

unde α_1, β_1, γ_1, sînt distanțate de la P_4, P_5, P_6 la dreapta $P_1P_2P_3$. Rezultă deci că $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$ sînt paralele cu un plan, adică P'_4, P'_5, P'_6 sînt și ele coliniare, ca și punctele fără accent și de indici diferiți.

Reciproc, dacă $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$ sînt paralele cu un plan, ecuația (9), pentru $\bar{u}$ normal pe aceste forțe, ne dă

$$r_1 (\overline{F}_1 \bar{u}) + r_2 (\overline{F}_2 \bar{u}) + r_3 (\overline{F}_3 \bar{u}) = 0, \tag{51}$$

cu suma coeficienților nulă, deci P_1, P_2, P_3 sînt coliniare. Dacă numim cu δ'_i distanțele de la Q_1, Q_2, Q_3 la planul celor trei forțe coplanare, relația (51) se mai scrie

$$r_1 \delta'_1 + r_2 \delta'_2 + r_3 \delta'_3 = 0, \text{ cu } \sum_1^3 \delta'_i = 0$$

și deci

$$\frac{P_2 P_3}{\delta'_1} = \frac{P_3 P_1}{\delta'_2} = \frac{P_1 P_2}{\delta'_3}.$$

Dacă patru puncte de aplicație, fie P_1, P_2, P_3, P_4, sînt coliniare, forțele de indici diferiți sînt paralele, deoarece, cu semnificația de mai sus, avem

$$\beta_1 \overline{F}_5 + \gamma_1 \overline{F}_6 = 0.$$

Reciproc, dacă două forțe sînt paralele, fie $\overline{F}_5$ și $\overline{F}_6$, punctele de indici diferiți sînt coliniare, după cum se vede aplicînd formula (9) pentru $\bar{u}$ normal pe $\overline{F}_5$ și pe cîte una din celelalte patru forțe. Acest caz se reduce la cazul a cinci forțe oarecare, $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5 + \overline{F}_6$ cu punctele de aplicație coliniare.

Dacă trei forțe, fie $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$, sînt paralele, fără ca toate forțele să fie paralele cu un plan, punctele de indici diferiți sînt confundate. Acest caz se reduce la cazul a patru forțe paralele, $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$, avînd deci punctele de aplicație într-un plan.

Dacă cele șase puncte P_i sînt vîrful unui patrulater plan, atunci punctele P'_i sînt și ele vîrfurile unui patrulater la ∞, astfel încît la trei vîrfuri coliniare P'_i corespund trei vîrfuri coliniare P'_j, dar de indici diferiți.

Făcînd o transformare omografică obținem

T e o r e m a 7. *Fie două patrulatere P_i și P'_i în două plane diferite, astfel că dacă vîrfurile P_α, P_β, P_γ sînt coliniare, vîrfurile P'_α, P'_β, P'_γ nu sînt coliniare. În acest caz, cele șase drepte $P_i P'_i$ aparțin unui complex liniar.*

În această teoremă se presupune că vîrfurile patrulaterelor nu se află pe dreapta de intersecție a planelor.

3. *Cazul forțelor paralele cu un plan.* Să presupunem că forțele $\overline{F}_i$ sînt paralele cu un plan. În acest caz, putem alege $n-2=4$ puncte de aplicație în mod arbitrar, celelalte două fiind date de relațiile (9).

Între $\overline{F}_i$ avem patru relații independente, fie

$$\sum \overline{F}_i = 0, \quad \sum \xi_i \overline{F}_i 0, \quad \sum \eta_i \overline{F}_i = 0, \quad \sum \zeta_i \overline{F}_i = 0, \tag{52}$$

Condiția (8) ne dă relațiile

$$\sum x_i \overline{F}_i = 0, \quad \sum y_i \overline{F}_i = 0, \quad \sum z_i \overline{F}_i = 0, \text{ împreună cu } \sum \overline{F}_i = 0. \tag{53}$$

Urmează că avem

$$\begin{aligned} x_i &= a_{11}\,\xi_i + a_{12}\,\eta_i + a_{13}\,\xi_i + a_{14}, \\ y_i &= a_{21}\,\xi_i + a_{22}\,\eta_i + a_{23}\,\zeta_i + a_{24}, \\ z_i &= a_{31}\,\xi_i + a_{32}\,\eta_i + a_{33}\,\zeta_i + a_{34}, \end{aligned}$$

deci configurația punctelor de aplicație se deduce dintr-una din ele printr-o afinitate oarecare.

Să luăm în ecuația (9) pe Ω în P_1 și pe $\bar{u}$ succesiv normal pe $\overline{F}_3$ și $\overline{F}_5$. Obținem

$$\left.\begin{aligned} \overline{P_1 P_5} = \bar{r}_5 &= \frac{\bar{r}_2 F_2 \sin(62) + \bar{r}_3 F_3 \sin(63) + \bar{r}_4 F_4 \sin(64)}{F_5 \sin(56)}, \\ \bar{r}_6 &= \frac{\bar{r}_2 F_2 \sin(52) + \bar{r}_3 F_3 \sin(53) + \bar{r}_4 F_4 \sin(54)}{F_6 \sin(65)}. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Să căutăm biraportul planelor care proiectează punctele P_3, P_4, P_5, P_6 din dreapta $P_1 P_2$. Vom forma pentru aceasta produsele mixte

$$\bar{r}_2 \times \bar{r}_3 \cdot \bar{r}_5 = (235) = (234)\frac{F_4}{F_5} \cdot \frac{\sin(64)}{\sin(56)},$$

$$\bar{r}_2 \times \bar{r}_3 \cdot \bar{r}_6 = (236) = (234)\frac{F_4}{F_6} \cdot \frac{\sin(54)}{\sin(65)},$$

$$\bar{r}_2 \times \bar{r}_4 \cdot \bar{r}_5 = (245) = (243)\frac{F_3}{F_5} \cdot \frac{\sin(63)}{\sin(56)},$$

$$\bar{r}_2 \times \bar{r}_4 \cdot \bar{r}_3 = (246) = (243)\frac{F_3}{F_6} \cdot \frac{\sin(53)}{\sin(65)}.$$

Biraportul celor patru plane este egal cu biraportul volumelor de mai sus, adică cu

$$\frac{(235)}{(236)} : \frac{(245)}{(246)} = \frac{\sin(64)}{\sin(54)} : \frac{\sin(63)}{\sin(53)} = \frac{\sin(35)}{\sin(36)} : \frac{\sin(45)}{\sin(46)} = \tag{55}$$

$$= (g_3, g_4, g_5, g_6).$$

El este deci egal cu biraportul axelor forțelor $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$. Urmează că putem enunța

Teorema 8. *În cazul echilibrului astatic a șase forțe paralele cu un plan, punctele de aplicație P_i formează pe cubica lor strîmbă un grup de puncte omografic cu grupul celor șase direcții ale forțelor.*

Reciproc, dacă luăm arbitrar punctele P_i, atunci forțele $\overline{F}_i$ trebuie să fie paralele cu un plan. Într-adevăr, luînd Ω în P_1 și $\bar{u}$ normal pe P_1P_2 și P_1P_3, ecuația (8) devine

$$(\bar{r}_4\bar{u})\,\overline{F}_4 + (\bar{r}_5\bar{u})\,\overline{F}_5 + (\bar{r}_6\bar{u})\,\overline{F}_6 = 0, \tag{56}$$

care arată că $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$ sînt paralele cu un plan.

Coeficienții care leagă trei forțe oarecare sînt proporționali cu distanțele punctelor de aceiași indici față de planul celorlalte trei puncte.

Avem $20 = C_6^3$ relații compatibile cu forma (56).

Din relațiile de forma (56) se pot scoate $\overline{F}_4$ și $\overline{F}_3$ în funcție de $\overline{F}_5$ și $\overline{F}_6$. Biraportul axelor acestor patru forțe este tocmai biraportul planelor ce proiectează punctele P_3, P_4, P_5, P_6 din P_1P_2, astfel încît teorema 8 se poate vedea și cu ajutorul relațiilor de forma (56).

Din teorema 8 se vede că putem lua arbitrar direcțiile coplanare a trei forțe și forțele sînt bine determinate cu ajutorul relațiilor (56).

Cazuri particulare. Să presupunem că două forțe, fie $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, sînt paralele între ele, toate fiind ca mai sus, paralele cu un plan. Luînd pe $\overline{u}$ normal pe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, în planul forțelor, ecuația devine

$$\sum_3^6 \overline{r}_i\,(\overline{F}_i\,\overline{u}) = 0, \quad \text{cu} \qquad \sum (\overline{F}_i\,\overline{u}) = 0.$$

Aceasta înseamnă că cele patru puncte P_i de indici diferiți cu ai forțelor paralele sînt într-un plan. Acesta este cazul $n = 5$, cu punctele într-un plan și forțele paralele cu un plan, după cum se vede reducînd $(P_1\,\overline{F}_1)$ și $(P_2\,\overline{F}_2)$ la o singură forță echivalentă.

Și în acest caz putem spune că cele șase puncte P_i sînt pe o cubică formată dintr-o conică și o dreaptă P_1P_2, care taie conica și pentru care avem relația de omografie.

Dacă trei forțe, fie $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, sînt paralele între ele, toate fiind paralele cu plan, luînd $\overline{u}$ normal pe $\overline{F}_1$, ecuația (8) devine

$$\overline{r}_4\,(\overline{F}_4\,\overline{u}) + \overline{r}_5\,(\overline{F}_5\,\overline{u}) + \overline{r}_6\,(\overline{F}_6\,\overline{u}) = 0,$$

cu suma coeficienților nulă. Urmează că punctele de indici diferiți sînt coliniare. Dacă înlocuim forțele paralele cu una singură, obținem cazul $n = 4$, cînd punctele de aplicație sînt coliniare iar forțele paralele cu un plan.

Dacă forțele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ sînt paralele, și la fel $\overline{F}_3$ $\overline{F}_4$, fără ca toate forțele să fie paralele cu un plan luînd $\overline{u}$ normal pe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_3$, ecuația (8) ne arată că $P_5 = P_6$. Dacă $\overline{u}$ este normal pe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_5$, se obține

$$\overline{r}_3\,(\overline{F}_3\,\overline{u}) + r_4\,(\overline{F}_4\,\overline{u}) + r_6\,(\overline{F}_6\,\overline{u}) = 0, \tag{57}$$

cu suma coeficienților nulă și care deci arată că P_3, P_4, P_6 sînt coliniare.

În mod analog, dacă luăm $\overline{u}$ normal pe $\overline{F}_3$ și $\overline{F}_5$, se vede că P_1, P_2, P_6 sînt coliniare, deci cele șase puncte sînt pe două drepte concurente în $P_5 = P_6$, pe una din drepte fiind P_1 și P_2 și pe cealaltă P_3 și P_4 (fig. 5).

Ecuația (57) mai arată că punctul $P_5 = P_6$ este centrul forțelor paralele, adică atît al forțelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, cît și al forțelor $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$.

Dacă $\overline{F}_1$ este paralelă cu $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ cu $\overline{F}_4$, iar $\overline{F}_5$ și $\overline{F}_6$ sînt în același plan cu primele, atunci luînd pe $\overline{u}$ normal succesiv la $\overline{F}_1$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_5$ și $\overline{F}_6$, se vede ca punctele P_1, P_2, P_5, P_6, sînt într-un plan, iar P_3, P_4, P_5, P_6 în altul. Cubica celor șase puncte în acest caz este formată din trei drepte P_1P_2, P_3P_4, P_5P_6 (fig. 6).

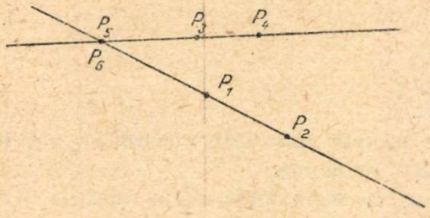


Fig. 5

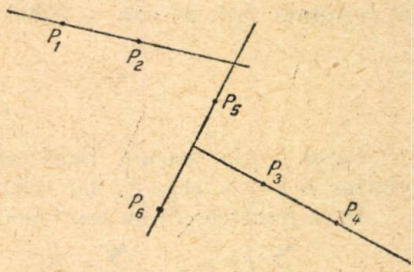


Fig. 6

Dacă $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ sînt paralele, ca și $\overline{F}_3$ cu $\overline{F}_4$, și la fel $\overline{F}_5$ cu $\overline{F}_6$, toate fiind paralele cu un plan și suma lor fiind nulă, atunci luînd pe $\overline{u}$ normal succesiv la $\overline{F}_1$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_5$, ecuația (9) ne dă relații de forma

$$r_3(\overline{F}_3\ \overline{u}) + r_4(\overline{F}_4\ \overline{u}) + r_5(\overline{F}_5\ \overline{u}) + r_6(\overline{F}_6\ \overline{u}) = 0,$$

cu suma coeficienților nulă; punctele P_3, P_4, P_5, P_6 sînt deci într-un plan. La fel P_1, P_2, P_5, P_6 și P_1, P_2, P_3, P_4. Urmează că cele șase puncte trebuie să fie pe trei drepte concurente, care și formează cubica lor. Punctul de intersecție al celor trei drepte este centrul fiecărui grup al celor trei perechi de forțe paralele (fig. 7).

Dacă patru forțe sînt paralele între ele, de exemplu, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, atunci relația (9) ne arată că $P_5 = P_6$, adică punctele de aplicație de indici diferiți sînt confundate.

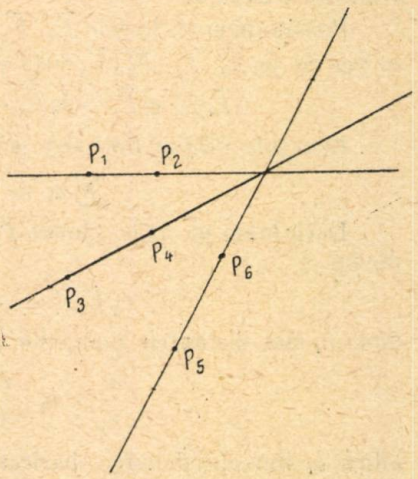


Fig. 7

4. *Determinarea forțelor în cazul cînd se dau direcțiile lor paralele cu un plan.* Fie șase drepte (g_i) paralele cu un plan (α). Pe ele putem găsi într-un singur mod șase forțe $\overline{F}_i$ în echilibru. Aceste șase direcții aparțin de altfel unui complex liniar special, avînd axa la ∞ în (α) [2] *).

Dacă luăm (α) paralel cu planul (xy) și dreptele (g_i) trec prin A_i $(x_i\ y_i\ z_i)$, se vede că putem face să alunece în ∞^3 moduri forțele $\overline{F}_i$, astfel ca solicitarea să fie astatică. Într-adevăr, ecuația vectorială

$$\sum (P_i - O)(\overline{F}_i\ \overline{u}) = 0 \text{ sau } \sum (A_i - O + \rho_i \overline{F}_i)(\overline{F}_i\ \overline{u}) = 0$$

*) p. 153.

ne conduce la ecuațiile scalare

$$\sum_1^6 X_i\, X_i + \sum_1^6 \rho_i\, X_i^2 = 0\,,\ \sum_1^6 x_i\, Y_i + \sum_1^6 \rho_i\, X_i\, Y_i = 0\,,$$

$$\sum_1^6 y_i\, Y_i + \sum_1^6 \rho_i\, Y_i^2 = 0\,.$$

care ne dau pe trei dintre δ_i în funcție de ceilalți trei.

Într-adevăr, avem $\sum x_i Y_i = \sum y_i Y_i$ sau $\sum (x_i Y_i - y_i X_i) = 0$, momentul rezultant față de axa *oz* fiind nul.

VI

Cazul n = 7

Cazul forțelor oricare. Dacă cele șapte puncte sînt date oricum se pot lua arbitrar n-4 = 3 forțe F_i, iar celelalte patru se deduc.

Dacă punctele P_i au coordonatele x_i, y_i, z_i, între forțe avem relațiile

$$\sum \overline{F}_i = 0\,,\quad \sum x_i \overline{F}_i = 0\,,\quad \sum y_i \overline{F}_i = 0\,,\quad \sum z_i \overline{F}_i = 0. \tag{58}$$

Deoarece între F_i, care nu sînt paralele cu un plan, avem patru relații liniare independente, fie

$$\sum \overline{F}_i = 0\,,\quad \sum \xi_i \overline{F}_i = 0\,,\quad \sum \eta_i \overline{F}_i = 0\,,\quad \sum \zeta_i \overline{F}_i = 0\,, \tag{59}$$

rezultă că avem

$$x_i = a_{11}\, \xi_i + a_{12}\, \eta_i + a_{13}\, \zeta_i + a_{14} \text{ etc.}, \tag{60}$$

adică configurațiile punctelor de aplicație se deduc dintr-una din ele printr-o afinitate oarecare.

Presupunem că forțele $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$, $\overline{F}_7$ nu sînt paralele cu un plan. Ecuațiile (58) se vor da pe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$ prin ecuații de forma

$$\overline{F}_i + a_i \overline{F}_5 + b_i \overline{F}_6 + c_i \overline{F}_7 = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{61}$$

Ecuațiile (61) și (58) sînt echivalente, deci rezultă că

$$\sum a_i = \sum b_i = \sum c_i = 1.$$

Dacă luăm pe Ω pe planul $P_2P_3P_4$ și pe $\bar{u}$ normal pe acest plan, ecuația (8) devine

$$\delta_1 \overline{F}_1 + \delta_5 \cdot \overline{F}_5 + \delta_6 \overline{F}_6 + \delta_7 \overline{F}_7 = 0,$$

unde δ_i sînt distanțele punctelor P_1, P_5, P_6, P_7 la planul $P_2P_3P_4$. Avem din

$$\frac{\delta_5}{\delta_1} = a_1\,,\ \frac{\delta_6}{\delta_1} = b_1\,,\ \frac{\delta_7}{\delta_1} = c \quad \text{etc.},$$

adică a_i sînt coordonatele baricentrice ale lui P_5 față de tetraedrul $P_1P_2P_3P_4$, avînd și suma egală cu 1 etc.

Ne propunem să vedem care este biraportul planelor ce trec prin P_1P_2 și cele patru puncte P_3, P_4, P_5, P_6. Ecuațiile acestor plane față de tetraedrul de referință P_1, P_2, P_3, P_4 sînt

$$x_4 = 0,\ x_3 = 0,\ \frac{x_3}{a_3} - \frac{x_4}{a_4} = 0\,,\ \frac{x_3}{b_3} - \frac{x_4}{b_4} = 0\,.$$

Urmează că biraportul lor este dat de tabloul

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{a_3} & \frac{1}{b_3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{a_4} & \frac{1}{b_4} \end{vmatrix} = \frac{b_3}{a_3} : \frac{b_4}{a_4}.$$

Să căutăm de asemenea biraportul planelor ce trec prin (g_7) și axele (g_3), (g_4), (g_5), (g_6) (toate aceste drepte trecînd prin O_1). Vom lua pentru aceasta biraportul axelor vectorilor

$$\overline{F}_7 \times \overline{F}_3,\ \overline{F}_7 \times \overline{F}_4,\ \overline{F}_7 \times \overline{F}_5,\ \overline{F}_7 \times \overline{F}_6.$$

Ținînd seama de relațiile (61), rezultă că

$$\overline{F}_7 \times \overline{F}_3 + a_3 \overline{F}_7 \times \overline{F}_5 + b_3 \overline{F}_7 \times \overline{F}_6 = 0,$$
$$\overline{F}_7 \times \overline{F}_4 + a_4 \overline{F}_7 \times \overline{F}_5 + b_4 \overline{F}_7 \times \overline{F}_6 = 0.$$

Biraportul celor patru plane este deci dat de tabloul

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 1 & 0 \\ b_3 & b_4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{b_3}{a_4} : \frac{b_4}{a_4},$$

adică același ca mai sus.

Pentru a exprima propoziția care rezultă din cele mai sus, să considerăm punctele P_i' la ∞ pe axele (g_i). Avem astfel:

Teorema 9. *În cazul echilibrului astatic pentru $n = 7$, cinci puncte P_i' formează pe conica lor un grup omografic cu fasciculul de cinci plane ce are ca axă dreapta punctelor de indici diferiți și ale cărui plane trec prin punctele P_i de aceiași indici cu P_i' iar șase puncte P_i formează pe cubica lor un grup omografic cu fasciculul de drepte având centrul în punctul P_α' de indice diferit și ale cărui drepte trec prin punctele P_i' de aceiași indici cu cele șase puncte P_i.*

Dacă se dau punctele P_i, putem alege în mod arbitrar direcțiile a patru forțe, fie (g_1), (g_2), (g_3), (g_4). Vom lua de exemplu patru forțe $\overline{\Phi}_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$, pe (g_i), cu suma nulă. Între forțele $\overline{F}_i$ trebuie să avem relația dată de (8), pentru $\bar{u}$ normal pe planul $P_5P_6P_7$ și Ω în acest plan, adică relația

$$\delta_1 \overline{F}_1 + \delta_2 \overline{F}_2 + \delta_3 \overline{F}_3 + \delta_4 \overline{F}_4 = 0.$$

Vom lua deci $\overline{F}_i = \dfrac{\overline{\Phi}_i}{\delta_1}$. Avem astfel date patru forțe, cu una mai mult decît ar fi necesar pentru a le construi și pe celelalte.

Cazuri particulare. Să cercetăm diversele configurații particulare ale cazului $n = 7$.

Dacă patru din punctele P_i sînt coplanare, cele trei forțe de indici diferiți sînt paralele cu un plan. Într-adevăr, fie $P_1, \ldots, P_4$ într-un plan (α); luînd Ω în (α) și $\bar{u}$ normal pe (α), ecuația (8) devine

$$\delta_5 \overline{F}_5 + \delta_6 \overline{F}_6 + \delta_7 \overline{F}_7 = 0,$$

care arată că cele trei forțe de indici diferiți sînt paralele cu un plan. Reciproc, dacă trei forțe sînt paralele cu un plan, punctele de aplicație de indici diferiți sînt coplanare.

Dacă cinci puncte P_i sînt într-un plan (α), forțele de indici diferiți sînt paralele și reciproc.

Dacă trei puncte P_i sînt coliniare, forțele de indici diferiți sînt paralele cu un plan și reciproc.

Dacă patru puncte P_i sînt coliniare, cele trei forţe de indici diferiţi sînt paralele între ele şi reciproc.

Dacă cinci puncte P_i sînt pe o dreaptă (a), celelalte două sînt pe o dreaptă (b) ce taie dreapta (a) iar forţele lor sînt paralele. Dacă (a) şi (b) nu s-ar tăia, forţele aplicate în punctele de pe (b) ar fi nule.

Dacă avem P_1, P_2, P_3 pe o dreaptă (a), P_4, P_5, P_6 pe o dreaptă (b) care nu taie dreapta (a), atunci $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ sînt paralele cu un plan, $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$ cu un alt plan, după cum se vede din ecuaţia (8) luînd pe $\bar{u}$ normal la planul $(a\ P_7)$ şi apoi la $(b\ P_7)$.

Forţa $\overline{F}_7$ este paralelă cu intersecţia celor două plane.

Într-adevăr, dacă luăm pe $\overline{u}$ normal la planul primelor forţe, obţinem din (9),

$$\sum_4^7 (P_i - \Omega)(\overline{F}_i\, \overline{u}) = 0\ ,$$

cu suma coeficienţilor nulă. Dar $P_7 - \Omega$ nu poate fi scos în funcţie de $P_4 - \Omega$, $P_5 - \Omega$ şi $P_6 - \Omega$, deci $(\overline{F}_7\, \overline{u}) = 0$, adică $\overline{F}_7$ este paralel cu planul primelor trei forţe şi la fel cu planul celorlalte trei forţe, adică paralel cu intersecţia lor.

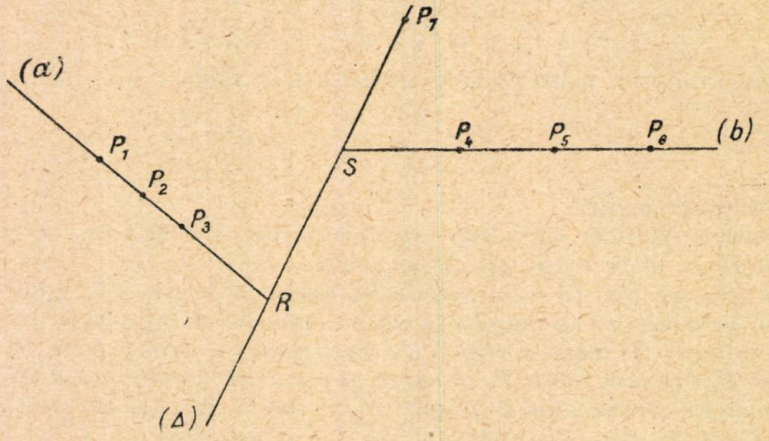


Fig. 8

În plus, fie (Δ) dreapta ce trece prin P_7 şi taie dreptele (a) şi (b) în (R) şi (S).

Biraportul $P_1P_2P_3R$ este egal cu acel al dreptelor (g_1), (g_2), (g_3), (g_7) şi biraportul $P_4P_5P_6S$ este egal cu acel al dreptelor (g_4), (g_5), (g_6), (g_7), cazul acesta reducîndu-se la cazul a două solicitări de cîte patru forţe aplicate în puncte coliniare (fig. 8).

Ne vom opri aici cu analiza acestor cazuri, deoarece din cauza unui număr prea mare de parametri liberi pentru $n > 7$ nu mai avem coeziune prea strînsă între configuraţiile punctelor de aplicaţie şi aceea a forţelor.

О КОНФИГУРАЦИЯХ, ОТНОСЯЩИХСЯ К АСТАТИЧЕСКОМУ РАВНОВЕСИЮ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Настоящая статья разделена на 5 частей. В первой части выводятся 12 известных формул астатического равновесия, которые автор сводит в одну из следующих эквивалентных векториальных формул

$$\sum_1^n \left[(P_i - \Omega)\,\overline{u}\right]\overline{F}_i = 0 \qquad (8)$$

или

$$\sum_{1}^{n}(P_i-\Omega).(\overline{F_i}\,\overline{u})=0, \tag{9}$$

которые должны быть применимы при 2 каких-либо точках Ω и 3 $\overline{u}$ некопланарных векторах и следовательно при любом Ω и любом $\overline{u}$. Эти соотношения влекут за собой и условие $\Sigma\overline{F_i}=0$.

Поместив Ω в барицентре 0 точек P_i, то есть так, чтобы $\Sigma\overline{OP}=0$, констатируем, что если имеем 2 конфигурации точек P_i и Q_i соответственно с барицентрами O и O_1, то получающееся усилие при приложении в P_1 сил $\overline{O_1Q_1}$ и усилие, получающееся при приложении в Q_i сил $\overline{OP_i}$ будут или не будут одновременно в астатическом равновесии. Назовем это теоремой взаимности конфигураций точек P_i и сил $\overline{F_i}$.

В пункте 3 показано, как построить точки P_i при заданных силах $\overline{F_i}$, а в пункте 4, — как построить силы при заданных точках приложения P_i.

Во второй части исследуются случаи, когда $n=1,2,3$.

В третьей части рассматривается случай, когда $n=4$. При любых $\overline{F_i}$ точки P_i смешаны. Когда $\overline{F_i}$ параллельны плоскости, P_i лежат на прямой, а их абсциссы являются коэффициентами линейного соотношения между $\overline{F_i}$. Их двойное соотношение равно двойному соотношению направлений сил $\overline{F_i}$.

Указывается метод построения 4 сил при заданных колинеарных точках P_i. Путем этого метода находим все усилия, за исключением одного фактора пропорциональности.

В пункте 4 даются соотношения расстояний на образующих в параболоиде и углов между образующими, а также и формулы, дающие интенсивности сил, приложенных к 4 образующим, составляющим систему, эквивалентную нулю.

В четвертой части рассматривается случай, когда $n=5$.

При любых $\overline{F_i}$ P_i колинеарны и абсциссы их на прямой суть коэффициенты линейного соотношения между $\overline{F_i}$. Две конфигурации точек P_i связаны аффинностью, а 5 точек P_i образуют гомографическую группу с группой пяти направлений сил на их конусе.

В пункте 1 показывается, что оси g_i сил $\overline{F_i}$ лежат на регулярной поверхности S_3 3-й степени.

В пункте 2 рассматривается случай 5 сил, параллельных плоскости, с точками приложения, лежащими также на прямой. В этом случае показывается, что g_i (направления сил) можно взять произвольно и что интенсивности вообще вполне определены.

В пункте 3 рассматривается общий случай, когда $\overline{F_i}$ параллельны плоскости и P_i копланарны.

Рассматриваются частные случаи, когда две или три силы параллельны между собой.

Показывается, что в общем случае группа из 5 точек P_i на их конической гомографична группе 5 направлений сил $\overline{F_i}$.

Показывается также, что точка приложения, например P_4, имеет по отношению к треугольнику P_1,P_2,P_3 барицентрические координаты,

равные координатам прямой g_5 по отношению к треугольнику Q_1, Q_2, Q_3, причем силы $\overline{F}_i$ равны $\overline{0_1 Q_1}$.

В пункте 4 приводятся 2 метода построений сил при заданных P_i и g_i, удовлетворяющих гомографическому соотношению. И в этом случае $\overline{F}_i$ находится на 5 прямых g_i, принадлежащих какой-либо S_3 (коноид).

Если $\overline{F}_i$ будет скользить по g_i до прямой двойных точек, то получится астатическое усилие вида, указанного в пункте 2.

Далее показывается, как построить поверхность S_3 при заданных g_i, параллельных плоскости α и пересекающих другую прямую (b). При скольжении F_i по g_i до точек пересечения осей g_i с плоскостью, касательной к S_3, получаем астатическое усилие, подобное описанному в пункте 3.

Автор указывает, что 2 конфигурации точек получаются одна из другой посредством аффинности.

В пункте 5 определяются соотношения расстояний на образующих между 2 коническими поверхностями S_3 и интенсивности сил, а также и соотношения, дающие интенсивности сил в зависимости от углов между образующими и конфигурацией точек P_i. Таким образом получаются соотношения геометрических элементов поверхности S_3.

В пункте 6 дано векториальное соотношение, показывающее условие гомографии между направлениями (φ_i) сил и конфигурацию точек P_i, а именно: если T_{ik} представляют собой алгебраические площади треугольников, образуемых точками с показателями, отличающимися от i и k, взятыми в восходящем порядке, то имеем

$$\sum_{(-1)}^{i+k} T_{ik} (P_i - P_k) \operatorname{tg} \varphi_i \operatorname{tg} \varphi_k = 0 \quad c \quad i < k.$$

Это соотношение удовлетворяется, даже если φ_i увеличиваются на один и тот же угол α.

В пятой части исследуется случай, когда $n = 6$. В пункте 1 рассматривается случай, относящийся к любым силам, когда P_i находится на плоскости и обратно. Конфигурации точек P_i получаются одна из другой посредством аффинности.

Если обозначить через P_i' точки в ∞ на осях g_i сил $\overline{F}_i$, то в случае астатического равновесия 5 точек P_i образуют на их конической гомографическую группу с пучком, проектирующим P_i' из 6-й точки P_α'.

В пункте 2 указывается метод построения сил при заданных точках P_i, путем использования барицентрических координат 3 точек P_i относительно треугольника остальных 3 точек.

Если даны 4 направления сил и точки P_i, можно построить силы.

Показывается, что 6 сил в равновесии можно заставить скользить лишь до известной плоскости, для того чтобы получить астатическое усилие.

Далее исследуются частные случаи, а именно:

Если 3 точки P_i колинеарны, то силы с различными показателями параллельны плоскости и обратно.

Если 4 точки P_i колинеарные, то силы с различными показателями параллельны между собой и обратно.

Если 3 силы параллельны, то точки с различными показателями смешаны.

На основании этих соображений приходим к теореме: если имеем 2 плоских прямоугольника с вершинами P_i, P_i', в которых 3 колинеарных вершины одного соответствуют 3 неколинеарным вершинам другого, то прямые P_i, P_i' принадлежат линейному комплексу.

В пункте 3 исследуется случай сил $\overline{F}_i$, параллельных плоскости, причем и в этом случае 2 конфигурации точек приложения (уже неконпланарных) получаются одна из другой посредством аффинности.

Автор формулирует затем теорему: 6 точек образуют на своей кубической гомографическую группу с 6 направлениями сил.

При 6 заданных точках можно произвольно выбрать направления 3 сил, которые затем вполне определяются, за исключением одного фактора.

Далее исследуются различные частные случаи, а именно: 3 силы, параллельные между собой, затем параллельные $\overline{F}_1$ с F_2 и F_3 с F_4 и случай 3 пар попарно параллельных.

В пункте 4 показывается, что существует ∞^3 скольжений 6 сил в равновесии, параллельных плоскости, при которых усилие должно быть астатическим.

В пятой части исследуется случай, когда $n = 7$ и различные частные случаи.

SUR LES CONFIGURATIONS RELATIVES À L'ÉQUILIBRE ASTATIQUE

(RÉSUMÉ)

Cet article est divisé en cinq parties. Dans la première partie, l'Auteur déduit les formules déjà connues de l'équilibre astatique, au nombre de 12, qu'il condense en une seule des formules vectorielles équivalentes suivantes

$$\sum_1^n [(P_i - \Omega)\,\bar{u}]\,\overline{F}_i = 0 \quad (8) \quad \text{ou} \quad \sum_1^n (P_i - \Omega).(\overline{F}_i \bar{u}) = 0 \qquad (9)$$

qui doivent avoir lieu pour 2 points Ω quelconques et 3 vecteurs $\bar{u}$ non coplanaires et, par conséquent, pour tout Ω et tout $\bar{u}$. Ces relations entraînent la condition $\sum \overline{F}_i = 0$.

En prenant Ω au barycentre O des points P_i, donc de façon que $\sum \overline{OP_i} = 0$, il résulte que si l'on a deux configurations de points P_i et Q_i aux barycentres O respectivement O_1, la sollicitation obtenue en appliquant les forces $\overline{O_1 Q_i}$ en P_i et celle obtenue en appliquant les forces $\overline{OP_i}$ en Q_i sont ou ne sont pas en équilibre astatique, en même temps. L'Auteur appelle ceci le théorème de la réciprocité des configurations des points P_i et des forces $\overline{F}_i$.

Au 3e point, l'Auteur montre la manière de construire les points P_i lorsque les forces $\overline{F}_i$ sont données et au 4e point, comment on construit les forces lorsque les points d'application P_i sont donnés. Dans la seconde partie, il traite les cas $n = 1, 2, 3$.

Dans la IIIe partie du travail, il traite du cas $n = 4$. Lorsque $\overline{F}_i$ sont quelconques, les points P_i se confondent. Lorsque $\overline{F}_i$ sont parallèles à un plan, P_i se trouvent sur une droite et leurs abscisses sont les coefficients d'une relation linéaire entre $\overline{F}_i$. Leur birapport est égal à celui des directions des forces $\overline{F}_i$.

On présente une méthode pour construire les 4 forces, lorsque les points colinéaires P_i sont donnés. Cette méthode permet de trouver toutes les sollicitations, en faisant abstraction d'un facteur de proportionalité.

Au 4e point, on donne des relations entre les distances sur les génératrices dans un paraboloïde et les angles formés par les génératrices, ainsi que les formules donnant les intensités des forces appliquées sur 4 génératrices, formant un système équivalent à zéro.

Dans la IVe partie, on traite du cas $n = 5$.

Si $\overline{F}_i$ sont quelconques, P_i sont colinéaires et leurs abscisses sur leur droite sont les coefficients d'une relation linéaire entre $\overline{F}_i$. Deux configurations des points sont reliées par une affinité et les 5 points P_i forment un groupe homographique du groupe des 5 directions des forces sur leur cône.

Au même 1er point, on montre que les axes g_i des forces $\overline{F}_i$ se trouvent sur une surface S_3 réglée, du 3e degré.

Au 2e point, on considère le cas de 5 forces parallèles à un plan, aux points d'application se trouvant également sur une droite. On montre que dans ce cas, on peut prendre g_i (les directions des forces) arbitrairement et les intensités sont généralement bien déterminées.

Au 3e point, on considère le cas général où $\overline{F}_i$ sont parallèles à un plan et P_i sont coplanaires.

On considère les cas particuliers lorsque 2 ou 3 forces sont parallèles entre elles.

On démontre que le groupe de 5 points P_i sur leur conique est, dans le cas général, homographique avec le groupe de 5 directions des forces $\overline{F}_i$.

On démontre encore qu'un point d'application, P_4 par exemple, a — par rapport au triangle $P_1P_2P_3$ — des coordonnées barycentriques égales à celles de la droite g_5, par rapport au triangle $Q_1Q_2Q_3$, les forces $\overline{F}_i$ étant égales à $\overline{O_1Q_i}$.

On présente, au 4e point, deux méthodes pour construire les forces, lorsque P_i ou g_i sont donnés, satisfaisant à la relation d'homographie. Dans ce cas aussi, $\overline{F}_i$ se trouvent sur 5 droites g_i qui appartiennent à un S_3 (conoïde).

Si l'on fait glisser $\overline{F}_i$ sur g_i jusqu'à la droite des points doubles, on obtient une sollicitation astatique de la forme donnée au point 2.

On montre ensuite comment construire une surface S_3 lorsque g_i sont donnés parallèles à un plan α et coupant une autre droite (b). Lorsqu'on fait glisser $\overline{F}_i$ sur g_i jusqu'aux points d'intersection des axes g_i avec un plan tangent à S_3, on obtient une sollicitation astatique du genre décrit au point 3.

On démontre enfin que deux configurations des points P_i sont obtenues, l'une découlant de l'autre, par une affinité.

Au 5e point, on obtient des relations entre les distances sur les génératrices, entre deux coniques de la surface S_3 et les intensités des forces ainsi que des relations donnant les intensités de forces en fonction des angles formés entre les génératrices et la configuration des points P_i. On peut obtenir ainsi des relations entre les éléments géométriques de la surface S_3.

Au 6e point, l'Auteur donne une relation vectorielle indiquant la condition d'homographie entre les directions (φ_i) des forces et la configuration des points

P_i, à savoir, si T_{ik} sont les aires algébriques des triangles formés avec les points d'indices différents de i et de k pris en ordre croissant, on a

$$\sum_{(-1)}^{i+k} T_{ik} (P_i - P_k) \operatorname{tg} \varphi_i \operatorname{tg} \varphi_k = \vec{0} \text{ avec } i < k.$$

Cette relation est satisfaite même si φ_i croissent d'un même angle α.

Dans la Ve partie, l'Auteur traite du cas $n = 6$. Au 1er point, il considère le cas des forces quelconques, lorsque P_i se trouve sur un plan et réciproquement. Les configurations des points P_i s'obtiennent, l'une découlant de l'autre, par une affinité.

Si l'on note P_i' les points à ∞ se trouvant sur les axes g_i des forces $\overline{F}_i$, dans le cas de l'équilibre astatique, 5 points P_i forment sur leur conique un groupe homographique avec le faisceau qui projette P_i à partir du 6e point P_α'.

Au 2e point, on présente une méthode de construire les forces lorsque les points P_i sont donnés, en utilisant les coordonnées barycentriques de 3 points P_i par rapport au triangle des trois autres points.

Lorsque 4 directions des forces ainsi que les points P_i sont donnés, on peut construire les forces.

On montre que pour obtenir une sollicitation astatique on ne peut faire glisser 6 forces en équilibre que jusqu'à un certain plan.

On examine ensuite les cas particuliers, à savoir:

Si 3 points P_i sont colinéaires, les forces à indices différents sont parallèles à un plan et réciproquement.

Si 4 points P_i sont colinéaires, les forces à indices différents sont parallèles entre elles et réciproquement.

Si 3 forces sont parallèles, les points à indices différents se confondent.

S'appuyant sur ces considérations, l'Auteur aboutit au théorème suivant: si l'on a deux quadrilatères plans aux sommets P_i, P_i', tels qu'à 3 sommets colinéaires de l'un des quadrilatères correspondent 3 sommets non colinéaires dans l'autres, alors les droites P_i, P_i', appartiennent à un complexe linéaire.

Au 3e point on étudie le cas des forces F_i parallèles à un plan — dans ce cas aussi, deux configurations des points d'application (qui ne sont plus coplanaires) s'obtiennent l'une découlant de l'autre par une affinité.

On présente ensuite le théorème: les 6 points forment sur leur cubique un groupe homographique avec les 6 directions des forces.

Lorsque les 6 points sont donnés, on peut choisir arbitrairement les directions des 3 forces; elles en résultent ensuite de façon bien déterminée, en faisant abstraction d'un facteur.

On étudie ensuite les différents cas particuliers: 3 forces parallèles entre elles, puis $\overline{F}_1$ parallèles à $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ à $\overline{F}_4$ ainsi que le cas de 3 paires parallèles, deux par deux.

Au 4e point, on démontre qu'il y a ∞^3 glissements de 6 forces en équilibre, parallèles à un plan, telles que la sollicitation soit astatique.

Dans la VIe partie, on étudie le cas $n = 7$ ainsi que différents cas particuliers.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Darboux, *Note V: Sur l'équilibre astatique*, în M. Despeyrons, *Cours de Mécanique*. A. Herman, Paris, 1884, t. I.
2. Paul Appell, *Traité de Mécanique rationelle*. Gauthier-Villars, Paris, 1919.
3. Th. Reye, *Die Geometrie der Lage*. Alfred Kröner, Stuttgart, 1909, ed. I-a, t. I.

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POȘTALE,
PRIN FACTORII POȘTALI ȘI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ȘI INSTITUȚII

F 762

KAT

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

R

TAUSCH - CMEHA

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Országos Műszaki Könyvtár LISZABON

3-4

ANUL VI

IULIE—DECEMBRIE 1955

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

3-4

ANUL VI

IULIE–DECEMBRIE 1955

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN S. STOILOV — Redactor responsabil;
ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — Redactor adjunct;
GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; T. GANEA; A. HALANAY

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul VI, nr. 3—4 Iulie—decembrie 1955

SUMAR

Pag.

ŞERBAN GHEORGHIU, Cîteva probleme relative la diviziunea unui segment prin puncte luate la întîmplare 243
ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, Contribuţii la studiul mişcărilor în medii poroase.. 273
ROMULUS CRISTESCU, Operatorul-produs în spaţiile liniare semiordonate şi aplicaţiile sale 357
P. MOCANU, Spaţii parţial proiective 495
CORNELIU CONSTANTINESCU, Cîteva aplicaţii ale principiului metricii hiperbolice 529
M. N. ROŞCULEŢ, Algebre infinite asociate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordin oarecare 567
S. ZAIDMAN, Teoreme calitative pentru ecuaţii cu derivate parţiale..... 645

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome VI, n°s 3–4 Juillet–décembre 1955

SOMMAIRE

Page

ȘERBAN GHEORGHIU, Quelques problèmes concernant la division d'un segment par des points pris au hasard 243

ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, Contribution à l'étude des mouvements dans des milieux poreux 273

ROMULUS CRISTESCU, L'opérateur-produit dans les espaces linéaires semi-ordonnés et ses applications 357

P. MOCANU, Espaces partiellement projectifs 495

CORNELIU CONSTANTINESCU, Quelques applications du principe de la métrique hyperbolique 529

M. N. ROȘCULEȚ, Algèbres infinies associées à des équations aux dérivées partielles, homogènes, aux coefficients constants d'ordre quelconque.. 567

S. ZAIDMAN, Théorèmes qualitatifs pour des équations aux dérivées partielles 645

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том VI, № 3—4 Июль—декабрь 1955

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Ш. ГЕОРГИУ, Несколько вопросов относительно деления отрезка взятыми наугад точками 243
Ш. ГЕОРГИЦЭ, К исследованию движений в пористых средах 273
Р. КРИСТЕСКУ, Оператор-произведения в полуупорядоченных линейных пространствах и его применение 357
П. МОКАНУ, Частично проективные пространства 495
К. КОНСТАНТИНЕСКУ, Несколько применений принципа гиперболической метрики 529
М. РОШКУЛЕЦ, Бесконечные алгебры, ассоциированные с однородными уравнениями в частных производных любого порядка с постоянными коэффициентами 567
С. ЗАЙДМАН, Качественные теоремы для уравнений с частными производными 645

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

CÎTEVA PROBLEME RELATIVE LA DIVIZIUNEA UNUI SEGMENT PRIN PUNCTE LUATE LA ÎNTÎMPLARE *)

DE

ŞERBAN GHEORGHIU

INTRODUCERE

§ 1. În această lucrare ne propunem să studiem cîteva probleme relative la repartiţia unui număr de puncte, luate la întîmplare, pe un segment dat. La început vom studia cazul în care punctele considerate sînt în număr finit şi sînt situate pe segmentul [0,1]. Vom trece apoi la cazul în care punctele sînt în număr infinit şi sînt uniform repartizate pe o semidreaptă.

În această lucrare admitem permanent că legea de repartiţie a punctelor este legea omogenă. Această lege de repartiţie intervine destul de frecvent în aplicaţii; astfel, în aplicaţiile calculului probabilităţilor la aritmetică, ca şi în calculele numerice. Găsim, de exemplu, în tablele de logaritmi, că log $2 = 0{,}30103$. În realitate log 2 este un număr iraţional, iar numărul ce figurează în table drept valoare a acestui logaritm este cel mai apropiat număr cu cinci zecimale. În imposibilitatea de a efectua cercetări amănunţite, trebuie să admitem că diferenţa dintre valoarea exactă şi valoarea din table nu este altceva decît o variabilă aleatorie omogenă.

De asemenea, studiul anumitor fenomene fizice — în special emisiunea particulelor α de radium—duce la probleme de probabilităţi geometrice, în care este necesar să se admită legea omogenă.

Problemele care formează obiectul lucrării de faţă pot constitui o introducere utilă la studiul metodelor statistice aplicate la controlul calitativ al producţiei în serie. După cum este bine cunoscut, controlul calitativ al producţiei, fie în timpul procesului de fabricaţie, fie la recepţionarea produselor finite, se efectuează pe bază de mostre (sau selecţiuni). Se măsoară un anumit sau anumite dimensiuni (uneori chiar însuşiri) ale exemplarelor din selecţiune şi, din distribuţia măsurilor astfel obţinute, se deduce fie stabilitatea sau instabilitatee procesului de fabricaţie în curs, fie, dacă produsele finite ce formează lotul supus operaţiilor de recepţie satisfac sau nu normelor şi toleranţelor prescrise. Pentru aceste aplicaţii se admite în general că legea de repartiţie a diferitelor abateri constatate prin măsurători este legea lui Gauss. Problemele ce se studiază sînt însă cu totul asemănătoare problemelor ce formează obiectul acestei lucrări. În asemenea condiţii, rezultatele obţinute aici pot fi utilizate direct —

*) Lucrare prezentată Institutului de matematică în şedinţa din 25 mai 1955.

— fără modificări — în toate cazurile în care este admisibil să se substituie legea omogenă de probabilităţi, legii lui Gauss.

Pentru determinarea funcţiilor de frecvenţă (densităţi de probabilităţi) şi a funcţiilor de repartiţie ale diferitelor variabile aleatorii pe care le considerăm, folosim funcţia caracteristică în sensul lui Poincaré şi nu pe aceea în sensul lui Cauchy — P. Lévy. Astfel X fiind o variabilă aleatorie iar $F(x)$ funcţia de repartiţie corespunzătoare, sau

$$F(x) = \text{Pr.}\ \{X < x\},$$

funcţia caracteristică pe care o folosim este

$$\Phi(t) = E(e^{tx}) = \int_{-8}^{+\infty} e^{tx}\, dF(x)$$

şi nu funcţia

$$\varphi(t) = E(e^{txi}).$$

Se poate trece de altminteri de la o formă a funcţiei caracteristice la cealaltă, printr-o simplă rotaţie a planului variabilei t. Folosim însă funcţia caracteristică sub forma indicată de H. Poincaré, deoarece funcţiile caracteristice ce intervin în lucrarea de faţă, date sub această formă, pot fi exprimate cu uşurinţă prin anumite diferenţe divizate.

Pentru determinarea funcţiilor de frecvenţă (densităţi de probabilităţi) evităm să întrebuinţăm metoda clasică, cu ajutorul valorilor finite în sensul lui Cauchy ale anumitor integrale. Aceste funcţii le determinăm printr-o metodă directă ce revine la o simplă identificare. Astfel, cu excepţia funcţiei de frecvenţe de la paragraful 4, pentru obţinerea căreia întrebuinţăm metoda clasică, toate celelalte funcţii de frecvenţă le determinăm exprimînd funcţiile caracteristice respective $\Phi(t)$ prin integrale de forma

$$\Phi(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, e^{tx}\, dx,$$

α şi β fiind independente de t. În acest caz, funcţia de frecvenţe este în intervalul $[\alpha, \beta]$ egală chiar cu $f(x)$ şi este nulă în afara acestui interval. Demonstraţia acestei concluzii este imediată. Funcţia caracteristică relativă la funcţia de frecvenţe $f(x)$ este evident $\Phi(t)$. Pe de altă parte, se ştie că dacă $|f|$ este integrabilă în orice interval finit şi avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty,$$

transformata Fourier relativă la $f(x)$ şi reciproca acesteia sînt valabile [1]*). Pentru cazurile ce sînt considerate în această lucrare, funcţia $f(x)$ se reduce, în anumite intervale finite, la anumite polinoame, iar în afara acestor intervale se anulează. Transformata Fourier îi este, prin urmare, aplicabilă, astfel că pornind de la funcţia caracteristică $\Phi(t)$, obţinem *o singură* funcţie de frecvenţe, $f(x)$.

*) p. 100—104.

GENERALITĂȚI

§ 2. Începem prin a considera cazul în care punctele se găsesc pe segmentul [0,1]. Admitem că probabilitatea ca abscisa unui punct luat la întîmplare pe acest segment, să fie cuprinsă între x și $x + dx$, este egală cu dx. Rezultă că dacă se iau n puncte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de abscise respectiv $x_1, x_2, \ldots, x_n$ poziția fiecăruia din aceste puncte fiind independentă de a celorlalte $n - 1$, funcția de repartiție $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ relativă la configurația formată, este definită prin relația

$$dF = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{1}$$

Ordonăm punctele considerate în ordinea nedescrescătoare a absciselor lor adică

$$0 \leqq x_1^* \leqq x_2^* \leqq \ldots \leqq x_n^* \leqq 1.$$

După această operație, relația (1) devine

$$dF = n!\, dx_1^*\, dx_2^* \ldots dx_n^*.$$

Punem

$$u_1 = x_1^*,\ u_2 = x_2^* - x_1^*, \ldots,\ u_n = x_n^* - x_{n-1}^*$$

și

$$u_{n+1} = 1 - x_n^*.$$

Variabilele $u_1, u_2, \ldots u_{n+1}$ sînt toate pozitive și avem

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1} = 1.$$

Deoarece determinantul funcțional $\dfrac{D(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$ este egal cu 1, rezultă

$$dF = n!\, du_1\, du_2 \ldots du_n.$$

Funcția caracteristică Φ corespunzătoare funcției de repartiție F este dată de relația

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = n! \int \ldots \int e^{t_1 x_1 + t_2 \ldots + x_2 + t_n x_n}\, du_1\, du_2 \ldots du_n \tag{2}$$

unde membrul al doilea conține semnul $\int$ de n ori, iar integrala multiplă este calculată pentru domeniul

$$0 \leqq u_1,\ 0 \leqq u_2, \ldots, 0 \leqq u_n,$$

$$u_1 + u_2 \ldots + u_n \leqq 1.$$

Aplicînd însă funcției e^u formula binecunoscută — Hermite-Genocchi (citat după [2] *)) — obținem

$$\int \ldots \int e^{t_1 u_1 + t_2 u_2 + \ldots + t_{n+1} u_{n+1}}\, du_1\, du_2 \ldots du_n = [t_1\, t_2 \ldots t_{n+1}]$$

*) p. 50.

integrala n -uplă fiind calculată pentru domeniul

$$0 \leqq u_1, \quad 0 \leqq u_2, \ldots, 0 \leqq u_{n+1},$$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1} = 1,$$

iar simbolul $[t_1 t_2 \ldots t_{n+1}]$ exprimînd diferența divizată de ordinul n a funcției e^u, argumentele (nodurile) fiind $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$. În asemenea condiții funcția caracteristică a distribuției de puncte considerată, devine

$$\Phi(t_1, t_2 \ldots, t_n) = n! \, [t_1 t_2 \ldots t_n 0]. \tag{3}$$

§ 3. Considerăm variabila aleatorie S definită prin expresia liniară

$$S = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{n+1} u_{n+1}, \tag{4}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ sînt $n+1$ constante arbitrare. Funcția caracteristică relativă la această variabilă este

$$\Phi_s(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}; t) = n! \int \ldots \int e^{(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{n+1} u_{n+1}) t} \, du_1 \, du_2 \ldots du_n,$$

integrala multiplă fiind calculată pentru aceleași domeniu ca integrala de la (2). Rezultă

$$\Phi_s(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}; t) = n! \, [\lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_{n+1} t].$$

După cum se știe, diferența divizată $[z_0 z_1 \ldots z_n]$ a unei funcții $\Omega(z)$ și pentru nodurile $z_0, z_1, \ldots, z_n$ poate fi scrisă sub diferite forme. Dintre acestea, în cele ce urmează, folosim una sau alta din următoarele două expresii — sau exprimată cu ajutorul integralei lui Cauchy [2] *)

$$[z_0 z_1 \ldots z_n] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Omega(z) \, dz}{(z - z_0)(z - z_1) \ldots (z - z_n)}$$

integrala fiind calculată după un contur simplu C care conține în interior punctele $z_0, z_1, \ldots z_n$ iar funcția $\Omega(z)$ este holomorfă atît în interior, cît și pe contur.

Sau [2] **), în cazul cînd punctele $z_0, z_1, \ldots, z_n$ sînt distincte,

$$[z_0 z_1 \ldots z_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Omega(z_k)}{P'_{n+1}(z_k)},$$

unde

$$P_{n+1}(z) = (z - z_0)(z - z_1) \ldots (z - z_n);$$

în particular pentru $\Omega(z) = e^z$, punînd

$$P_{n+1}(z) = (z - \lambda_1 t)(z - \lambda_2 t) \ldots (z - \lambda_{n+1} t)$$

obținem

$$\Phi_s(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}; t) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{e^z \, dz}{P_{n+1}(z)}, \tag{5}$$

*) p. 55.
**) p. 17.

unde conturul C conține în interior punctele $\lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_{n+1} t$ și

$$\Phi_s(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}; t) = n! \sum_{k=1}^{n+1} \frac{e^{\lambda_k t}}{P'_{n+1}(\lambda_k t)}. \tag{6}$$

În cazul cînd două sau mai multe dintre constantele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ sînt egale între ele, expresia (6) a funcției caracteristice $\Phi_s(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}; t)$ trebuie modificată. Pentru a evita asemenea modificări, în cele ce urmează folosim aproape exclusiv relația (5).

PROBLEME DE PRIMA SPEȚĂ. CAZURI PARTICULARE

§ 4. Începem prin a considera două cazuri particulare, care, pe de o parte ne sînt utile pentru a înlesni expunerea ce urmează, iar pe de alta se întîlnesc frecvent în aplicații. Astfel, punînd $\lambda_k = 1$ și $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{k-1} = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$, se obține din (5) funcția caracteristică a variabilei u_k. Însă, Φ_s fiind simetrică în raport cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ rezultă că *variabilele aleatorii* $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ *au aceeași funcție caracteristică și prin urmare și aceeași funcție de repartiție.*

Funcția caracteristică, comună acestor variabile, $\Phi_{1,n}(t)$, este

$$\Phi_{1,n}(t) = \Phi_s(1, 0, \ldots, 0; t) = \Phi_s(0, 1, 0, \ldots, 0; t) = \ldots = \Phi_s(0, 0, \ldots, 1; t) =$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{e^z\, dz}{z^n (z - t)},$$

$$\ldots \quad \Phi_{1,n}(t) = \frac{n!}{t^n} \left[e^t - 1 - \frac{t}{1!} - \ldots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right].$$

În particular, valoarea medie și abaterea medie pătratică a variabilelor u_k sînt

$$E(u_k) = \frac{1}{n+1}$$

și

$$D^2(u_k) = \frac{n}{(n+1)(n+2)}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Funcția de frecvență (densitate de probabilități) $f_{1,n}(x)$ corespunzătoare funcției caracteristice $\Phi_{1,n}(t)$ este

$$f_{1,n}(x) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{1,n}(it)\, e^{-ixt}\, dt,$$

simbolul v.p. exprimă că se calculează valoarea principală în sensul lui Cauchy. Punem

$$p_n(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)}.$$

Cu aceste notaţii, $f_{1,n}(x)$ devine

$$f_{1,n}(x) = \frac{n!}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_n(it)}{(it)^n} e^{-ixt}\, dt$$

şi observînd că

$$p'_{n+1}(x) = p_n(x),$$

se obţine relaţia de recurenţă

$$f_{1,n}(x) = \frac{n}{n-1}(1-x) f_{1,n-1}(x)$$

şi, mai departe,

$$f_{1,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0 \text{ şi } x \geqq 1 \\ n(1-x)^{n-1} & \text{pentru } 0 \leqq x \leqq 1. \end{cases} \tag{7}$$

Funcţia de repartiţie $F_{1,n}(x) = \text{Pr.}\{u_k < x\}$ este definită pentru $0 \leqq x \leqq 1$ prin egalitatea

$$F_{1,n}(x) = n\int_0^x (1-x)^{n-1}\, dx = 1 - (1-x)^n, \tag{8}$$

iar pentru $x < 0$ avem $F_{1,n}(x) = 0$ şi pentru $x \geqq 1$, $F_{1,n}(x) = 1$.

§ 5. Ca verificare ne propunem a regăsi funcţia de repartiţie $F_{1,n}(x)$. Considerăm pentru aceasta pe segmentul [0,1] punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de abscise respectiv $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Admitem că aceste abscise sînt ordonate nedescrescător adică

$$0 \leqq x_1^* \leqq x_2^* \leqq \ldots \leqq x_n^* \leqq 1.$$

Punem, ca mai sus,

$$x_1^* = u_1,\ x_2^* = u_1 + u_2, \ldots,\ x_n^* = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

$$u_{n+1} = 1 - u_1 - u_2 - \ldots - u_n,$$

şi căutăm probabilitatea $W_{k,k-1}(x)$ ca evenimentul $E_{k,k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$, care constă în aceea că diferenţa $x_k^* - x_{k-1}^* = u_k$ este mai mică decît x, să fie realizat. Evenimentul $E_{k,k-1}$ poate fi produs în două moduri diferite, incompatibile între ele; sau avem $x_1^* < x$, $x_2^* < x, \ldots x_k^* < x$, sau x_k^* este cuprins între t şi $t + dt$, unde $t > x$ şi cel puţin una din abscisele $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{k-1}^*$ sînt cuprinse în intervalul $[t - x, t]$. Primului mod îi corespunde densitatea de probabilităţi

$$n\binom{n-1}{n-k}(1-x)^{n-k} x^{k-1},$$

iar celui de-al doilea, funcţia de repartiţie

$$n\binom{n-1}{n-k}\int_x^1 (1-t)^{n-k} \cdot t^{k-1}\left[1 - \frac{(t-x)^{k-1}}{t^{k-1}}\right] dt.$$

Se obține astfel că densitatea de probabilități a evenimentului $E_{k,k-1}$ este funcția $f_{1,n}(x)$ găsită mai sus.

Analog, se obține că densitatea de probabilități pentru $x_1^* = u_1$ este: $n(1-x)^{n-1}$.

De asemenea, funcția de repartiție pentru $u_{n+1} = 1 - x_n^*$ este $1-(1-x)^n$, astfel că regăsim că variabilele aleatorii $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ au aceeași lege de probabilitate, rezultat care apriori nu este evident.

§ 6. Mai general, ne propunem a găsi funcția caracteristică, funcția de frecvențe și funcția de repartiție relative la suma s_k a k dintre variabilele $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$. Aceste variabile avînd toate aceeași lege de probabilitate, este evident că nu este necesar a se preciza indicii celor k variabile ce intervin în suma pe care o studiem.

Pentru a se obține funcția caracteristică $\Phi_{k,n}(t)$ relativă la suma s_k, înlocuim în expresia (5) a funcției Φ_s pe k dintre constantele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ prin 1, iar pe celelalte $n+1-k$, prin 0. Obținem

$$\Phi_{k,n}(t) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{e^z\,dz}{z^{n+1-k}(z-t)^k}. \tag{9}$$

Deoarece pentru $\left|\frac{t}{x}\right| < 1$ avem

$$\frac{e^z}{z^{n+1}}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{-k} = \frac{e^z}{z^{n+1}}\left[1-\binom{-k}{1}\frac{t}{z}+\binom{-k}{2}\frac{t^2}{z^2}+\ldots\right],$$

punînd

$$\Phi_{k,n}(t) = m_0 + \frac{m_1}{1!}t + \frac{m_2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{m_j}{j!}t^j + \ldots$$

rezultă că momentele variabilei aleatorii S_k sînt

$$m_0 = 1,\ m_1 = \frac{k}{n+1},\ m_2 = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}, \ldots, m_j = \\ = \frac{k(k+1)\ldots(k+j-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+j)} \text{ etc.} \tag{10}$$

În particular

$$E(s_k) = \frac{k}{n+1} \quad \text{și} \quad D^2(s_k) = m_2 - m_1^2 = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)}. \tag{11}$$

Pentru $k = n+1-2\nu$ printre sumele s_k corespunzătoare se găsește și $x^*_{n+1-\nu} - x^*_\nu = u_{\nu+1} + u_{\nu+2} + \ldots + u_{n+1-\nu}$ adică diferența dintre cea de-a $\nu - a$ abscisă de sus și cea de-a $\nu - a$ abscisă de jos. Mai particular încă, pentru $\nu = 1$, deci $k = n-1$, obținem amplitudinea selecțiunii formate cu abscisele celor n puncte considerate, adică

$$w = x_n^* - x_1^* = u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Valorile (11) obţinute pentru $E(S_k)$ şi $D^2(s_k)$ coincid cu valorile cunoscute pentru elementele analoge relative diferenţei $x^*_{n+1-\nu} - x^*_\nu$. [3] *).

§ 7. Cu ajutorul relaţiei (9), funcţia $\Phi_{k,n}(t)$ poate fi uşor calculată. Se obţine.

$$\Phi_{k,n}(t) = \frac{n!e^t}{t^n}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{-n-1+k}{j}\frac{t^{k-j-1}}{(k-j-1)!} + \\ + \frac{(-1)^k n!}{t^n}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\binom{-k}{j}\frac{t^{n-k-j}}{(n-k-j)!} \tag{12}$$

Fie

$$\psi_{k,n}(t) = \frac{t^k}{n!}\Phi_{k,n}(t).$$

Expresia (12) obţinută pentru $\Phi_{k,n}(t)$ ne arată că funcţia $\psi_{k,n}(t)$ este soluţie a unei ecuaţii diferenţiale de forma

$$\left(\frac{d}{dt}-1\right)^k\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-n}\psi = 1,$$

fapt, de altminteri, care poate fi verificat cu uşurinţă folosind relaţia (9). Într-adevăr, schimbînd în relaţia (9) pe z prin tz obţinem

$$\Phi_{n,k}(t) = \frac{n!}{2\pi t^n i}\int_{C'}\frac{e^{tz}\,dz}{z^{n+1-k}(z-1)^k},$$

conturul C' conţinînd în interior punctele 0 şi 1. Rezultă

$$\psi_{k,n}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{e^{tz}\,dz}{z^{n+1-k}(z-1)^k}.$$

Derivînd, obţinem

$$\psi^{(j)}_{k,n}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{z^j e^{zt}\,dz}{z^{n+1-k}(z-1)^k},$$

$$\left(\frac{d}{dt}-1\right)^k\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-k}\psi_{k,n}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^{tz}\,dz}{z} = 1. \tag{13}$$

Rezultă de asemenea

$$\psi_{k,n}(0) = \psi'_{k,n}(0) = \ldots = \psi^{(n-1)}_{k,n}(0) = 0.$$

Punem, acum

$$y = \psi^{(n-k)}_{k,n}(t).$$

Funcţia y este integrala ecuaţiei $\left(\frac{d}{dt}-1\right)^k y = 1$, care este nulă, împreună cu primele $k-1$ derivate, pentru $t=0$. Se găseşte însă uşor că integrala acestei ecuaţii, satisfăcînd condiţiilor iniţiale date, este dată de relaţia

$$y(t) = e^t\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + (-1)^{k-1}\right] + (-1)^k.$$

*) p. 372.

Rezultă

$$\psi_{k,n}(t) = \frac{1}{(n-k-1)!}\int_0^t (t-u)^{n-k-1}\, y(u)\, du,$$

însă din cauză că

$$y'(u) = e^u \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{și} \quad y(0) = 0,$$

se obține

$$\psi_{k,n}(t) = \frac{1}{(n-k)!\,(k-1)!}\int_0^t u^{k-1}(t-u)^{n-k}\, e^u\, du.$$

Revenind la funcția $\Phi_{k,n}(t)$ și schimbînd pe u în tu astfel ca limitele intervalului de integrare să devină 0 și 1, obținem

$$\Phi_{k,n}(t) = \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}\int_0^1 u^{k-1}(1-u)^{n-k}\, e^{tu} du. \tag{14}$$

Momentele m_j ($j = 0, 1, 2, \ldots$) calculate mai sus și date prin relațiile (10), pot fi cu ușurință regăsite. Astfel, dezvoltînd pe e^{tu} după puterile lui tu, obținem

$$m_j = \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}\int_0^1 u^{k+j-1}(1-u)^{n-k} du =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} \cdot \frac{\Gamma(k+j)\,\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+j+1)}.$$

Din expresia lui $\Phi_{k,n}(t)$, dată de relația (14), se citește imediat funcția de frecvențe $f_{k,n}(x)$ a variabilei aleatorii s_k; este funcția care sub semnul $\int$ multiplică exponențiala e^{tu} sau

$$f_{k,n}(x) = \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}\, x^{k-1}(1-x)^{n-k}, \text{ pentru } 0 \leqq x \leqq 1. \tag{15}$$

§ 8. Rezultatul obținut poate fi ușor verificat. Pentru aceasta considerăm

$$s_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k = x_k\ ^*,$$

iar densitatea de probabilități $f_{k,n}(x)$ a acestei variabile aleatorii este

$$f_{k,n}(x) = n.\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

și regăsim astfel funcția $f_{k,n}(x)$, definită prin egalitatea (15).

§ 9. Cu acestea funcția de repartiție $F_{k,n}(x) = \text{Pr.}\{s_k < x\}$ se obține imediat. Avem

$$F_{k,n}(x) = \int_0^x f_{k,n}(x)\, dx = \sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j},$$

pentru $0 \leqq x \leqq 1$. Pentru $x < 0$ avem evident $F_{k,n}(x) = 0$, iar pentru $x > 1$, $F_{k,n}(x) = 1$.

PROBLEME DE SPEŢA ÎNTÎI. CAZUL GENERAL

§ 10. Trecem acum la studiul cazului general, cînd constantele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ care intervin în expresia formei s (§ 3, egalitatea 4), au *orice valoare*. Observăm mai întîi că nu se restrînge generalitatea dacă se admite că una din aceste constante este nulă, iar toate celelalte pozitive. Într-adevăr, dacă λ_j este cea mai mică dintre aceste constante, suma s poate fi scrisă

$$s = (\lambda_1 - \lambda_j)\, u_1 + (\lambda_2 - \lambda_j)\, u_2 + \ldots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j)\, u_{j-1} + \\ + (\lambda_{j+1} - \lambda_j)\, u_{j+1} + \ldots + (\lambda_{n+1} - \lambda_j)\, u_{n+1} + \lambda_j$$

λ_j fiind constant, studiul variabilei aleatorii s se reduce la cel al variabilei

$$(\lambda_1 - \lambda_j)\, u_1 + \ldots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j)\, u_{j-1} + (\lambda_{j+1} - \lambda_j)\, u_{j+1} + \ldots + (\lambda_{n+1} - \lambda_j)\, u_{n+1},$$

în care toţi coeficienţii $(\lambda_1 - \lambda_j), (\lambda_2 - \lambda_j), \ldots, (\lambda_{n+1} - \lambda_j)$ sînt pozitivi, iar variabila u_j nu figurează.

De asemenea, din cauză că variabilele $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ au aceeaşi funcţie de repartiţie, este evident că putem admite că şi constantele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ sînt ordonate în ordine nedescrescătoare, adică

$$0 = \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \ldots \leqq \lambda_{n+1}.$$

Pentru mai multă claritate, considerăm pe segmentul $[0,1]$ patru puncte, ale căror abscise le notăm

$$0 \leqq x_1^* \leqq x_2^* \leqq x_3^* \leqq x_4^* \leqq 1.$$

Fie de asemenea 0, 1, 1, 2, 2 constantele ce definesc expresia s. Formele liniare

$$s_1 = u_2 + u_3 + 2\,(u_4 + u_5) = 2 - x_1^* - x_3^*,$$
$$s_2 = u_2 + u_3 + 2\,(u_3 + u_5) = 2 - x_1^* - x_2^* + x_3^* = x_4^*,$$
$$s_3 = u_2 + u_5 + 2\,(u_3 + u_4) = 1 - x_1^* - x_2^* + x_4^*,$$
$$s_4 = u_3 + u_4 + 2\,(u_2 + u_5) = 2 - 2x_1^* + x_2^* - x_4^*,$$
$$s_5 = u_3 + u_5 + 2\,(u_2 + u_4) = 1 - 2\,x_1^* + x_2^* - x_3^* + x_4^*,$$
$$s_6 = u_4 + u_5 + 2\,(u_2 + u_3) = 1 - 2\,x_1^* + x_3^*,$$

ca şi celelalte 24 ce se obţin din cele 6 de mai sus, înlocuind succesiv pe u_2, u_3, u_4 şi u_5 prin u_1, deşi în realitate reprezintă entităţi distincte, au totuşi aceeaşi lege de probabilitate. Iar această lege comună corespunde şi expresiei s_1, în care constantele λ sînt ordonate nedescrescător.

Aceste preliminarii fiind stabilite, admitem că $\mu_1 \geqq 1$ dintre constantele λ sînt nule, sau $\lambda_1 = 0$ apoi μ_2 sînt egale cu λ_2 etc., iar ultimele μ_k au valoarea λ_k, unde

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_k,$$

iar

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k = n + 1.$$

Cu aceste notaţii suma s (§ 3, egalitatea (4)) devine

$$s = \lambda_2 (u_{\mu_1+1} + u_{\mu_1+2} + \ldots + u_{\mu_1+\mu_2}) + \\ + \lambda_3 (u_{\mu_1+\mu_2+1} + u_{\mu_1+\mu_2+2} + \ldots + u_{\mu_j+\mu_2+\mu_3}) + \qquad (16)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \lambda_k (u_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{k-1}+1} + \ldots + u_{n+1}).$$

Rezultă din egalitatea (5) de la paragraful 3 că funcția caracteristică $\Phi_s(0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k; t)$ corespunzătoare este

$$\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{e^z\, dz}{z^{\mu_1}(z-\lambda_2 t)^{\mu_2}\ldots(z-\lambda_k t)^{\mu_k}},$$

unde conturul simplu C cuprinde în interiorul său punctele $0, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_k t$. Înlocuind ca mai sus pe z prin zt, obținem

$$\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t) = \frac{n!}{2\pi t^n i}\int_{C'} \frac{e^{tz}\, dz}{z^{\mu_1}(z-\lambda_2)^{\mu_2}\ldots(z-\lambda_k)^{\mu_k}} \tag{17}$$

conturul C' conținînd punctele $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Procedăm apoi ca la paragraful 7. Punem

$$\psi(t) = \frac{t^n}{n!}\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{e^{tz}\, dz}{z^{\mu_1}(z-\lambda_2)^{\mu_2}\ldots(z-\lambda_k)^{\mu_k}}.$$

Funcția $\psi(t)$ este soluția ecuației diferențiale

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mu_1-1}\cdot\left(\frac{d}{dx}-\lambda_2\right)^{\mu_2}\ldots\left(\frac{d}{dx}-\lambda_k\right)^{\mu_k} = 1, \tag{18}$$

care se anulează împreună cu primele sale $n-1$ derivate pentru $t = 0$, adică

$$\psi(0) = \psi'(0) = \ldots = \psi^{(n-1)}(0) = 0.$$

Rezultă

$$\psi(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-u)^{n-1}\psi^{(n)}(u)\, du.$$

Pe de altă parte, $\psi(t)$ fiind soluția ecuației diferențiale cu coeficienți constanți, (18), este de forma

$$\psi(t) = P_1(t) + P_2(t)\, e^{\lambda_2 t} + \ldots + P_k(t)\, e^{\lambda_k t}, \tag{19}$$

unde $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_k(t)$ sînt polinoame în t, respectiv de gradul $\mu_1 - 2, \mu_2 - 1, \ldots, \mu_k - 1$. Prin derivare se obține

$$\psi^{(n)}(u) = Q_2(u)\, e^{\lambda_2 u} + Q_3(u)\, e^{\lambda_3 u} + \ldots + Q_k(u)\, e^{\lambda_k u}$$

$Q_2(u), Q_3(u), \ldots, Q_k(u)$ fiind de asemenea polinoame de, respectiv, gradul $\mu_2 - 1, \mu_3 - 1, \ldots, \mu_k - 1$.

Revenind la funcția caracteristică Φ_s, găsim

$$\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t) = \frac{n}{t^n}\int_0^t (t-u)^{n-1}\left(\sum_{j=2}^{k} Q_j(u)\, e^{\lambda_j u}\right) du$$

sau, făcînd schimbarea $u = tv$, obținem

$$\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t) = n\int_0^1 (1-v)^{n-1}\left[\sum_{j=2}^{k} Q_j(tv)\, e^{\lambda_j t v}\right] dv.$$

Funcţia caracteristică $\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t)$ poate deci fi exprimată ca suma anumitor termeni de forma

$$A \int_0^1 (1-\varphi)^{n-1} (t\varphi)^{\alpha} e^{\beta t\varphi} d\varphi,$$

unde A este un coeficient numeric care nu depinde de t sau de φ, α un exponent întreg, pozitiv şi inferior lui $n-1$, iar β este egal cu una din constantele $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$. Deoarece avem

$$A \int_0^1 (1-\varphi)^{n-1} (t\varphi)^{\alpha} e^{\beta t\varphi} d\varphi = \frac{(-1)^{\alpha} A}{\beta^{\alpha}} \int_0^1 [(1-\varphi)^{n-1} \cdot \varphi^{\alpha}]^{(\alpha)} e^{\beta t\varphi} d\varphi,$$

rezultă că $\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t)$ este de forma

$$\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t) = \sum_{j=2}^{j=k} \int_0^1 R_j(\varphi) e^{\lambda_j t\varphi} d\varphi$$

$R_j(\varphi)$ fiind polinoame în φ de gradul $n-1$. Schimbînd apoi pe $\lambda_2\varphi, \lambda_3\varphi, \ldots, \lambda_k\varphi$ în φ astfel ca diferitele exponenţiale $e^{\lambda_j t\varphi}$ să devină $e^{t\varphi}$, obţinem

$$\Phi_s(0, \lambda_3, \ldots, \lambda_k; t) = \int_0^{\lambda_2} \left[\frac{1}{\lambda_2} R_2\left(\frac{\varphi}{\lambda_2}\right) + \frac{1}{\lambda_3} R_3\left(\frac{\varphi}{\lambda_3}\right) + \ldots + \frac{1}{\lambda_k} R_k\left(\frac{\varphi}{\lambda_k}\right)\right] e^{t\varphi} d\varphi +$$

$$+ \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \left[\frac{1}{\lambda_3} R_3\left(\frac{\varphi}{\lambda_3}\right) + \frac{1}{\lambda_4} R_4\left(\frac{\varphi}{\lambda_4}\right) + \ldots + \frac{1}{\lambda_k} R_k\left(\frac{\varphi}{\lambda_k}\right)\right] e^{t\varphi} d\varphi + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} \frac{1}{\lambda_k} R_k\left(\frac{\varphi}{\lambda_k}\right) e^{t\varphi} d\varphi.$$

Deci, în concluzie, rezultă că funcţia caracteristică poate fi scrisă

$$\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t) = \int_0^{\lambda_2} S_1(\varphi) e^{t\varphi} d\varphi + \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} S_2(\varphi) e^{t\varphi} d\varphi + \ldots$$

$$+ \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} S_{k-1}(\varphi) e^{t\varphi} d\varphi, \qquad (20)$$

$S_1(\varphi), S_2(\varphi), \ldots, S_{k-1}(\varphi)$ fiind polincame în φ de gradul $n-1$. Rezultă de asemenea că funcţia de frecvenţe (densitatea de probabilităţi) $f(x)$ a variabilei s este

$$f(x) = 0 \qquad \text{pentru} \quad x \leqq 0,$$
$$f(x) = S_1(x) \qquad \text{pentru} \quad 0 \leqq x \leqq \lambda_2,$$
$$f(x) = S_2(x) \qquad \text{pentru} \quad \lambda_2 \leqq x \leqq \lambda_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(x) = S_{k-1}(x) \qquad \text{pentru} \quad \lambda_{k-1} \leqq x \leqq \lambda_k,$$
$$f(x) = 0 \qquad \text{pentru} \quad \lambda_k \leqq x.$$

Arătăm numaidecît că $f(x)$ este o funcţie continuă. Cunoscînd funcţia de frecvenţe, funcţia de repartiţie poate fi uşor determinată prin integrare.

§ 11. Știind că funcția caracteristică $\Phi_s(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t)$ este de forma (20), în aplicații, polinoamele $S_1(x), S_2(x), \ldots, S_{k-1}(x)$ pot fi obținute prin simple identificări. Astfel, din (17) obținem

$$\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t) = \frac{n!}{t^n} \sum_{j=1}^{k} P_j(t)\, e^{\lambda_j t}$$

polinoamele $P_j(t)$ fiind aceleași ca în egalitatea (19). Punem

$$P_j(t) = p_{0,j} + p_{1,j}\, t + \ldots + p_{\mu_j - 1, j}\, t^{\mu_j - 1}.$$

Pe de altă parte, $S(\rho)$ fiind un polinom de gradul $n-1$, în ρ, avem

$$\int_b^b S(\rho)\, e^{t\rho}\, d\rho = \left| e^{t\rho} \left[\frac{S(\rho)}{t} - \frac{S'(\rho)}{t^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{S^{(n-1)}(\rho)}{t^n} \right] \right|_a^b.$$

Identificînd cele două expresii obținute pentru $\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t)$ pornind fie de la relația (17), fie de la relația (20), obținem

$$S_1^{(n-1)}(0) = (-1)^{n-1}\, n!\, p_{0,1};\ S_1^{(n-2)}(0) = (-1)^{n-2} n!\, p_{1,1}, \ldots$$
$$S_1^{(n-\mu_1)}(0) = (-1)^{n-\mu_1}\, n!\, p_{\mu_1 - 1, 1}, \qquad (21)$$
$$S_1^{(n-\mu_1-1)}(0) = S_1^{(n-\mu_1-2)}(0) = \ldots = S_1(0) = 0.$$

Prin aceste n relații, polinomul S_1 este complet determinat. Analog obținem polinomul S_2 identificînd cele două polinoame ce multiplică pe $e^{\lambda_2 t}$ în cele două dezvoltări ale lui Φ_s etc. Se obțin în acest mod toate polinoamele $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$, iar demonstrația de la paragraful 10 — ce precede — revine de fapt la aceea că polinomul ce se obține drept coeficient al lui $\frac{e^{\lambda_k t}}{t^n}$ prin calculul integralei

$$\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} S_{k-1}(\rho)\, e^{t\rho}\, d\rho,$$

este identic cu $n!\, P_k(t)$.

§ 12. Ne propunem acum să studiem continuitatea funcției de frecvențe $f(x)$ și a derivatelor sale. Fiind evident că dacă funcția $f(x)$ și derivatele sale sînt undeva discontinue, aceasta nu poate avea loc decît în punctele $x = \lambda_1 = 0$, $x = \lambda_2, \ldots x = \lambda_k$; problema revine la a studia ce se întîmplă în fiecare din aceste puncte. Pentru $x = \lambda_1 = 0$ rezultă din egalitățile (21) că avem

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-\mu_1-1)}(0) = 0,$$

deci funcția $f(x)$ împreună cu primele sale $n - \mu - 1$ derivate sînt, în acest punct, continue.

Punem apoi

$$\mu_j' = \operatorname{Max}[\mu_j, \mu_{j-1}],\ (j = 2, 3, \ldots, k-1).$$

Avem evident

$$S_{j-1}(\lambda_j) = S_j(\lambda_j),$$
$$S_{j-1}'(\lambda_j) = S_j'(\lambda_j),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{j-1}^{(n-\mu_j'-1)}(\lambda_j) = S_j^{(n-\mu_j-1)}(\lambda_j),$$

deci funcţia $f(x)$ şi primele sale $n - \mu_j' - 1$ derivate sînt continue pentru $x = \lambda_j$. În sfîrşit, pentru $x = \lambda_k$ avem

$$S_{k-1}(\lambda_k) = S_{k-1}'(\lambda_k) = \ldots = S_{k-1}^{(n-\mu_k-1)}(\lambda_k) = 0,$$

de unde deducem că funcţia $f(x)$ şi primele sale $n - \mu_k - 1$ derivate sînt continue în acest punct. Punem

$$r = \text{Max}\,[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k].$$

Rezultă că funcţia $f(x)$ şi primele sale $n - r - 1$ derivate sînt continue pentru orice valoare a lui x. În particular, cu excepţia cazului cînd avem $n \leqq r$, funcţia $f(x)$ este întotdeauna continuă. Acest caz excepţional poate să se producă numai dacă $r = n + 1$ sau $r = n$.

Deoarece avem

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k = n + 1$$

pentru ca r să fie egal cu $n + 1$ trebuie ca $\mu_1 = n + 1$, iar $\mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_{k-1} = 0$. În acest caz, toate constantele λ sînt nule, iar problema este lipsită de conţinut. În sfîrşit, putem avea $r = n$ dacă $\mu_1 = n$ şi $\mu_2 = 1$ sau dacă $\mu_1 = 1$ şi $\mu_2 = n$. În prima alternativă problema este similară cu aceea de la paragraful 4, $f(x)$ fiind discontinuă pentru $x = 0$. În cea de-a doua alternativă, problema este similară cu aceea de la paragrafele 6, 7, 8, 9 şi anume cazul cînd $k = n$. În acest caz funcţia $f(x)$ este discontinuă pentru $x = \lambda_2$.

Cu aceste excepţii funcţia de frecvenţe $f(x)$ este continuă pe întreaga axă reală.

§ 13. Pentru mai multă claritate, aplicăm generalităţile ce preced, la două exemple concrete.

Considerăm astfel variabila aleatorie

$$X_{j,l} = \frac{x_j^* + x_l^*}{2}, \quad (j < l)$$

sau

$$X_{j,l} = u_1 + u_2 + \ldots + u_j + \frac{1}{2}(u_{j+1} + u_{j+2} + \ldots + u_l).$$

Constantele λ şi exponenţii μ devin în acest caz

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = \frac{1}{2} \ \text{şi} \ \lambda_3 = 1$$

iar

$$\mu_1 = n + 1 - l, \ \mu_2 = l - j \ \text{şi} \ \mu_3 = j.$$

Funcţia caracteristică $\Phi_X\left(0, \frac{1}{2}, 1; t\right)$ corespunzătoare este

$$\Phi_X\left(0, \frac{1}{2}, 1; t\right) = \frac{n!}{2\pi t^n i} \int_C \frac{e^{tz} dz}{z^{n+1-l}\left(z - \frac{1}{2}\right)^{l-j}(z-1)^j}$$

integrala fiind calculată pe conturul simplu C' care cuprinde în interior punctele 0, $\frac{1}{2}$ și 1. Primele două momente ale variabilei $X_{j,l}$ sînt

$$m_1 = \frac{l+j}{2(n+1)} \quad \text{și} \quad m_2 = \frac{l(l+1)+(2l+3)j+j^2}{4(n+1)(n+2)}.$$

În particular, cînd j și l sînt echidistanți de extremi sau $j+l=n+1$, regăsim rezultatele cunoscute [3] *)

$$E\left[\frac{x_j^* + x_{n+1-j}^*}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

și

$$D^2\left[\frac{x_j^* + x_{n+1-j}^*}{2}\right] = m_2 - m_1^2 = \frac{j}{2(n+1)(n+2)}.$$

Funcțiile de frecvență ale variabilelor $X_{j,l}$ pot fi obținute prin metoda indicată mai sus. Pentru a evita calcule prea lungi, determinăm explicit această funcție în cazul variabilei $X_{1,n}$ adică

$$X_{1,n} = \frac{x_1^* + x_n^*}{2}.$$

Funcția caracteristică corespunzătoare este

$$\Phi_X\left(0, \frac{1}{2}, 1; t\right) = \frac{n!}{t^n}\left\{(-1)^n 2^{n-1} - 4\left[\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{2^2 t^{n-4}}{(n-4)!} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2^4 t^{n-6}}{(n-6)!} + \ldots\right] e^{\frac{t}{2}} + 2^{n-1} e^t\right\}.$$

Scriind această funcție sub forma

$$\Phi_X\left(0, \frac{1}{2}, 1; t\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} P_1(\varphi)\, e^{t\varphi}\, d\varphi + \int_{\frac{1}{2}}^1 P_2(\varphi)\, e^{t\varphi}\, d\varphi$$

obținem

$$P_1(\varphi) = n \cdot 2^{n-1} \varphi^{n-1} \text{ și } P_2(\varphi) = n \cdot 2^{n-1} (1-\varphi)^{n-1}.$$

Funcția de frecvențe $f(x)$ a variabilei $X_{1,n}$ este deci

$f(x) = 0$ pentru $x \leqq 0$,

$f(x) = n \cdot 2^{n-1} x^{n-1}$ pentru $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$,

$f(x) = n\, 2^{n-1} (1-x)^{n-1}$ pentru $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$,

$f(x) = 0$ pentru $1 \leqq x$.

*) p. 372.

Se constată în acest caz că funcția de frecvență $f(x)$ este continuă de la $-\infty$ la $+\infty$. În punctul $x = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, deoarece

$$\mu_2' = \text{Max}\,[n-1, 1] = n-1$$

este continuă numai derivata de ordinul $n-1-(n-1)=0$, adică numai funcția — prima derivată fiind discontinuă — cum se poate verifica direct.

§ 14. Considerăm de asemenea cazul particular cînd constantele $\{\lambda_j\}$ sînt toate distincte, adică

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n+1}.$$

În acest caz avem de asemenea

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n+1=1}.$$

Punem

$$P(z) = z(z-\lambda_2)\ldots(z-\lambda_{n+1}).$$

Funcția caracteristică $\Phi_s(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}; t)$ este dată de relația (6) (§ 3) sau

$$\Phi_s(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}; t) = \frac{n!}{t^n}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{e^{\lambda_j t}}{P(\lambda_j)}.$$

Se vede imediat că avem

$$\Phi_s(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}; t) = n\sum_{j=1}^{n}(-1)^n\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} P_j(\nu)\, e^{t\nu}\, d\nu,$$

unde

$$P_j(\nu) = \sum_{l=1}^{l=j}\frac{(\nu-\lambda_l)^{n-1}}{P'(\lambda_l)}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Funcția de frecvențe $f(x)$ este egală în fiecare din intervalele $[\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ cu polinomul $P_j(x)$ corespunzător acestui interval. Se deduce imediat din aceasta că funcția $f(x)$ împreună cu primele sale $n-2$ derivate sînt continue pentru $x = \lambda_1 = 0$, $x = \lambda_2, \ldots, x = \lambda_n$. Pentru a arăta că aceeași proprietate subsistă și pentru $x = \lambda_{n+1}$, este suficient a observa că avem

$$P_n(x) = \frac{n(\lambda_{n+1}-x)^{n-1}}{P(\lambda_{n+1})}.$$

Aceasta se poate arăta cu ușurință pornind de la identitatea

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{e^{tz}\,dz}{z(z-\lambda_2)\ldots(z-\lambda_{n+1})} = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{e^{\lambda_j t}}{P(\lambda_j)},$$

integrala fiind calculată ca și mai sus după un contur simplu C' care conține în interior punctele $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$. Înlocuind pe z prin $z+\lambda_{n+1}$ se obține

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{e^{tz}\,dz}{(z+\lambda_{n+1})(z+\lambda_{n+1}-\lambda_2)\ldots z} = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{e^{(\lambda_j-\lambda_{n+1})t}}{P'(\lambda_j)},$$

de unde derivînd de $n-1$ ori în raport cu t și făcînd apoi de fiecare dată pe $t=0$ se obține identitatea enunțată.

Cu aplicație poate fi regăsită funcția de repartiție binecunoscută, relativă variabilei aleatorii

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nu_1 + (n-1)\,u_2 + \ldots + (n-j+1)\,u_j + \ldots u_n .$$

Cu notațiile folosite avem

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1, \ldots, \lambda_{n+1} = n,$$

$$P(z) = z(z-1)\ldots(z-n)$$

și

$$f(x) = 0 \qquad \text{pentru} \quad x \leqq 0,$$

$$f(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{pentru} \quad 0 \leqq x \leqq 1,$$

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\left[x^{n-1} - \binom{n}{1}(x-1)^{n-1}\right] \quad \text{pentru} \quad 1 \leqq x \leqq 2,$$

.....

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\left[x^{n-1} - \binom{n}{1}(x-1)^{n-1} + \binom{n}{2}(x-2)^{n-1} + \ldots\right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(x-n+1)^{n-1}\right] = \frac{1}{(n-1)!}(n-x)^{n-1}$$

$$\text{pentru} \quad n-1 \leqq x \leqq n,$$

$$f(x) = 0 \quad \text{pentru} \quad x \geqq n.$$

PROBLEMA DE SPEȚA A DOUA ȘI DE SPEȚE SUPERIOARE

§ 15. Variabilele $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ pot fi la rîndul lor ordonate în ordine nedescrescătoare. Fie

$$0 \leqq u_1^* \leqq u_2^* \leqq \ldots \leqq u_{n+1}^* \leqq 1.$$

Variabilele $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_{n+1}^*$ fiind astfel ordonate, relația ce definește funcția F de repartiție, considerată la paragraful 2, devine

$$dF = n!\,(n+1)!\,du_1^*\,du_2^*\ldots du_n^* .$$

Efectuăm schimbarea de variabile definită prin relațiile

$$\begin{aligned}
u_1^* &= \frac{\varrho_1}{n+1},\\
u_2^* &= \frac{\varrho_1}{n+1} + \frac{\varrho_2}{n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_k^* &= \frac{\varrho_1}{n+1} + \frac{\varrho_2}{n} + \ldots + \frac{\varrho_k}{n+2-k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_{n+1}^* &= \frac{\varrho_1}{n+1} + \frac{\varrho_2}{n} + \ldots + \frac{\varrho_k}{n+2-k} + \ldots + \frac{\varrho_{n+1}}{1},
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\ldots \quad u_1^* + u_2^* + \ldots + u_{n+1}^* = \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_{n+1} = 1$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ fiind variabile aleatorii, *pozitive*. De asemenea avem

$$\frac{D(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)}{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Rezultă

$$dF = n!\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n .$$

Funcţia caracteristică $\Phi_\varphi(t)$ relativă la repartiţie definită de variabilele $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ este

$$\Phi_\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = n! \int \ldots \int e^{t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2 + \ldots + t_n\varphi_n}\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n ,$$

unde simbolul $\int$ figurează de n ori, iar variabilele $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ variază în domeniul

$$0 \leqq \varphi_1, \quad 0 \leqq \varphi_2, \ldots, \quad 0 \leqq \varphi_n ,$$

$$0 \leqq \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n \leqq 1$$

ceea ce de altminteri se arată uşor observînd că deoarece u_1^* este cea mai mică dintre variabilele u^*, avem

$$0 \leqq (n+1)\, u_1^* \leqq 1, \quad \ldots \quad 0 \leqq \varphi_1 \leqq 1$$

apoi

$$0 \leqq n u_2^* \leqq 1 - u_1^* \quad \ldots \quad 0 \leqq \varphi_2 \leqq 1 - \varphi_1 \text{ etc.}$$

Se obţine astfel că funcţia caracteristică $\Phi_\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ este identică cu funcţia $\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ definită prin egalitatea (2) de la paragraful 2.

Rezultă de asemenea că *variabilele* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ *au aceleaşi funcţii de repartiţie şi de frecvenţe ca şi variabilele* $u_1, u_2, \ldots u_{n+1}$.

Problemele relative la variabilele $\{u_j^*\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ le putem rezolva cu ajutorul variabilelor $\{\varphi_j\}$ prin aceeaşi metodă prin care am rezolvat problemele relative la variabilele $\{x_j^*\}$ cu ajutorul variabilelor $\{u_j\}$. Asemenea probleme le numim probleme de speţa a doua.

§ 16. La rîndul lor, variabilele $\{\varphi_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ pot fi de asemenea ordonate în ordine nedescrescătoare adică

$$0 \leqq \varphi_1^* \leqq \varphi_2^* \leqq \ldots \leqq \varphi_{n+1}^* \leqq 1.$$

Facem aceeaşi schimbare de variabile ca mai sus. Punem

$$\varphi_k^* = \frac{w_1}{n+1} + \frac{w_2}{n} + \ldots + \frac{w_k}{n+2-k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n+1)$$

şi obţinem că variabilele aleatorii $\{w_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ au aceeaşi funcţie caracteristică, aceeaşi funcţie de frecvenţe şi aceeaşi funcţie de repartiţie ca variabilele $\{u_k\}$ şi $\{\varphi_k\}$. Repetînd nelimitat această operaţie, obţinem o infinitate de variabile aleatorii, care din punct de vedere fizic sînt distincte, însă au totuşi aceeaşi lege de probabilitate, iar diferitele probleme relative la aceste variabile pot fi rezolvate prin metoda expusă mai sus.

§ 17. Ca aplicație a acestor considerații generale, ne propunem să determinăm $f_\varphi(x)$ de frecvențe, relativă la variabila

$$s_\varphi = \lambda_2 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_2 + \ldots + \lambda_k \varphi_{k-1},$$

unde

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_k,$$

iar

$$\mu_1 = n - k + 2, \quad \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k = 1.$$

În particular, dacă avem

$$\lambda_2 = \frac{1}{n-k+3}, \quad \lambda_3 = \frac{2}{n-k+4}, \ldots, \lambda_k = \frac{k-1}{n+1}$$

pentru diversele forme liniare în $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_{n+1}^*$, care admit aceeași lege de probabilitate ca și s_φ *) este și suma

$$u_1^* + u_2^* + \ldots + u_{k-1}^*.$$

Aflarea funcției de repartiție a acestei sume formează obiectul lucrării lui Mauldon [4]. Cazul particular cînd $k = n + 1$ a fost studiat de R. A. Fisher [5].

Ca și în toate celelalte cazuri, începem prin a considera funcția caracteristică $\Phi_\varphi(t)$ relativă la suma s_φ. Avem

$$\Phi_\varphi(t) = \frac{n!}{2\pi t^n i} \int_{C'} \frac{e^{tz}\, dz}{z^{n-k+2}(z-\lambda_2)\ldots(z-\lambda_k)}$$

conturul simplu C' conținînd în interiorul său punctele $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Cunoscînd pe $\Phi_\varphi(t)$, funcția de frecvență $f_\varphi(x)$ o determinăm prin metoda identificării expusă mai sus (§ 10 și 11). Deoarece avem

$$\mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k = 1,$$

se ajunge mai ușor la rezultat, începînd prin a determina polinomul $P_{k-1}(x)$ relativ la intervalul $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$, apoi polinomul $P_{k-2}(x)$ relativ la $[\lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}]$ etc., și abia la sfîrșit polinomul $P_1(x)$ corespunzător intervalului $[0, \lambda_2]$. Punem

$$P_\varphi(x) = z^{n-k+2}(z-\lambda_2)\ldots(z-\lambda_k).$$

Se obține

$$f_\varphi(x) = 0 \text{ pentru } \lambda_k \leqq x,$$

$$f_\varphi(x) = P_{k-1}(x) = n\frac{(\lambda_k - x)^{n-1}}{P_\varphi'(\lambda_k)} \text{ pentru } \lambda_{k-1} \leqq x \leqq \lambda_k,$$

$$f_\varphi(x) = P_{k-2}(x) = n\left[\frac{(\lambda_{k-1}-x)^{n-1}}{P_\varphi'(\lambda_{k-1})} + \frac{(\lambda_k - x)^{n-1}}{P_\varphi'(\lambda_k)}\right] \text{ pentru } \lambda_{k-2} \leqq x \leqq \lambda_{k-1},$$

. . . . . .

$$f_\varphi(x) = P_2(x) = n\sum_{j=2}^{k} \frac{(\lambda_j - x)^{n-1}}{P_\varphi'(\lambda_j)} \text{ pentru } \lambda_2 \leqq x \leqq \lambda_3.$$

*) Pentru mai multă claritate a se vedea paragraful 10.

Determinarea polinomului $P_1(x)$ se efectuează calculînd în prealabil reziduul $R(t)$ pentru $z = 0$ al integralei ce definește pe $\Phi_\nu(t)$. Acest reziduu este un polinom de gradul $n + 1 - k$ în t, adică

$$R(t) = c_0 + c_1 t + \ldots c_{n+1-k} t^{n+1-k}.$$

În cazul particular considerat de R. A. Fisher, avem

$$R(t) = \frac{1}{P'_\nu(0)},$$

iar polinomul căutat $P_1(x)$ este

$$P_1(x) = (-1)^n \frac{n x^{n-1}}{P'_\nu(0)}.$$

În cazul mai general, considerat de noi, avem

$$(-1)^n P_1^{(n-1)}(0) = n!\, c_0,$$

$$(-1)^{n-1} P_1^{(n-2)}(0) = n!\, c_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-1)^{k-1} P_1^{(k-2)}(0) = n!\, c_{n+1-k}$$

$$P_1(0) = P'_1(0) = \ldots = P_1^{(k-3)}(0) = 0.$$

Rezultă

$$f_\nu(x) = P_1(x) = (-1)^n n c_0 x^{n-1} + (-1)^{n-1} n(n-1)\, c_1 x^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k-1} n(n-1)\ldots(k-1)\, c_{n+1-k} x^{k-2} \quad \text{pentru } 0 \leqq x \leqq \lambda_2.$$

Se poate arăta printr-o metodă analogă cu aceea de la paragraful 14 că avem

$$P_1(\lambda_2) = P_2(\lambda_2),$$

$$P'_1(\lambda_2) = P'_2(\lambda_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_1^{(k-3)}(\lambda_2) = P_2^{(k-3)}(\lambda_2).$$

PUNCTE ÎN NUMĂR INFINIT SITUATE PE O SEMIDREAPTĂ

§ 18. În tot ceea ce precede s-a admis că punctele ce interveneau în diferitele probleme studiate se găseau pe segmentul [0,1]. Este de la sine înțeles că rezultatele obținute pot fi extinse și la cazul cînd aceste puncte se găsesc uniform distribuite pe un anumit segment *finit* $[a, b]$, unde $-\infty < a < b < +\infty$.

Fie pentru aceasta ξ abscisa unui punct M luat la întîmplare pe segmentul $[a,b]$. Ipoteza distribuției uniforme revine la aceea că admitem că probabilitatea ca punctul M să se găsească pe o porțiune de lungime $d\xi$ a segmentului $[a, b]$ este egală cu $\frac{d\xi}{b-a}$.

Considerăm apoi n puncte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ luate la întîmplare pe segmentul $[a, b]$. Notăm cu $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ abscisele lor. Analog cu cele arătate la para-

graful 2, ordonăm aceste abscise în ordine nedescrescătoare, adică

$$a \leqq \xi_1^* \leqq \xi_2^* \leqq \ldots \leqq \xi_n^* \leqq b_{n+1}$$

și punem

$$\zeta_1 = \xi_1^* - a,$$
$$\zeta_2 = \xi_2^* - \xi_1^*$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\zeta_n = \xi_n^* - \xi_{n-1}^*$$
$$\zeta_{n+1} = b - \xi_n^*$$
$$\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_{n+1} = b - a.$$

S-a arătat mai sus că studiul diferitelor probleme ce ne putem pune relativ la distribuția punctelor $M_1, M_2, \ldots, M_n$ revine la studiul distribuției unei anumite forme liniare S de diferențele a cîte două abscise consecutive. Relativ la punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$ după segmentul $[a, b]$, această formă liniară poate fi scrisă

$$S_{ab} = \lambda_1 (a + \zeta_1) + \lambda_2 \zeta_2 + \ldots + \lambda_{n+1} \zeta_{n+1},$$

în care $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ sînt ca și în cazul formei S de la paragraful 3, $n + 1$ constante arbitrare. Facem substituția

$$\xi = a + (b - a)\, x,$$

astfel ca pentru ξ variind în intervalul $[a, b]$, x variază în intervalul $[0,1]$. De asemenea, $\dfrac{d\xi}{b-a}$ fiind probabilitatea ca punctul de abscisă ξ să se găsească pe o porțiune de lungime $d\xi$ a segmentului $a\ b$, probabilitatea ca punctul de abscisă x să se găsească pe porțiunea de lungime dx a segmentului $[0,1]$ este egală cu dx. Prin această substituție, problemele relative la puncte pe segmentul $[a, b]$ sînt reduse la probleme relative la puncte pe segmentul $[0, 1]$. Fie acum

$$\xi_k = a + (b - a)\, x_k,$$

$$\xi_k^* = a + (b - a)\, x_k^*, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Deoarece $b - a > 0$ avem și

$$0 \leqq x_1^* \leqq x_2^* \leqq \ldots \leqq x_n^* \leqq 1.$$

Pe de altă parte, punem

$$\zeta_1 = (b - a)\, u_1$$
$$\zeta_2 = (b - a)\, u_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\zeta_n = (b - a)\, u_n \qquad (23)$$
$$\zeta_{n+1} = (b - a)\, u_{n+1}$$
$$\therefore u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1} = 1.$$

Prin urmare, variabilele $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ cît şi variabilele $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ ce intervin aici, sînt aceleaşi ca la paragraful 2. Cu aceste notaţii suma S_{ab} devine

$$S_{ab} = \lambda_0 a + (b - a)\,[\,\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{n+1} u_{n+1}]$$

sau

$$S_{ab} = \lambda_0 a + (b - a)\,S,$$

S fiind forma liniară definită prin egalitatea (4), paragraful 3, şi λ_0 o constantă. Rezultă că funcţia caracteristică $\Phi_{ab}(t)$ relativă la s_{ab} este

$$\Phi_{ab}(t) = e^{\lambda_0 a t}\Phi_s[(b - a)t],$$

unde reamintim că $\Phi_s(t)$ este funcţia caracteristică relativă la suma S. De asemenea, deoarece avem

$$\text{Pr.}\{S_{ab} < x\} = \text{Pr.}\left\{S < \frac{x - \lambda_0 a}{b - a}\right\},$$

rezultă că între funcţiile de repartiţie $F_{ab}(x)$ a variabilei S_{ab} şi $F(x)$ a variabilei S avem relaţia

$$F_{ab}(x) = F\left(\frac{x - \lambda_0 a}{b - a}\right).$$

În sfîrşit, între densităţile de probabilităţi $f_{ab}(x)$ şi $f(x)$ relative la variabilele S_{ab} şi S avem relaţia

$$f_{ab}(x) = \frac{1}{b - a} f\left(\frac{x - \lambda_0 a}{b - a}\right).$$

§ 19. Pentru rezolvarea problemelor de speţa a doua, sîntem conduşi la a ordona variabilele $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n+1}$ în ordine nedescrescătoare, adică

$$0 \leqq \zeta_1^* \leqq \zeta_2^* \leqq \ldots \leqq \zeta_{n+1}^* \leqq b - a.$$

Apoi facem schimbarea de variabile analogă celei definite prin relaţiile (22) de la paragraful 15, sau

$$\begin{aligned}
\zeta_1^* &= \frac{\theta_1}{n+1}, \\
\zeta_2^* &= \frac{\theta_1}{n+1} + \frac{\theta_2}{n}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\zeta_{n+1}^* &= \frac{\theta_1}{n+1} + \frac{\theta_2}{n} + \ldots + \frac{\theta_{n+1}}{1}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Din relaţiile (23) deducem

$$\theta_j = (b - a)\,\varphi_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1),$$

variabilele φ_j fiind aceleaşi ca în relaţiile (22) de la paragraful 15. Obţinem,

analog cu ceea ce am obținut la paragraful 15, că variabilele ζ_j și θ_j $(j = 1, 2, \ldots, (n+1)$ au aceleași legi de probabilitate. Ordonînd apoi variabilele θ_j, în ordine nedescrescătoare, definim prin relații analoge cu (24) un nou șir de variabile aleatorii, ce au aceleași legi de probabilitate ca ζ_j și θ_j. Și așa mai departe.

§ 20. În cele ce urmează facem $a = 0$, iar lungimea $b - a$ a intervalului o notăm cu l, sau $0 < b = l$. Ne propunem acum să studiem ce devin diversele rezultate obținute în această lucrare cînd atît l cît și n cresc nemărginit, punctele M fiind însă uniform repartizate sau — ceea ce este același lucru — cînd raportul $\frac{n}{l}$ admite o limită δ, finită și bine determinată *).

Funcția caracteristică $\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k ; t)$, definită prin egalitatea (17) și care corespunde sumei S, în cazul general considerat la paragraful 10, devine pentru l *finit*

$$\Phi_s(0, l\lambda_2, l\lambda_3, \ldots, l\lambda_n; t) = \frac{n!}{2\pi l^n i} \int_{C'} \frac{e^{tz}\, dz}{z^{\mu_1}(z - \lambda_2 l)^{\mu_2} \ldots (z - \lambda_k l)^{\mu_k}}$$

unde înlocuind pe z prin lz obținem

$$\Phi_s(0, l\lambda_2, \ldots, l\lambda_k ; t) = \frac{n!}{2\pi\, l^n t^n i} \int_{C'} \frac{e^{ltz}\, dz}{z^{\mu_1}(z - \lambda_2)^{\mu_2} \ldots (z - \lambda_k)^{\mu_k}}$$

conturul simplu C' conținînd în interior punctele $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Dezvoltînd exponențiala e^{ltz} după puterile crescătoare ale lui z și observînd că avem

$$\int_{C'} \frac{z^{j-\mu_1}\, dz}{(z - \lambda_2)^{\mu_2} \ldots (z - \lambda_k)^{\mu_k}} = 0, \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1)$$

se obține

$$\Phi_s(0, l\lambda_2, \ldots, l\lambda_k; t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{l^j t^j z^j}{(n+1)(n+2)\ldots(n+j)}\right] \frac{z^{n-\mu_1}\, dz}{(z-\lambda_2)^{\mu_2}(z-\lambda_3)^{\mu_3}\ldots(z-\lambda_k)^{\mu_k}} \quad (17')$$

§ 21. Din această egalitate se deduce imediat limita $\Omega(t)$ a funcției $\Phi_s(0, l\lambda_2, l\lambda_3, \ldots, l\lambda_k; t)$ cînd l și n tind către infinit și astfel ca $\lim \frac{n}{l} = \delta$.

Admițînd, cum este cazul în aplicațiile cele mai frecvente, că atît constantele $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ cît și exponenții respectivi $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k$ nu depind de n sau de l, obținem

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j z^j}{\delta j}\right] \frac{z^{\rho-1}\, dz}{(z-\lambda_2)^{\mu_2}(z-\lambda_3)^{\mu_3}\ldots(z-\lambda_k)^{\mu_k}},$$

unde am pus $\mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_k = \rho$.

Pentru $|tz| < \delta$ expresia funcției $\Omega(t)$ devine

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{z^{\rho-1}\, dz}{\left(1 - \frac{tz}{\delta}\right)(z - \lambda_2)^{\mu_2} \ldots \left(z - \lambda_k\right)^{\mu_k}}.$$

*) Anumite fenomene fizice, în special emisiunea particulelor (α) de radium, conduc la probleme de acest gen. A se vedea [6], p. 108—112 și [7], p. 57—74.

Pentru $|t|$ suficient de mic, polul $z = \frac{\delta}{t}$ fiind în afara conturului de integrare C', deducem

$$\Omega(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda_1 t}{\delta}\right)^{\mu_1}\left(1 - \frac{\lambda_2 t}{\delta}\right)^{\mu_2}\cdots\left(1 - \frac{\lambda_k t}{\delta}\right)^{\mu_k}}. \tag{25}$$

Funcția de frecvențe $g(x)$ corespunzătoare funcției caracteristice $\Omega(t)$ poate fi obținută cu ușurință, întrebuințînd metodele uzuale ale calculului operațional. Astfel, descompunînd în elemente simple, $\Omega(t)$ devine

$$\Omega(t) = \sum_{j=2}^{k}\left[\frac{A_{1,j}}{1 - \frac{\lambda_j t}{\delta}} + \frac{A_{2,j}}{\left(1 - \frac{\lambda_j t}{\delta}\right)^2} + \cdots + \frac{A_{\mu j,j}}{\left(1 - \frac{\lambda_j t}{\delta}\right)^{\mu_j}}\right].$$

Deoarece avem [8] *)

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{\delta}t\right)^{\mu}} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \cdot \frac{\delta^{\mu}}{\lambda^{\mu}} \int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-\frac{\delta}{\lambda}x} \cdot e^{tx} \cdot dx,$$

pentru $\mathcal{R}(\mu) > 0$ (parte reală) și $t < \frac{\delta}{\lambda}$, rezultă că funcția $g(x)$ este de forma

$$g(x) = \sum_{j=2}^{k} P_j(x)\, e^{-\frac{\delta}{\lambda_j}x},$$

unde $P_j(x)$ este un polinom în x de gradul $\mu_j - 1$.

§ 22. Ca aplicație ne propunem să studiem legea de repartiție a amplitudinii w a unei selecțiuni formate din abscisele a k puncte consecutive, dintre punctele M, sau

$$w_k = \xi^*_{m+k} - \xi^*_m = \zeta_{m+k} + \zeta_{m+k-1} + \cdots + \zeta_{m+1}.$$

În acest caz, dintre constantele λ care intervin în expresia sumei S_{ab} de la paragraful 18, k sînt egale cu 1, iar celelalte nule. Funcția caracteristică $\Omega(t)$ corespunzătoare este

$$\Omega_k(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\delta}\right)^k},$$

iar densitatea de probabilități $g_k(x)$ poate fi scrisă

$$g_k(x) = \frac{\delta^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\delta x}.$$

În particular, pentru $k = 1$ găsim

$$\Omega_1(t) = \frac{1}{1 - \frac{t}{\delta}}.$$

*) p. 218, relația 11.

La limită (pentru $l \to \infty$ și $n \to \infty$, iar $\lim \frac{n}{l} = \delta$) variabilele ζ devin independente, deoarece

$$\Omega_k(t) = [\Omega_1(t)]^k.$$

Variabilele u de la paragraful 2 nu posedau însă această proprietate pentrucă între funcțiile caracteristice: $\Phi_{k,n}(t)$, calculată la paragraful 4, și $\Phi_{k,n}(t)$, calculată la paragraful 6, nu avem o relație analogă relației dintre $\Omega_1(t)$ și $\Omega_k(t)$.

De asemenea pentru $k = 1$, funcția de repartiție $G_1(x)$ a diferenței a două abscise consecutive devine

$$G_1(x) = \Pr.\{\xi^*_{k+1} - \xi^*_k x\} = \delta \int_0^x e^{-\delta x}\, dx,$$

$$\therefore G_1(\tau) = 1 - e^{-\delta x}$$

rezultat cunoscut în cazul $k = 0$ și $\xi^*_0 = 0$, [7] *).

§ 23. Ipoteza făcută la paragraful 21 potrivit căreia constantele $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ nu depind de l și de n, nu este necesară pentru a putea determina limita funcției caracteristice $\Phi(0, l\lambda_2, \ldots, l\lambda_k; t)$. Pentru aceasta vom arăta pe un caz particular simplu cum poate fi calculată această limită în cazul cînd constantele $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ în număr *finit* depind de l și de n. În acest scop, presupunem mai întîi pe l și n finiți și ordonăm ca la paragraful 19 variabilele ζ în ordine nedescrescătoare, adică

$$0 \leqq \zeta^*_1 \leqq \zeta^*_2 \leqq \ldots \leqq \zeta^*_{n+1} \leqq l.$$

Ne propunem a găsi legea de repartiție a amplitudinii

$$w^*_k = \zeta^*_{m+k} - \zeta^*_m,$$

unde $m + k \leqq n$. Prin schimbarea de variabile definită de relațiile (24), avem

$$w^*_k = \frac{\theta_{m+1}}{n-m+1} + \frac{\theta_{m+2}}{n-m} + \ldots + \frac{\theta_{m+k}}{n-m-k+2}.$$

Înlocuind în (17′) funcția caracteristică $\Phi^*(t)$ corespunzătoare, devine

$$\Phi^*_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{l^j t^j z^j}{(n+1)(n+2)\ldots(n+j)}\right]\frac{z^{k-1}\,dz}{\prod_{j=0}^{k-1}\left(z - \frac{1}{n-m+1-j}\right)}.$$

Trecînd la limită, m și k rămînînd finiți, obținem

$$\lim \Phi^*_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{dz}{z\left(1 - \frac{tz}{\delta}\right)}.$$

Conturul C_1 conținînd originea și neconținînd polul $z = \frac{\delta}{t}$, rezultă

$$\lim \Phi^*_k(t) = 1.$$

*) p. 58.

Diferenţa

$$w_k^* = \zeta_{m+k}^* - \zeta_k^*$$

tinde deci către zero cu probabilitatea 1.

Rezultatul acesta era de altminteri evident a priori. Într-adevăr, înlocuind în expresia lui w_k^* variabilele θ prin φ şi trecînd la limită, obţinem

$$\lim w_k^* = \frac{1}{\delta} \lim [\varphi_{m+1} + \varphi_{m+2} + \ldots + \varphi_{m+k}].$$

Însă variabilele φ verifică relaţia

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n+1} = 1$$

şi admit toate aceeaşi lege de probabilitate. În asemenea condiţii, este clar că pentru $n \to \infty$, suma unui număr finit dintre ele tinde către zero cu probabilitatea 1. De altminteri, aceeaşi concluzie poate fi confirmată căutînd funcţia caracteristică $\Phi_{k,n}^* (t)$ corespunzătoare variabilei nw_k^*. Se obţine

$$\Phi_{k,n}^* (t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{l^j t^j z^j}{(n+1)(n+2)\ldots(n+j)} \right] \frac{z^{k-1}\, dz}{\prod_{j=0}^{k-1} \left(z - \frac{n}{n-m+1} \right)},$$

$$\therefore \lim \Phi_{k,n}^* (t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{z^{k-1}\, dz}{\left(1 - \frac{tz}{\delta} \right) (z-1)^k}.$$

Prin urmare

$$\lim \Phi_{k,n}^* (t) = \Omega_k (t).$$

La limită variabilele nw_k^* şi w_k au deci aceeaşi lege de probabilitate. În subsidiar rezultă de asemenea că pentru $n \to \infty$ variabila w_k^* nu poate lua decît valoarea zero cu probabilitatea 1.

НЕСКОЛЬКО ВОПРОСОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ВЗЯТЫМИ НАУГАД ТОЧКАМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

На отрезке [0,1] берутся наугад n точек P_1, P_2, P_3, ... P_n абсцисс $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для закона распределения допускается однородный закон вероятностей и что позиция одной из этих точек независима от позиции $n-1$ других точек. Точки располагаются в неубывающем порядке их абсцисс, или

$$0 \leqq x_1^* \leqq x_2^* \leqq \ldots \leqq x_n^* \leqq 1.$$

Пусть

$$x_j^* = u_1 + u_2 + \ldots + u_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

и

$$1 - x_n^* = u_{n+1}.$$

Показывается, что характеристическая функция

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots t_{n+1}) = E\left[e^{t_1 u_1 + t_2 u_2 + \ldots + t_{n+1} u_{n+1}}\right]$$

удовлетворяет соотношению

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots . t_{n+1}) = n\,![t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}],$$

где $[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}]$ обозначает разделенную разность порядка n функции e^u, причем аргументы (узлы) суть $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$. Автор ставит целью установить характеристическую функцию, функцию частот и функцию распределения случайной пременной

$$s = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{n+1} u_{n+1},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ суть произвольные постоянные. Вначале рассматривается частный случай, где s сводится к одной из переменных $\{u_j\}$. Оказывается, что все эти переменные имеют ту же характеристическую функцию $\Phi_{1,n}(t)$ — § 4 —, данную соотношением (7) и ту же функцию распределения $F_{1,n}(x)$ (8);

Рассматривается также частный случай, в котором сумма s сводится к сумме k переменных u. Для характеристической функции $\Phi_{k,n}(t)$ получается выражение, данное равенством (14), функция частот $f_{k,n}(x)$ дана равенством (15), функция же распределения $F_{k,n}(x)$ указана в § 9.

Для общего случая доказывается, без ограничения общности, что имеется $\lambda_{1=0}$ и

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k,$$

причем каждая из констант λ_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ имеет соответственно μ_j кратность с

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k = n + 1.$$

Характеристическая функция $\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t)$ записана в двух различных видах, вначале в качестве разделенной разности, а затем выражена видом, данным равенством (20), § 10.

Многочлены $S_1(x)$, $S_2(x), \ldots, S_{k-1}(x)$ степени $n-1$ в x, фигурирующие в этом равенстве, являются именно плотностями относительных вероятностей суммы S, соответственно в промежутках $[0, \lambda_2]$ $[\lambda_2, \lambda], \ldots,$ $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$. Далее доказывается, что таким образом полученные функции частот являются вообще непрерывными и что они также допускают непрерывные производные. В качестве применения исследуется переменная

$X_{j,e} = \dfrac{x_j^* + x_e^*}{2}$ и частный случай, когда все постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ являются различными между собой. Эти задачи называются задачами первого рода.

Далее располагаются переменные $\{u_j\}$ $(j = 1, 2 \ldots, n+1)$ в неубывающем порядке, где

$$0 \leqq u_1^* \leqq u_2^* \leqq \ldots \leqq u_{n+2}^* \leqq 1$$

и исследуются относительно переменных $\{u_j^*\}$ те же задачи, что и для переменных $\{x_j^*\}$. При замене, определенной равенствами (22), § 15, вводится в рассмотрение другая последовательность случайных переменных $\{v_j\}$,

имеющих такой же закон вероятностей как и переменные $\{u_j\}$. В свою очередь переменные $\{v_j\}$ расположены в неубывающем порядке и при помощи такой же замены переменных, определенной равенствами (22), вводят в рассмотрение новые последовательности случайных переменных, допускающих тот же закон вероятностей, что $\{u_j\}$ и $\{v_j\}$ и так далее. Так определяется бесконечная последовательность случайных переменных, представляющих обособленные единицы, подвергающиеся, однако, тому же закону вероятностей. Эти здадачи являются задачами второго или высшего рода. В качестве применения исследуется случайная переменная, которая в частных случаях сводится к переменным, рассматриваемым Р. А. Фишером и Молдоном.

В последней части работы в первую очередь рассматривается случай, когда точки равномерно распределены на конечном отрезке $[a, b]$ и показывается каким образом можно расширить результаты, полученные в первых двух частях для задач первого и второго рода.

Далее переходят к предельному случаю, когда число точек n как и длина l отрезка стремятся к бесконечности так, что соотношение $\frac{n}{l}$ имеет конечный и определенный предел δ.

Для случая, в котором константы $\{\lambda_j\}$ также как и показатели степени $\{\mu_j\}$ независимы от l и n, определяется характеристическая функция $\Omega(t)$ и функция частот $g(x)$ § 21. В качестве определения исследуется амплитуда образца, составленного из абсцисс последовательных точек k. В частности доказывается, что в пределе разности абсцисс двух последовательных точек становятся независимыми случайными переменными.

Для того чтобы указать ход рассуждения в том случае, когда константы λ остаются в конечном числе, в зависимости от l и n, рассматривается амплитуда образца, составленного из K разностей абсцисс двух последовательных точек. Определяется характеристическая функция и находится в частности, что эта амплитуда, умноженная на n, имеет тот же закон вероятностей, что и рассматриваемая в передыдущем амплитуда абсцисс последовательных точек k.

QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LA DIVISION D'UN SEGMENT PAR DES POINTS PRIS AU HASARD

(RÉSUMÉ)

Sur le segment [0,1] on prend au hasard n points $P_1, P_2, \ldots, P_n$, d'abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On admet pour loi de répartition la loi homogène des probabilités et que la position d'un ces points est indépendante de celle des $n - 1$ autres points. On range les points par ordre non décroissant de leurs abscisses, ou

$$0 \leqq x_1^* \leqq x_2^* \ldots \leqq x_n^* \leqq 1.$$

On pose

$$x_j^* = u_1 + u_2 + \ldots + u_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$1 - x_n^* = u_{n+1}.$$

On montre que la fonction caractéristique

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) = E\left[e^{t_1 u_1 + t_2 u_2 + \cdots + t_{n+1} u_{n+1}}\right]$$

vérifie la relation

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) = n!\ [t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}]$$

où $[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}]$ désigne la différence divisée d'ordre n de la fonction e^u, les arguments (noeuds) étant $t_1, t_2 \ldots, t_{n+1}$. On se propose de déterminer la fonction caractéristique, la fonction des fréquences et celle de répartition de la variable aléatoire

$$S = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{n+1} u_{n+1}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ sont des constantes arbitraires. On considère d'abord le cas particulier où s se réduit à l'une des variables $\{u_j\}$. On obtient que toutes ces variables ont la même fonction caractéristique $\Phi_{1,n}(t)$, — §4 — donnée par la relation (7), et la même fonction de répartition $F_{1,n}(x)$ — voir (8).

On considère de même le cas particulier où la somme S se réduit à la somme de k variables u. On obtient pour la fonction caractéristique $\Phi_{k,n}(t)$, l'expression donnée par l'égalité (14); la fonction des fréquences $f_{k,n}(x)$ est donnée par l'égalité (15) et celle de répartition $F_{k,n}(x)$ est indiquée au § 9.

Pour le cas général, on démontre qu'on peut admettre, sans restreindre la généralité, que l'on a $\lambda_1 = 0$, et

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$$

chacune des constantes λ_j $(j = 1,2, \ldots, k)$ ayant respectivement le degré μ_j de multiplicité, avec

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k = n + 1.$$

La fonction caractéristique $\Phi_s(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; t)$ est écrite sous deux formes distinctes, d'abord comme une différence divisée et, en second lieu, sous la forme donnée par l'égalité (20) du § 10.

Les polynômes $S_1(x)$, $S_2(x), \ldots, S_{k-1}(x)$ de degré $n-1$ en x qui figurent dans cette égalité sont précisément les densités des probabilités relatives à la somme s, respectivement dans les intervalles $[0, \lambda_2]$, $[\lambda_2, \lambda_3]$, ... $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$. On démontre ensuite que ces fonctions des fréquences ainsi obtenues sont, en général, continues et qu'elles admettent des dérivées continues aussi. Comme application, on étudie la variable $X_{j,e} = \dfrac{x_j^* + x_e^*}{2}$ et le cas particulier où les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ sont toutes distinctes. Ces problèmes sont appelés problèmes de première espèce.

On range ensuite les variables $\{u_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ par ordre non décroissant, ou

$$0 \leqq u_1^* \leqq u_2^* \leqq \ldots \leqq u_{n+2}^* \leqq 1$$

et on étudie relativement aux variables $\{u_j^*\}$ les mêmes problèmes que pour les variables $\{x_j^*\}$. En effectuant le changement défini par les égalités (22) du § 15, on introduit une autre suite de variables aléatoires $\{v_j\}$ qui suivent la même loi des probabilités que les variables $\{u_j\}$. A leur tour, les variables $\{v_j\}$ sont rangées par ordre non décroissant et, par le même changement de variables, défini

par les égalités (22), on y introduit une nouvelle série de variables aléatoires qui admettent la même loi des probabilités que les $\{ u_j \}$ et les $\{ v_j \}$. Et ainsi de suite. On définit de cette manière une suite infinie de variables aléatoires qui représentent des êtres distincts et qui sont pourtant soumises à la même loi des probabilités. Ces problèmes constituent les problèmes de seconde espèce ou d'espèces supérieures. Comme application, on étudie une variable aléatoire qui se réduit, pour des cas particuliers, à des variables considérées par R. A. Fisher et Mauldon.

Dans la partie finale de ce travail, on considère d'abord les cas où les points sont uniformément répartis sur un segment fini $[a, b]$ et on montre comment on peut y étendre les résultats obtenus dans les deux premières parties, pour les problèmes de première et de seconde espèce.

On passe ensuite au cas limite où le nombre n de points ainsi que la longueur l du segment tendent vers l'infini, de manière que le rapport $\frac{n}{l}$ ait une limite δ finie et bien déterminée.

Pour le cas où les constantes $\{ \lambda_j \}$ ainsi que les exposants $\{ \mu_j \}$ sont indépendants de n et l, on détermine la fonction caractéristique $\Omega(t)$ ainsi que la fonction des fréquences $g(x)$ — voir § 21. Comme application, on étudie l'amplitude d'un échantillon composé des abscisses de k points consécutifs. On démontre, plus particulièrement, qu'à la limite les différences des abscisses de deux points consécutifs deviennent des variables aléatoires indépendantes.

Pour indiquer la marche à suivre dans le cas où les constantes $\{ \lambda_j \}$, tout en restant en nombre fini, dépendent de n et de l, on considère l'amplitude d'un échantillon composé de k différences des abscisses de deux points consécutifs. On détermine la fonction caractéristique et on trouve, en particulier, que cette amplitude, multipliée par n, suit la même loi des probabilités que l'amplitude, considérée précédemment, des abscisses de k points consécutifs.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Berlin, 1937.
2. A. O. Ghelfand, *Iscislenie Konecinîh raznotei*. Gosudarstvennoi izdatelstvo tehniko-teoreticeskoi literaturî, Moscova, 1952.
3. H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton, 1946.
4. P. Mouldon, *Random Division of an Interval*. Proc. Cambridge Phil. Soc., aprilie 1951, p. 331—336.
5. R. A. Fisher, *Tests of Significance in Harmonic Analysis*. Proc. Roy. Soc. A. 125, 1929, vol. 54, p. 9.
6. E. Borel, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*. Paris, 1914.
7. — *Principes et formules classiques du Calcul des Probabilités*. Paris, 1925.
8. M. I. Kantorovici, *Operaţionnoe iscislenie i nestaţionarnie iavlenia v elektriceskih ţepiah*. Moscova, 1953.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

CONTRIBUŢII LA STUDIUL MIŞCĂRILOR ÎN MEDII POROASE*)

DE

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ

1. Introducere

Studiul teoretic şi experimental al mişcărilor în medii poroase, iniţiat de H. Darcy [1] şi J. Dupuit [2] acum 100 de ani, a căpătat o considerabilă extindere, mai ales în ultimii 30 de ani, ca o urmare firească a dezvoltării ştiinţei şi a multiplelor cerinţe din partea unor diferite ramuri ale tehnicii. În special, problemele ridicate de construcţiile hidrotehnice, de extracţia petrolului şi de tehnica irigaţiilor au determinat ca studiul mişcării lichidelor şi gazelor în sol să cunoască o înflorire excepţională, ajungîndu-se să se creeze chiar o disciplină nouă, denumită hidrogazodinamica subterană, care se ocupă cu studiul mişcării fluidelor compresibile sau incompresibile în mediile poroase. Cîmpul preocupărilor incluse în hidrogazodinamica subterană este totuşi prea restrîns pentru a putea cuprinde toate problemele ce se pot ridica în legătură cu mişcarea fluidelor în mediile poroase. Să dăm numai două exemple: în industria chimică se întîlnesc probleme de mişcări în medii poroase, fluidele putîndu-se prezenta, sub anumite condiţii, în faza lichidă, sau gazoasă, sau ambele deodată; de asemenea mişcarea gazelor în materialele absorbante, care se întrebuinţează la izolări acustice, ridică o altă serie de probleme complicate, tot de mişcări în medii poroase, care nu se încadrează în tînăra disciplină. Este lesne de văzut că faţă de o disciplină care s-ar ocupa de totalitatea sau marea majoritate a problemelor de mişcări în mediile poroase, hidrodinamica subterană ar apare ca un capitol particular; această disciplină va trebui să studieze mişcarea fluidelor *în* mediile poroase, în jurul lor, precum şi *interacţiunea* dintre aceste mişcări. Problemele, privite dintr-un punct de vedere aşa de general sînt foarte complexe, ceea ce a şi făcut ca ele să fie aşa de puţin studiate. În lucrarea de faţă atacăm problema mişcării fluidelor în jurul corpurilor de dimensiuni finite şi în ele, problemă ce n-a fost cercetată, judecînd după literatura consultată şi indicaţiile bibliografice ce le-am avut la îndemînă.

Necesitatea studierii unor astfel de probleme se impune atît din punct de vedere teoretic, cît şi practic. Pornind de la lucrările lui N. E. Jukov-

*) Lucrare prezentată Institutului de matematică în şedinţa din 25 mai 1955 şi susţinută la Facultatea de matematică, Universitatea «C. I. Parhon» Bucureşti, în ziua de 6 iunie 1955.

ski [3] și J. Boussinesq [4], continuînd cu lucrările lui N. N. Pavlovski — care s-a ocupat în special cu mișcarea apei de infiltrație sau construcțiile hidrotehnice, și ale cărui cercetări sînt în bună parte cuprinse în [5] și [6], cu ale lui B. K. Rizenkampf [7], G. Hamel — care s-a ocupat, printre altele, cu mișcarea apei prin baraje permeabile [8] — cu V. V. Wedernikov — al cărui nume este legat în special de scurgerea din canale [9] — L. S. Leibenzon, V. N. Scelkacev, V. V. Lapuk, M. Muskat — care au atacat probleme legate de industria petrolului și gazelor [10], [11], [12], [13] — hidrogazodinamica subterană s-a dezvoltat în timpul celui de al doilea război mondial, și după aceea, prin lucrările lui P. Ia. Polubarinova-Kocina [14], I. A. Ciarnîi [15], F. B. Nelson-Skorniakov [16], Galin, Sokolov, V. I. Aravin și S. N. Numerov [17] — pentru a nu cita decît cîteva nume — tratarea problemelor a devenit din ce în ce mai eficace, metodele fizicei matematice găsindu-și aplicații fructuoase în hidrogazodinamica subterană. Între timp, s-au făcut cîteva studii teoretice asupra unor fenomene fizice care au loc cînd fluidele traversează mediile poroase, cum ar fi schimbul de căldură între fluid și mediu [18], precum și intense studii experimentale, din care vom menționa cîteva în capitolul I. Abia în 1950 apare însă o lucrare de mecanica fluidelor, care se deosebea evident de cadrul consacrat al teoriei de pînă atunci a mișcărilor în mediile poroase, și în care se spuneau cîteva cuvinte despre problema generală a mișcării fluidelor în prezența corpurilor poroase; este vorba de lucrarea lui H. A. Rahmatulin [19], care studiază mișcarea unui fluid în jurul unui corp subțire poros. O lucrare apărută ceva mai tîrziu, dizertația lui H. Ia. Baiciorov [20], este dedicată mișcării în exteriorul unui înveliș subțire poros, curentul la mari distanțe fiind normal pe generatoarele cilindrului. Ambele lucrări consideră fluidul ideal, iar mișcarea staționară. Greutatea problemei, pentru un corp de dimensiuni oarecare, a fost remarcată de Rahmatulin în lucrarea citată, în acest caz neavînd numai o problemă exterioară, ci trebuind să aflăm scurgerea și înăuntrul corpului.

Menționăm că studii asupra mișcărilor în mediile poroase au început să fie întreprinse de curînd și în țara noastră; astfel, cercetări teoretice au făcut S. Vasilache [21], [22], I. Filimon [23], Șt. I. Gheorghiță [24], [25], [26]; de asemenea N. Patraulea, ale cărui lucrări merg pe o altă linie decît ale cercetătorilor menționați, a studiat probleme în legătură cu suprafețele permeabile [27], [28].

Primul capitol al lucrării se ocupă de noțiunile de bază ale mișcărilor în mediile poroase, de clarificarea diferenței dintre felul de a pune problemele de hidrogazodinamică subterană — disciplină în care problemele au căpătat o formulare matematică precisă — și modul cel mai general de a pune problemele de mecanica fluidelor în legătură cu corpurile permeabile, de ipotezele și restricțiile ce trebuie să ni le impunem, pentru a face un prim studiu abordabil. De asemenea, se dau și formulele pentru acțiunea hidrodinamică și se arată că paradoxul lui d'Alembert nu mai subsistă la corpurile poroase.

Capitolul al doilea se ocupă cu studiul mișcării staționare a fluidelor perfecte în prezența unui corp poros omogen și izotrop de dimensiuni finite. După ce se enunță noua problemă la limită a fizicei matematice, care apare cu această ocazie, se propune o metodă de rezolvare aproximativă, arătînd că soluția problemei este unică. Se aplică apoi metoda la cazul unui cilindru circular, cînd viteza la mari distanțe este normală pe axa cilindrului. Se studiază apoi

mișcarea cu circulație, cu vîrtej constant, și se extinde metoda la cazurile cînd în mediul poros avem un corp impermeabil, cînd mediul poros este continuat cu un mediu impermeabil, și cînd avem mai multe corpuri omogene. În sfîrșit, se consideră pe scurt și problema mișcării unui fluid compresibil în prezența unui corp poros.

Capitolul al treilea este dedicat mișcării fluidelor vîscoase în prezența unui corp poros. După ce se enunță problema generală și problema mișcării staționare la numere Reynolds mici, se face o aplicație la cazul sferei, ajungîndu-se la o generalizare a formulei lui Stokes. Folosind ecuațiile lui Oseen, se calculează și vîrtejul, arătîndu-se că el este mai mic în cazul corpurilor poroase, decît în cazul corpurilor impermeabile de aceeași suprafață. Capitolul se încheie cu cîteva observații asupra aplicării metodei la cazurile de combinații între un mediu poros și un mediu impermeabil, considerate în capitolul II.

Mișcării fluidelor în prezența corpurilor neomogene îi este consacrat al patrulea capitol. Făcîndu-se mai întîi o clasificare a corpurilor neomogene, se arată în continuare că, pentru corpurile cu neomogenitate de tipul II, condiția ca fluxul hidrodinamic să se anuleze prin suprafața corpului este îndeplinită. Problema fiind în acest caz foarte complexă, se consideră numai problemele cele mai simple, anume problema A și problema B. Capitolul se încheie cu cîteva cuvinte asupra cazului a mai multor corpuri neomogene.

În anexă am strîns cîteva paragrafe, care, deși importante, nu-și găseau un loc adecuat în capitolele lucrării. Astfel, am trecut în revistă unele lucrări anterioare, arătînd că două ipoteze făcute de H. A. Baiciorov sînt incompatibile între ele. În al doilea paragraf studiem problema A_0 pentru două cercuri concentrice, arătînd că, în cazuri particulare, se ajunge fie la formula lui Schwartz-Villat care rezolvă problema lui Dirichlet pentru cerc, fie la o formulă a lui Villat ce rezolvă o problemă mixtă relativă la coroana circulară. Al treilea paragraf conține tratarea problemei A_1, tot pentru două cercuri concentrice. La sfîrșitul anexei dăm cîteva indicații asupra problemelor de tip B, și rezolvăm problemele A_0 și A_1 pentru două cercuri concentrice.

Două concluzii mai importante se pot desprinde din lucrarea de față. Mai întîi remarcăm generalitatea metodei de corecție propusă, ea putîndu-se aplica atît pentru fluide ideale, cît și pentru fluide reale, atît pentru un singur corp, cît și pentru mai multe corpuri omogene sau neomogene; în al doilea rînd, remarcăm marea complexitate a noilor probleme la limită la care se ajunge, ceea ce justifică, cel puțin pentru lucrarea de față, ipotezele și simplificările admise.

Dezvoltării și aprofundării problemelor legate de mișcarea fluidelor în prezența corpurilor poroase și a problemelor la limită corespunzătoare, le va fi consacrată o serie de lucrări ulterioare.

Ținem să aducem călduroase mulțumiri profesorului Caius Iacob, care ne-a acordat tot sprijinul, ori de cîte ori am avut nevoie.

Capitolul I

GENERALITĂȚI ASUPRA MIȘCĂRILOR ÎN MEDII POROASE

2. Mediul poros și cîteva din caracteristicele sale

Printr-un mediu poros se înțelege un sistem de mici particule sau de fibre, în care se găsesc interstiții de diferite forme și dimensiuni. Dimensiunile acestor interstiții, numite pori, sînt foarte variate, începînd de la cîțiva Å pînă la frac-

ţiuni de mm. Cercetările făcute asupra repartiţiei porilor după dimensiuni par să arate că la unele materiale această repartiţie urmează o distribuţie maxwelliană modificată [29], [30], dar ea nu ne va interesa din punct de vedere hidrodinamic în lucrarea de faţă. Diversele stări de agregare în care se găsesc fluidele în mediile poroase [31], precum şi modurile de interacţiune între mediu şi fluidul ce circulă prin el, chestiuni studiate experimental într-o lungă serie de lucrări, de asemenea nu ne vor interesa aici, şi vom presupune că fluidul îşi păstrează constant faza sa iniţială, umplînd exclusiv toţi porii mediului, ale căror dimensiuni nu variază în timp. Dintre modurile de interacţiune ne vom ocupa numai de interacţiunea mecanică.

Să luăm un volum V oarecare din mediul poros şi să notăm cu V_1 volumul total al porilor ce se găsesc în V. O primă mărime ce caracterizează mediul poros este coeficientul de porozitate, sau, simplu, porozitatea, definită ca raportul dintre V_1 şi V, şi care se notează cu m:

$$m = \frac{V_1}{V}. \tag{1}$$

Pe m îl vom presupune constant în toate punctele unei regiuni determinate din mediul poros, limitîndu-ne, deci, la studiul mişcării în cazul corpurilor parţial omogene, sau, după denumirea ce am dat-o în capitolul IV, cu neomogenitate de tipul II.

Pentru a descrie mişcarea în mediul poros, va trebui să cunoaştem viteza, presiunea şi densitatea în fiecare punct din fluid, pentru ca pe baza lor să putem calcula debitul de fluid printr-o secţiune oarecare, precum şi tensiunile ce iau naştere. Aflarea riguroasă a acestor mărimi cere rezolvarea sistemului neliniar de ecuaţii cu derivate parţiale Navier-Stokes, împreună cu ecuaţia continuităţii şi ecuaţia de stare, pentru o configuraţie extrem de complicată a suprafeţelor solide în contact cu fluidul. O astfel de rezolvare a problemei este practic imposibilă, căci, pe de o parte, nu cunoaştem în amănunt structura extrem de complicată a porilor, iar, pe de altă parte, chiar dacă această structură ar fi cunoscută, nu avem posibilitatea practică de a rezolva ecuaţiile amintite. De aceea sîntem nevoiţi să ne mulţumim cu o descriere globală a mişcării, cu ajutorul unei noţiuni noi, numită viteză de filtraţie, definită ca volumul de fluid ce trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafaţă practicată în mediul poros. Dacă $\vec{u}$ este viteza medie, prin suprafaţa neocupată de mediul poros, dintr-o secţiune oarecare, suficient de mică, viteza de filtraţie $\vec{v}$ prin aceeaşi secţiune va fi definită de

$$\vec{v} = m\vec{u}, \tag{2}$$

deoarece se demonstrează foarte simplu că porozitatea medie superficială este egală cu porozitatea medie spaţială [14] *).

Să facem o observaţie importantă: dacă în studiul mişcării fluidelor se poate neglija uneori viscozitatea, considerîndu-se fluidul ca ideal, în mişcarea fluidelor în medii poroase nu putem să facem abstracţie de forţele de viscozitate, numărul lui Reynolds, ce caracterizează raportul dintre forţele de inerţie şi forţele de viscozitate fiind mic şi chiar foarte mic, ca urmare, în primul rînd, a dimensiunilor spaţiale foarte mici în cadrul cărora are loc mişcarea.

*) p. 25.

3. Legea lui Darcy

Prima lege de mișcare a unui fluid într-un mediu poros a fost stabilită de H. Darcy [1] pentru apă și ea se exprimă de obicei sub forma

$$\vec{v} = -k \operatorname{grad} h, \tag{3}$$

unde k este coeficientul de filtrație — denumit de unii coeficient de permeabilitate, grad $h = J$ poartă numele de înclinare sau pantă piezometrică, sau gradientul presiunii piezometrice, h fiind înălțimea piezometrică definită de

$$h = \frac{p}{\rho g} + z, \tag{4}$$

unde z este înălțimea geometrică deasupra unui plan de referință orizontal arbitrar ales, ρ este densitatea, g accelerația gravității, iar p presiunea, convenind să luăm axa Oz verticală, dirijată în sus.

Coeficientul k, ce are dimensiunile unei viteze (LT^{-1}) și este în general variabil cu punctul respectiv din mediu, cît și cu direcția vitezei, include în el atît mărimile ce caracterizează mediul poros, cît și cele ce caracterizează fluidul. În cazul cel mai general, K va fi un tensor de ordinul al doilea, avînd componentele sale funcție de coordonate, iar în cazul cel mai simplu va fi o constantă. Ca și m, k va fi socotit constant cel puțin într-o anumită regiune, deși în cazuri importante mediile sînt anizotrope și neomogene [32].

Pentru mișcarea staționară a unui fluid incompresibil ecuația continuității se va scrie

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

ceea ce înseamnă că, după (3) există un potențial al vitezelor,

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi, \tag{5}$$

unde, în virtutea lui (3),

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\rho g} + z\right) + c, \tag{6}$$

φ fiind o funcție armonică:

$$\Delta\varphi = 0. \tag{7}$$

Existența unui potențial al vitezelor, care este implicat în general de mișcarea irotațională a fluidelor perfecte, pare să contrazică observația de mai sus, anume că viscozitatea joacă un rol hotărîtor în mișcările de care ne ocupăm. Dar, deși mișcarea unui fluid vîscos este în general rotațională, același caracter avîndu-l și mișcarea în porii individuali, totuși, cînd se consideră un volum anumit din mediu, care conține un număr suficient de pori, rotațiile care au loc în pori se echilibrează, astfel încît, statistic, mișcarea globală este practic irotațională [33] *).

Pentru mișcarea unui gaz se ia, analog cu (3), [10] **)

$$\vec{v} = -k \operatorname{grad} p; \tag{8}$$

*) cap. V, p. 325.
**) p. 212, formula (8).

ecuația de stare se poate scrie

$$\gamma = \frac{1}{\beta} p^{\frac{1}{n}}, \tag{9}$$

unde n și β sînt constante, $\gamma = \rho g$, iar ecuația continuității, este tot pentru mișcarea staționară,

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Introducînd funcția

$$P = \frac{n}{(1+n)} p^{1+\frac{1}{n}}, \tag{10}$$

formula (8) se mai poate scrie, [10] *)

$$\gamma \vec{v} = -K \operatorname{grad} P, \tag{11}$$

P fiind o funcție armonică ($\Delta P = 0$).

Formulele (8), (9), (10) și (11) nu sînt esențiale pentru lucrarea de față. Ele vor fi folosite, în treacăt, numai în paragraful 15.

Din experiențele efectuate asupra mișcării fluidelor în mediile poroase, s-a tras concluzia că legea lui Darcy are un domeniu de valabilitate încadrat în anumite limite. N. N. Pavlovski a arătat că trebuie să existe o limită inferioară a vitezei, sub care ecuația (5) încetează de a mai fi valabilă, ca urmare a acțiunii forțelor moleculare [14] **).

S-a observat, într-adevăr, o descreștere considerabilă a coeficientului de filtrație pentru viteze foarte mici [34]. Există și o limită superioară de aplicabilitate a legii lui Darcy, și asupra căreia există diferite criterii. Un criteriu a fost dat tot de numărul lui Reynolds, exprimîndu-l în funcție de viteze de filtrație, diametrul efectiv al particulelor mediului, viscozitatea cinematică și porozitate [35]. Pentru viteze mari avem relația

$$v^2 = k \left| \operatorname{grad} h \right|, \tag{12}$$

denumită uneori legea lui Krasnopolski [36]. Între limita superioară de aplicabilitate a legii (3) și limita inferioară de aplicabilitate a legii (12) se aplică uneori legi avînd una din formele

$$\left.\begin{aligned} J &= Av + Bv^2, \\ v &= CJ^n, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

A, B, C fiind niște constante, iar n avînd o valoare cuprinsă între 1 și $\frac{1}{2}$.

Într-o mișcare oarecare se poate ca în toate punctele domeniului ocupat de mediul poros să fie aplicabilă legea (3) sau legea (12), sau una din legile (13), dar mai putem avea și cazuri mixte, cînd în unele puncte ale domeniului se aplică legea (3), și în alte regiuni una din legile (13). Noi propunem pentru caracterizarea mișcărilor în mediile poroase următoarea schemă, la fluidele incompresibile:

*) p. 215, formula (27).
**) p. 31.

Legea sau legile care caracterizează mișcarea	(3)	(12)	(13)	(3) + (12)	(12) + (13)	(3) + (12) + (13)
Tipul	L	T	M	LM	MT	G

Inițialele L și T nu trebuie să ne facă să credem că mișcarea de tip L ar fi o mișcare pur laminară, iar cea de tip T pur turbulentă. Studiul caracteristicilor mișcării în corpurile poroase este mult mai delicat decît ar părea la prima vedere.

Astfel, dacă în toate punctele mediului poros se aplică legea (3), zicem că mișcarea este de tipul L, cu care ne vom ocupa exclusiv în lucrarea de față. Probleme în care să avem regiuni din mediu unde se aplică o lege, iar în alte regiuni este aplicabilă altă lege, nici nu s-au tratat sistematic.

Ocupîndu-ne cu mișcările care ascultă de legea Darcy, vom mai presupune, ceea ce se face curent în toate lucrările de hidrogazodinamică subterană, că (3) este aplicabilă la viteza zero.

Legea lui Darcy mai este limitată și de dimensiunile porilor. În pori foarte mici, fluidele se mișcă mai încet decît cere legea [37], și pentru pori prea mari legea iar nu mai este valabilă, însăși noțiunea de viteză de filtrație pierzîndu-și în acest caz sensul; G. N. Camenschi a găsit că viteza critică superioară descrește pe măsura creșterii diametrului efectiv al granulelor (citat după [38]). În literatura dedicată terenurilor permeabile se găsesc tabele care indică pentru fiecare teren viteza limită de aplicare a legii lui Darcy [39]; totuși, măsurătorile efectuate au arătat că pentru viteze de cîteva ori mai mari decît viteza limită, diferența de legea lui Darcy este foarte mică.

Legea lui Darcy nu este aplicabilă numai solurilor, ci și unui mare număr de diverse materiale ce prezintă interstiții prin care fluidele pot circula [40], [41], [42], [43]; încă de acum 100 ani, Schmidt a stabilit că scurgerea prin membranele animale se supune unei legi de forma

$$Q = k\,(P - a), \tag{14}$$

unde Q este debitul, P este presiunea, iar k și a sînt niște constante, deci în fond tot o lege de tip Darcy pentru $P > a$ [44].

Cele mai multe încercări de justificare teoretică a legii lui Darcy s-au dat plecînd de la legea lui Poiseuille (de exemplu [45], [46], [47]). S-ar mai putea încerca drept un model teoretic al mediului poros, de exemplu, o rețea de particule sferice dispuse în mod uniform una lîngă alta și a se vedea cum se face scurgerea prin această rețea [48]. Legea lui Darcy a mai fost dedusă și semiempiric, pe baza ecuațiilor generale ale mecanicii fluidelor, în care se introduc niște forțe de rezistență, proporționale cu viteza, aceasta fiind chiar viteza de filtrație. În orice caz, ajungem la următoarea concepție asupra mișcării: volumul ocupat de mediul poros prin care are loc mișcarea fluidului se presupune complet ocupat de fluid, viteza în fiecare punct din volumul considerat luîndu-se egală cu viteza de filtrație, Această imagine ne va fi utilă mai tîrziu.

Să observăm că pentru materialele poroase cu o structură mai fină, deci acelea la care considerațiile făcute asupra structurii mediului poros se aplică mai bine, valoarea coeficientului de filtrație k se găsește că are o valoare foarte

mică. Din tabela dată în [14] *), se vede că valorile lui k, la materialele menționate, este mai mic, și chiar mult mai mic, decît 10^{-2} cm/s.

Între coeficienții k și m se poate stabili o legătură; în literatură se găsesc formule ce exprimă pe k în funcție de m și de alți coeficienți, unde $k = k(m)$ este astfel încît $k(0) = 0$ (de exemplu [10]) **).

4. Condițiile speciale de studiu ale problemelor

După ce am văzut cu ce restricții atacăm în prezent problemele, restricții admise tacit în general în toate lucrările teoretice asupra mișcărilor în medii poroase, să vedem ce restricții importante vom înlătura de hidrogazodinamica subterană.

În primul rînd, în hidrogazodinamica subterană se consideră în majoritatea problemelor că mediul poros se întinde pînă la infinit, cel puțin într-o direcție; aici vom considera în genere *corpuri poroase de dimensiuni finite* sau care se întind pînă la infinit *cel mult* într-o direcție.

În al doilea rînd, în ceea ce privește condițiile la suprafața de separare între fluid și mediul poros, la mișcarea apelor subterane se ia presiunea pe suprafața mediului egală cu presiunea hidrostatică, remarcîndu-se că vitezele lichidului sînt mici, atît în mediul poros, cît și pe suprafața de separare; aici, în jurul corpului fluidul putîndu-se mișca cu viteze apreciabile, presiunea care ia naștere pe suprafața corpului va putea diferi mult de la punct la punct, funcție de viteza locală a fluidului, și atenția noastră va fi concentrată în special asupra interacțiunii dintre mișcarea interioară și cea exterioară corpului poros. Cu alte cuvinte, *în hidrogazodinamica subterană nu ne interesa deloc mișcarea fluidului din exteriorul mediului poros, pe cînd aici se ține seama tocmai de această mișcare.*

În problemele tratate vom neglija de asemenea greutatea fluidului, ca în multe probleme de hidroaeromecanică.

Considerînd însă problema mișcării în jurul unui corp, trebuie să ținem seama de vîrtejurile care iau naștere ca urmare a forțelor ce acționează continuu asupra fluidului, și care se află mai ales în partea aval a corpului, cînd la mari distanțe fluidul are o mișcare de translație [49] ***). Se știe, însă, că progresele mecanicii fluidelor ideale au fost făcute în cea mai mare parte în cazurile în care vîrtejurile pot fi neglijate, sau se pot aproxima printr-o schemă simplă. De aceea considerăm justificat, cel puțin în lucrarea de față, să neglijăm influența vîrtejurilor asupra mișcării fluidelor ideale, incompresibile sau compresibile. Chiar și așa, se va vedea că problemele la limită la care sîntem conduși sînt foarte grele.

Asupra suprafețelor corpurilor poroase vom face ipoteza că ele satisfac în fiecare punct condițiile lui Liapunov [50], și deci că, în particular, nu avem puncte singulare pe suprafețe considerate [51].

Dacă ne ocupăm de mișcarea fluidelor în prezența corpurilor poroase, putem întrevede două cazuri importante : cînd corpul poros este scufundat complet într-un fluid, sau cînd corpul poros este scufundat parțial într-un fluid.

---

*) p. 29.

**) p. 198—200.

***) Th. von. Karmana. J. M. Burgers, *General Aerodynamic Theory, Perfect Fluids.*

În ultimul caz, la trecerea fluidului prin mediul poros se formează o suprafață liberă. Ne vom ocupa aci de primul caz, și anume cînd corpul poros se găsește într-un fluid nelimitat.

5. Acțiunea hidrodinamică exercitată asupra corpurilor poroase

În literatura consacrată mișcărilor în mediile poroase nu găsim formule pentru acțiunea hidrodinamică exercitată asupra unui corp poros, deoarece însăși problema mișcării fluidelor în prezența corpurilor poroase nu a fost studiată. Astfel de formule le-am dat în [26]; aici vom reaminti, extinzîndu-le, formulele pentru acțiunea hidrodinamică datorită fluidelor incompresibile, pentru mișcările în corp de tip L.

Forța de filtrație care se exercită asupra unității de volum a mediului poros este [14]*)

$$\vec{F} = \frac{m\gamma}{k}\vec{v},$$

sau, în virtutea lui (3),

$$\vec{F} = -m \operatorname{grad} p.$$

Pe lîngă forța $\vec{F}$, asupra corpului poros se mai exercită niște forțe aplicate pe suprafața S. Însemnînd prin Φ_n vectorul tensiunilor care corespunde normalei exterioare $\vec{n}$ într-un punct oarecare de pe S, și notînd că suprafața elementară ce vine în contact cu fluidul exterior este $(1 - m)\, d\sigma$, avem pentru forța totală

$$\vec{R} = \int_S (1 - m)\, \vec{\Phi}_n\, d\sigma - \int_V m \operatorname{grad} p\, d\tau. \tag{15}$$

Pentru mediile omogene m este o constantă, și aplicînd teorema lui Gauss, obținem

$$\vec{R} = (1 - m) \int_S \vec{\Phi}_n\, d\sigma - m \int_S p\, \vec{n}\, d\sigma. \tag{16}$$

Expresia momentului se găsește în mod analog,

$$\vec{M} = \int_S (1 - m)\, \vec{r} \times \vec{\Phi}_n\, d\sigma - \int_V m\, \vec{r} \times \operatorname{grad} p\, d\tau, \tag{17}$$

în general, și

$$\vec{M} = (1 - m) \int_S \vec{r} \times \vec{\Phi}_n\, d\sigma - m \int_S p\, \vec{r} \times \vec{n}\, d\sigma \tag{18}$$

la corpurile omogene.

Punînd, de exemplu, pe (16) sub forma

$$\vec{R} = \int_S \vec{\Phi}_n\, d\sigma - m \int_S \left(\vec{\Phi}_n + p\, \vec{n}\right) d\sigma,$$

am avea impresia că influența mediului poros asupra lui $\vec{R}$ se face simțită numai prin a doua integrală, căci făcînd $m = 0$, obținem expresia lui $\vec{R}$

*) p. 64.

pentru un corp impermeabil de aceeași suprafață. Nu trebuie să uităm însă că atît p cît și $\vec{\Phi}_n$ se determină ținînd seama de mișcarea în interiorul corpului, în care intervine neapărat coeficientul k; mai corect am putea scrie

$$\vec{R}(x, y; k, m) = \int_S \vec{\Phi}_n(x, y; k; m)\, d\sigma - m \int_S [\vec{\Phi}_n(x, y; k; m) + p(x, y; k; m)\vec{n}]\, d\sigma,$$

ceea ce pune în evidență dependența lui R atît de m, cît și de k. În dreapta am pus semnul ; după k, vrînd să notez că $\vec{\Phi}_n$ și p pot depinde, în general, și de m, în orice caz dependența lui $\vec{\Phi}_n$ și p de k fiind certă.

Înlocuind pe k în funcție de m prin una din formulele ce se găsesc în literatură, mai putem scrie simbolic

$$\vec{R}(x, y; m) = \int_S \vec{\Phi}_n(x, y; m)\, d\sigma - m \int_S [\vec{\Phi}_n(x, y; m) + p(x, y; m)\vec{n}]\, d\sigma,$$

și cînd $m = 0$ regăsim formula corespunzătoare corpului impermeabil.

Pentru fluidele ideale se știe că $\vec{\Phi}_n = -p\vec{n}$, astfel încît (16) și (18) conduc la

$$\vec{R} = -\int_S p\vec{n}\, d\sigma, \tag{19}$$

$$\vec{M} = -\int_S p\vec{r} \times \vec{n}\, d\sigma, \tag{20}$$

sensul pozitiv al normalei fiind cel exterior.

Să reținem că ideile noastre despre forțele excitate asupra mediului poros diferă de ale lui B. K. Rizenkampf, așa cum sînt expuse în [14]*), Rizenkampf consideră că avem 3 categorii de forțe: forțele de greutate $\vec{F}_1$ ale particulelor mediului poros, forțele de presiune $\vec{F}_2$ ale fluidului asupra acelorași particule, și forțele de rezistență $\vec{F}_3$ ce iau naștere cînd fluidul trece prin mediu. Aici noi nu ținem seamă de prima categorie, forțele din a doua categorie au expresia

$$\vec{F}_2 = -(1 - m)\,\text{grad}\, p,$$

și $\vec{F}_2$ adunat cu $\vec{F}_3$, identic cu expresia lui $\vec{F}$, dă pentru rezultanta forțelor de volum :

$$\vec{S} = -\,\text{grad}\, p,$$

ceea ce ne dă în total pentru un volum oarecare din mediul poros o forță $\vec{R}$ egală chiar cu (19) ; dar pe suprafața corpului — pentru a fixa ideile fie fluidul ideal și corpul omogen — mai avem acțiunea forțelor superficiale, care va fi egală cu

$$\vec{R}'_s = -(1 - m)\int_s p\vec{n}\, d\sigma.$$

*) p. 63—64.

Adunînd pe $\vec{R}_s$ cu $\vec{R}'_{s'}$ am obține

$$\vec{R}_s + \vec{R}'_s = -2\int_s p\vec{n}\,d\sigma + m\int_s p\vec{n}\,d\sigma$$

și ar urma ca pentru $m = 0$ să avem $R_s + \vec{R}'_s = -2\int_s p\vec{n}\,d\sigma$, adică dublul forței reale. Cu modelul cu care lucrăm, forța $\vec{F}_2$ ni se pare superfluă, și de aceea am considerat ca forță masică numai pe $\vec{F}$ dat mai înainte.

Notăm că dacă urmăm calculele noastre, sau cele ale lui R i z e n k a m p f, unde ținem seama numai de forțele de volum asupra corpului poros, în cazul fluidelor ideale ajungem la aceleași rezultate, adică (19) și (20).

Formulele (19) și (20) sînt formal identice cu formulele ce dau forță și momentul în cazul fluidelor ideale [52] *), notăm însă că p depinde neapărat de k.

Putem trage următoarele concluzii:

Forța și momentul exercitat de un fluid ideal asupra unui singur corp poros omogen și izotrop depind de coeficientul de filtrație k *al mediului din care este constituit corpul.*

În cazul general, acțiunea hidrodinamică depinde atît de porozitatea m, *cît și de* k.

Cum între k și m există o relație $K = k(m)$, urmează că *acțiunea hidrodinamică poate fi exprimată pînă la urmă numai în funcție de* m, și deci și la fluidele ideale acțiunea hidrodinamică depinde numai de m, însă această dependență nu este explicită, ci se face prin intermediul lui k.

Calcule efective ale acțiunii hidrodinamice le vom face în capitolele II și III.

Pe baza lui (19) și (20) putem ajunge imediat la o generalizare a formulelor Blasius-Ciaplîghin. Scriem formulele pentru cazul plan

$$\vec{F} = -\int_C p\vec{n}\,ds, \qquad \vec{M} = -\int_C p\vec{r}\times\vec{n}\,ds,$$

$\vec{F}$ și $\vec{M}$ fiind acum dați pe unitatea de lungime, și introducem potențialul complex $f = \varphi + i\psi$ a mișcării fluidului în domeniul exterior corpului. Notînd cu α unghiul pe care îl face elementul de contur ds cu axa Ox, putem scrie formulele acțiunii hidrodinamice sub forma complexă :

$$F_x - iF_y = -i\int_C pe^{-2i\alpha}\,dz\ , \quad M = Re\int_C pe^{-2i\alpha}\,zdz.$$

Ținînd seama acum că între viteză și tangenta la contur avem un unghi pe care-l notăm cu α',

$$\frac{df}{dz} = u - iv = Ve^{-i(\alpha+\alpha')} \qquad (V^2 = u^2 + v^2),$$

pe contur, viteza pe C nemai fiind tangentă la aceasta, și aplicînd teorema lui Bernoulli găsim

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\int_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 e^{2i\alpha'}\,dz, \tag{21}$$

$$M = -\frac{\rho}{2}\,Re\left\{\int_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 e^{2i\alpha'}\,zdz\right\}, \tag{22}$$

*) p. 232.

unde

$$\alpha' = \operatorname{arctg} \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}}. \tag{23}$$

Cînd coeficientul de filtrație scade, $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\right|$ scade și el, iar pentru corpurile impermeabile $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, deci $\alpha' = 0$, și regăsim formulele Blasius-Ciaplîghin sub forma lor cunoscută [52] *).

La fluidele compresibile se pot da formule pentru acțiunea hidrodinamică, în care să intervină funcția P [26].

Pentru corpurile neomogene se pot obține de asemenea ușor expresii pentru $\vec{R}$ și $\vec{M}$.

6. Inexistența paradoxului lui d'Alembert la corpurile poroase

Folosindu-se teorema impulsului se poate da o formă diferită expresiilor (19) și (20). Aici ne va interesa numai să vedem dacă pentru mișcarea staționară irotațională a fluidelor perfecte incompresibile, în cazul corpurilor poroase, paradoxul lui d'Alembert mai subsistă. Intuitiv, n-ar mai trebui să întîlnim acest paradox, deoarece pentru mișcarea din interiorul corpului trebuie învinse neapărat niște forțe de frecare.

Să presupunem, pentru a fixa ideile, că fluidul la mari distanțe este animat de o mișcare de translație cu viteza v_0, corpul — în repaus — este mărginit de o suprafață S ce îndeplinește condițiile specificate mai sus, iar axa Ox a unui sistem de referință fix este luată paralel cu V_0. Cînd corpul este impermeabil, putem scrie potențialul vitezelor

$$\varphi = V_0 x + \varphi_1 (x, y, z), \tag{24}$$

unde φ_1, armonică în exteriorul lui S, se determină prin condițiile la limită cunoscute:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ pe } S, \quad \operatorname{grad} \varphi_1 = 0 \quad \text{pentru } r = \infty.$$

În cazul unui corp poros de aceeași suprafață vom putea scrie

$$\varphi = V_0 y + \varphi_1 (x, y, z) + K\varphi_2 (x, y, z; k), \tag{25}$$

unde φ_2 este de asemenea o funcție armonică în exteriorul lui S, k este un parametru ce ține seama de proprietățile corpului și ale fluidului care îl traversează, funcție de k sau m, astfel încît $K(0) = 0$, la un coeficient de filtrație nul trebuind să regăsim pe (24).

Luăm acum o suprafață închisă S_1, de exemplu o sferă, ce include pe S, neavînd cu aceasta nici un punct comun. Vom aplica teorema impulsului la

*) p. 314.

volumul limitat de cele două suprafețe, ținînd seama că acum fluidul trece și prin suprafața S. Să notăm cu $\vec{R}$ forța totală aplicată asupra corpului poros, cu $\vec{R}_1$ rezultanta forțelor ce acționează pe suprafața S_1, iar cu n normala exterioară la S sau S_1. Se știe că vom avea atunci [53]

$$d\vec{H} = d\int_{S_1} \rho\varphi\,\vec{n}\,d\sigma_1 - d\int_S \rho\varphi\,\vec{n}\,d\sigma + \int_{S_1} \rho\,\vec{v}\,v_n\,d\sigma_1 dt - \int_S \rho\,\vec{v}\,v_n\,d\sigma\,dt$$

și cum $\vec{H} = \vec{R}_1 - \vec{R}$, rezultă că pînă la urmă

$$\vec{R} = \frac{d}{dt}\int_S \rho\varphi\,\vec{n}\,d\sigma + \int_S \rho\,\vec{v}\,v_n\,d\sigma + \int_{S_1} \rho\left(\frac{v^2}{2}\,\vec{n} - \vec{v}\,v_n\right)d\sigma_1,$$

termenul al doilea fiind caracteristic corpurilor poroase, unde $v_n \neq 0$.

Făcînd acum ca raza sferei S_1 să $\to \infty$, obținem

$$\vec{R} = \frac{d}{dt}\int_S \rho\varphi\,\vec{n}\,d\sigma + \int_S \rho\,\vec{v}\,v_n\,d\sigma, \tag{26}$$

iar în cazul mișcării staționare, care ne interesează în lucrarea de față,

$$\vec{R} = \int_S \rho\,\vec{v}\,v_n\,d\sigma. \tag{27}$$

Dar $\vec{v}$, după (25), este dat de expresia

$$\vec{v} = V_0\,\vec{i} + \operatorname{grad}\varphi_1 + K\operatorname{grad}\varphi_2. \tag{28}$$

Introducînd pe (28) în (27) și ținînd seama că fluxul hidrodinamic prin S trebuie să fie nul, și că

$$V_0\cos(n, x) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0,$$

în virtutea celor spuse asupra lui φ_1, ajungem să scriem pentru $\vec{R}$ expresia

$$\vec{R} = K\rho\int_S (\operatorname{grad}\varphi_1 + K\operatorname{grad}\varphi_2)\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\,d\sigma. \tag{29}$$

Mărginindu-ne numai la termenii de ordinul întîi în K, mai putem scrie

$$\vec{R} = K\rho\int_S \operatorname{grad}\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\,d\sigma, \tag{30}$$

expresie ce se mai poate încă simplifica, deoarece am văzut că φ_2 poate fi el însuși o funcție de K.

În concluzie, *paradoxul lui d'Alembert nu mai există pentru mișcarea staționară irotațională a fluidelor ideale în prezența corpurilor poroase*, deoarece din (28) (29 și (39) rezultă că, în general, $\vec{R} \neq 0$, cum de altfel se va vedea și din exemplele date la capitolul II.

Cînd $K \to 0$, $\vec{R} \to 0$ şi se regăseşte, bineînţeles, paradoxul lui d'Alembert. Să mai notăm că (28), (29) sau (30) ne oferă o posibilitate de verificare a rezultatelor găsite prin (19).

Capitolul II

MIŞCAREA FLUIDELOR IDEALE ÎN PREZENŢA CORPURILOR POROASE OMOGENE

7. Problema generală

Pentru a găsi mişcarea unui fluid nelimitat în care se găseşte un corp poros omogen de coeficient de filtraţie k, va trebui să explicităm mai întîi condiţiile la limită pe suprafaţa corpului. Să observăm, de la început, că mişcarea în interiorul corpului nu se poate obţine din suprapunerea peste potenţialul mişcării neperturbate — în absenţa corpului — a unui potenţial perturbator, ecuaţiile de mişcare în mediul poros fiind diferite de cele ale fluidului liber; mişcarea în exterior o putem studia însă pornind de la potenţialul mişcării în absenţa corpului, şi adăugînd un potenţial perturbator, în exteriorul corpului rămînînd valabile aceleaşi ecuaţii de mişcare ca şi în absenţa sa.

Ca să fixăm ideile, vom începe prin a considera cazul cînd fluidul la mari distanţe are o mişcare de translaţie cu viteza V_0.

Vom nota cu D_1 domeniul exterior suprafeţei S a corpului, iar cu D_2 domeniul interior aceleiaşi suprafeţe. Condiţiile ce vor trebui să fie satisfăcute sînt acele obişnuite pe suprafaţa de separare a două medii: presiunea şi viteza normală să fie continue la traversarea suprafeţei. Notînd cu φ_i potenţialul vitezelor în D_i $(i = 1, 2)$, presiunea într-un punct oarecare din D_1 va fi

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2}\left[V_0^2 - (\operatorname{grad} \varphi_1)^2\right],$$

iar în D_2 presiunea va fi dată de

$$p = -\frac{\rho g}{k}\varphi_2;$$

condiţia relativă la presiune se va scrie deci

$$p_0 + \frac{\rho}{2}\left[V_0^2 - (\operatorname{grad} \varphi_1)^2\right] = -\frac{\rho g}{k}\varphi_2 \text{ pe } S. \tag{1}$$

Cealaltă condiţie se scrie

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}, \qquad \text{pe } S, \tag{2}$$

convenind să luăm totdeauna ca pozitiv sensul normalei exterioare la suprafaţă.

Problema se reduce deci la determinarea a două funcții, φ_1 și φ_2, care satisfac condițiile (1) și (2), armonice în D_1, respectiv D_2, cu excepția punctului de la infinit, unde trebuie să avem

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = V_0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \qquad (r = \infty), \tag{3}$$

convenind să luăm axa Ox paralelă cu direcția curentului la mari distanțe.

Odată cu condițiile (1), (2), (3,) mai trebuie să scriem că în D_2 nu avem surse, ceea ce se exprimă cu ajutorul derivatei normale a lui φ_1 pe S :

$$\int_S \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\sigma = 0, \tag{4}$$

Problema la limită neliniară, care am întîlnit-o aci, este un nou tip de problemă la limită a fizicei matematice, și ea se poate enunța, în general, astfel:

Să se determine două funcții, φ_1 și φ_2, prima definită în domeniul D_1 care conține punctul de la infinit, iar a doua în domeniul simplu conex D_2, complementar lui D_1, știind că ele sînt armonice, iar pe frontiera comună a lui D_1 și D_2 satisfac condițiile

$$A - (\text{grad } \varphi_1)^2 = B\,\varphi_2, \tag{1'}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}, \tag{2}$$

$$\int_S \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\sigma = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{r \to \infty} (\text{grad } \varphi_1) = V_0 \vec{i}, \tag{3'}$$

A, B și V_0 fiind niște constante, $A > 0$, $B < 0$, cu $|B| \gg 1$.

În cazul plan, introducînd potențialele complexe, problema se poate enunța astfel :

Să se determine două funcții de variabilă complexă,

$$f_1(z) = \varphi_1(x, y) + i\psi_1(x, y) \quad \text{și} \quad f_2(z) = \varphi_2(x, y) + i\psi_2(x, y),$$

prima definită în domeniul D_1, care conține punctul de la infinit,iar a doua în domeniul simplu conex D_2, complementar lui D_1, știind pe frontiera lor comună C, părțile reale ale lui f_1 și f_2 satisfac condițiile (1'), (2), (4), iar

$$\lim_{z \to \infty} [f_1(z) - V_0 z] = 0, \tag{3''}$$

semnificația constantelor fiind cea de mai sus.

Constantele A și B n-au aceleași dimensiuni:

$$[A] = L^2 T^{-2}, [B] = T^{-1}.$$

8. Metoda de rezolvare

Pentru a rezolva problema la limită enunțată, vom porni de la observația făcută la paragraful 3, anume că valoarea coeficientului de filtrație este foarte mică, astfel încît aspectul general al mișcării va diferi puțin față de mișcarea ce rezultă pentru corpul impermeabil. Aceasta ne sugerează să căutăm pe φ_1 sub forma unei serii după puterile lui k, primul termen trebuind să coincidă cu potențialul vitezelor în cazul mișcărilor în jurul corpului de aceeași suprafață, însă impermeabil:

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + k\varphi_{11} + k^2 \varphi_{12} + \ldots, \tag{5}$$

unde funcțiile φ_{1i} $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ satisfac ecuația lui Laplace. Cît privește funcția φ_2, cu ajutorul căreia aflăm presiunea și viteza în D_2, vom încerca o dezvoltare de forma

$$\varphi_2 = k\,(\varphi_{20} + k\,\varphi_{21} + k^2\,\varphi_{22} + \ldots), \tag{6}$$

plecînd de la constatarea că viteza în interiorul corpului trebuie neapărat să se anuleze pentru $k = 0$; φ_{2i} $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ vor trebui de asemenea să fie armonice.

În alte probleme ale mecanicei fluidelor, unde se întîlnesc parametri mici — cum ar fi mișcarea fluidelor vîscoase la numere Reynolds mici — se încearcă de asemenea dezvoltarea anumitor funcții după puterile parametrului, dar pe cînd în acele probleme se caută satisfacerea, cu o anumită aproximație, a unor ecuații cu derivate parțiale, și satisfacerea exactă a unor condiții la limită liniare, aici, cu dezvoltările (5) și (6) vom încerca să satisfacem aproximativ niște condiții la limită neliniare ale unor funcții ce satisfac ecuații cu derivate parțiale liniare.

O dificultate ar părea aici că subsistă în ceea ce privește parametrul k, care se știe că are dimensiunile unei viteze, însă în locul lui k putem oricînd să luăm ca parametru mărimea $K = \dfrac{kV_0}{Lg}$ unde L este o mărime caracteristică a problemei, și să scriem (5) și (6) în funcție de noul parametru adimensional K; în cazurile care ne interesează K va fi totdeauna < 1, și chiar $\ll 1$.

Folosirea seriilor (5) și (6) revine la un procedeu de aproximații succesive pentru îndeplinirea condițiilor (1) și (2) : pentru $k = 0$ avem aproximația de ordin zero φ_{10}, pentru φ_1, și φ_{20} pentru φ_2, căci deși viteza în D_2 se anulează, adică aproximația de ordin zero a vitezei din interiorul corpului este egală cu zero, aproximația de ordin zero a presiunii nu este nulă, și anume are expresia $-\rho g\varphi_{20}$. Am fi putut ca în loc să pornim de la dezvoltarea (6) să luăm

$$p_2 = p_{20} + kp_{21} + k^2 p_{22} + \ldots,$$

și am fi ajuns în aceeași situație, căci pentru $k = \text{const.}$, φ_2 este proporțional cu $p_2\left(p_2 = -\dfrac{\rho g}{k}\varphi_2\right)$, și mersul calculelor nu se schimbă, esențial, cu nimic.

Tocmai cîmpul scalar p_{20} creează un cîmp vectorial $\vec{v}_{21}$ în D_2, căci $\vec{v}_2 = -\dfrac{k}{\rho g}\,\text{grad}\, p_2$, iar $\vec{v}_{20} = 0$.

Introducînd acum dezvoltările (5) și (6) în (1), vom avea pe suprafața S, egalînd coeficienții puterilor succesive ale parametrului k :

$$\left.\begin{aligned} p_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2 - \frac{\rho}{2} (\operatorname{grad} \varphi_{10})^2 &= -\rho g \varphi_{20}, \\ \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial n} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (7), (8)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi_{10} \cdot \operatorname{grad} \varphi_{11} &= g \varphi_{21}, \\ \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial n}, \end{aligned}\right\} \quad (9), (10)$$

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{grad} \varphi_{11})^2 + 2 \operatorname{grad} \varphi_{10} \cdot \operatorname{grad} \varphi_{12} &= 2 g \varphi_{22}, \\ \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial n} \end{aligned}\right\} \quad (11), (12)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{t=0}^{t=l-1} \operatorname{grad} \varphi_{1,t} \cdot \operatorname{grad} \varphi_{1,l-t} = g \varphi_{2,l}, \quad (l \text{ impar}), \tag{13}$$

$$\frac{\partial \varphi_{1,l}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{2,l-1}}{\partial n}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{2} \left(\operatorname{grad} \varphi_{1, \frac{l}{2}} \right)^2 + \sum_{t=0}^{t=l-2} \operatorname{grad} \varphi_{1,t} \cdot \operatorname{grad} \varphi_{1,l-t} = g \varphi_{2,l} \ (l \text{ par}). \tag{13'}$$

Ecuațiile (7) și (8) reprezintă aproximația de ordin zero, ecuațiile (9) și (10) pe cea de ordin 1, ș.a.m.d.

Condiția (3) se desface în

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial x} = V_0, \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial z} = 0, \ m \text{ întreg} \geqslant 1 \end{aligned}\right\} \text{ pentru } r = \infty, \tag{3'''}$$

faptul că avem $k = 0$ sau $k \neq 0$ neinfluențînd mișcarea în vecinătatea punctului de la infinit, iar (4) devine

$$\int_S \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial n} d\sigma = 0 \quad (q = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4'}$$

Procedeul de urmat este clar : ecuația (8) ne arată că avem de rezolvat o problemă Neumann pentru exteriorul lui S, știind că în punctul de la infinit avem (3''), adică trebuie să găsim mișcarea fluidului incompresibil care are o mișcare de translație la mari distanțe, cînd suprafața S este impermeabilă; odată φ_{10} determinat în D_1, din (7) aflăm valorile pe care le ia φ_{20} pe S, și pentru a afla pe φ_{20}, în orice punct din D_2, trebuie să rezolvăm o problemă Dirichlet

interioară ; de îndată ce φ_{20} a fost găsit, (10) ne furnizează valoarea pe S a lui $\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial n}$, și deci sîntem conduși la o nouă problemă Neumann exterioară pentru aceeași suprafață S, la infinit avînd condiția corespunzătoare din (3‴) ; φ_{11} introdusă în (9) ne dă valoarea lui φ_{21} pe S, și cădem iarăși peste o problemă Dirichlet interioară, ș.a.m.d. Problema se poate reduce astfel la rezolvarea alternativă a problemelor fundamentale ale teoriei potențialului.

Rămîne să ne asigurăm că, în procesul descris, condițiile (4′), care permit rezolvarea problemelor Neumann întîlnite, sînt satisfăcute. Pentru prima aproximație ele sînt, evident, îndeplinite ; pentru celelalte funcții φ_{1i} $(i = 1, 2, \ldots)$ ele sînt îndeplinite în virtutea condițiilor (14) și a unei teoreme din teoria funcțiilor armonice.

Unicitatea determinării funcțiilor φ_{ji} $(j = 1, 2 \; ; \; i = 0, 1, 2, \ldots)$ rezultă propriu-zis din unicitatea soluției problemei lui Neumann ; într-adevăr, se poate găsi numai o singură funcție φ_{10}, care să fie armonică, și care, pe lîngă prima condiție din (4′), să satisfacă primele trei condiții din (3‴) ; φ_{10} la rîndul ei ne dă în fiecare punct al lui S o presiune bine determinată, și știm că problema Dirichlet interioară admite o soluție și numai una singură ș.a.m.d.

Să arătăm că anularea vitezei V_0 atrage după sine anularea vitezelor în D_1 și D_2. În acest caz, la infinit trebuie să avem grad $\varphi_{10} = 0$, și știm că φ_{10} va fi atunci egal cu o constantă ; pe S vom avea și pe φ_{20} constant, și anume egal cu $-\frac{p_0}{\rho g}$; în virtutea unei teoreme cunoscute, cum φ_{20} nu are singularități în D_2, rezultă că pretutindeni în D_2, φ_{20} are valoarea de pe frontieră, și aserțiunea noastră este întemeiată, deoarece rezultă imediat $\varphi_{ji} \equiv 0$ $(j = 1, 2; \; i = 1, 2, \ldots)$.

Tot în virtutea unei teoreme din teoria funcțiilor armonice rezultă că valorile presiuni în D vor fi cuprinse între valorile extreme pe care le ia pe S. De asemenea, proiecțiile u, v, w, pe trei direcții rectangulare vor fi în D_1 pretutindeni mai mici decît maximele acelorași mărimi de pe suprafața S.

În cazul plan, ținînd seama de (8), condițiile (7), (9), (11), (13) și (13′), se pot scrie explicit punînd în evidență proiecțiile vitezei pe tangentă și normală într-un punct curent al lui C :

$$p_0 + \frac{\rho}{2}\left[V_0^2 - \left(\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial s}\right)^2\right] = -\varphi g \rho_{20}, \qquad (7') \qquad \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial s} = g \varphi_{21}, \qquad (9')$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial s}\right)^2 + 2\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial s} = 2 g \varphi_{22}, \qquad (11')$$

$$\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \varphi_{1,l-1}}{\partial s} + \sum_{t=1}^{t=l-1}\left(\frac{\partial \varphi_{1,t}}{\partial n} \cdot \frac{\partial \varphi_{1,t-t}}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_{1,t}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \varphi_{1,l-t}}{\partial s}\right) = g\varphi_{2,l} \qquad (13'')$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_{1,\frac{l}{2}}}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,\frac{l}{2}}}{\partial s}\right)^2 + \qquad (13''')$$

$$+ 2\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \varphi_{1,l}}{\partial s} = + 2 \sum_{t=1}^{t=l-2}\left(\frac{\partial \varphi_{1,t}}{\partial n} \cdot \frac{\partial \varphi_{1,l-t}}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_{1,t}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \varphi_{1,l-t}}{\partial s}\right) = 2 g \varphi_{2,l}.$$

În virtutea condiției (4) rezultă că pe C trebuie să existe cel puțin două puncte unde viteza normală își schimbă sensul ; dacă pe C se formează n regiuni pe unde fluidul intră în corp, trebuie să existe pe C cel puțin $2n$ puncte unde viteza se anulează.

Odată φ_1 și φ_2 cunoscute, se pot determina imediat ψ_1 și ψ_2, și $f_1(z)$ ($f_2(z)$.

9. Exemplu

Să considerăm ca exemplu scurgerea peste un cilindru circular, de rază R și lungime infinită, a unui curent care la mari distanțe are o mișcare de translație cu viteza V_0, normală pe generatoare. Soluția pentru mișcarea în jurul cilindrului impermeabil este

$$\varphi_{10} = V_0\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta \ ; \tag{15}$$

presiunea pe cilindru are expresia

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2(1 - 4\sin^2\theta) \ ,$$

iar condiția (7) se scrie

$$\varphi_{20} = -\frac{1}{\rho g}\left[p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2(1 - 4\sin^2\theta)\right]; \tag{16}$$

pentru a afla pe φ_{20} în orice punct din interiorul cercului, aplicăm formula lui Poisson

$$\varphi_{20}(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi\rho g}\int_0^{2\pi}\left[p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2(1-4\sin^2\chi)\right]\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \chi) + r^2}\,d\chi.$$

Efectuînd integrarea, găsim

$$\varphi_{20}(r, \theta) = -\frac{1}{rg}\left(p_0 - \frac{1}{2}\rho V_0^2\right) - \frac{V_0^2 r^2}{gR^2}\cos 2\theta \tag{17}$$

și se verifică imediat că pentru $r \to R$, (17) trece în valoarea pe frontiera dată de (16).

Trecînd la aproximația de ordin 1, calculăm derivata normală a lui φ_{20} pentru $r = R$, și apoi introducem expresia obținută în formula lui Dini:

$$\left(\frac{\partial\varphi_{20}}{\partial r}\right)_{r=R} = -\frac{2V_0^2\cos 2\theta}{gR} \ ,$$

$$\varphi_{11} = -\frac{V_0^2}{\pi g}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\log\left[R^2 - 2R\cos(\theta - \chi) - r^2\right]d\chi,$$

de unde

$$\varphi_{11} = \frac{V_0^2 R^2}{gr^2}\cos 2\theta, \tag{18}$$

Menționăm că $\varphi_{ji}(r, \theta)$ ($j = 1, 2$; $i = 0, 1, 2, \ldots$) se pot obține fără nici un calcul dacă ne bazăm pe niște teoreme din teoria funcțiilor armonice [54]

Știind pe φ_{11} găsim mai departe din (9′) valorile lui φ_{21} pe cercul de rază R, cunoscînd că $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$:

$$\varphi_{21} = \frac{4V_0^3}{g^2 R} \sin\theta \sin 2\theta,$$

de unde

$$\varphi_{21}(r, \theta) = \frac{2V_0^3 r}{g^2 R^2}\left[\cos\theta - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos 3\theta\right] \tag{19}$$

și $\varphi_{12}(r, \theta)$ va fi

$$\varphi_{12} = \frac{2V_0^3}{g^2 r}\left[-\cos\theta + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos 3\theta\right]. \tag{20}$$

Putem scrie în definitiv expresiile potențialelor vitezelor în a doua aproximație

$$\varphi_1 = \frac{V_0}{r}\left\{(r^2 + R^2)\cos\theta + k\frac{V_0 R^2}{gr}\cos 2\theta - k^2\frac{2V_0^2}{2}\left[\cos\theta - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos 3\theta\right] + \ldots\right\} \quad (r > R) \tag{21}$$

$$\varphi_2 = -k\left\{\frac{1}{\rho g}\left(p_0 - \frac{1}{2}\rho V_0^2\right) + \frac{V_0^2}{gR^2} r^2 \cos 2\theta - k\frac{2V_0^3 r}{g^2 R^2}\left[\cos\theta - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos 3\theta\right] + \ldots\right\} \quad (r < R) \tag{22}$$

Potențialele complexe sînt

$$f_1(z) = V_0\left[z + \frac{R^2}{z} + k\frac{V_0 R^2}{gz^2} - 2\frac{k^2}{z}\frac{V_0^2}{g^2}\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \ldots\right], \tag{23}$$

$$f_2(z) = -\frac{k}{g}\left[\frac{1}{\rho}\left(p_0 - \frac{1}{2}\rho V_0^2\right) + \frac{V_0^2}{R^2} z^2 - 2k\frac{V_0^3 z}{gR^2}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) + \ldots\right], \tag{24}$$

iar funcțiile de curent,

$$\psi_1 = \frac{V_0}{r}\left\{(r^2 - R^2)\sin\theta - k\frac{V_0 R^2}{gr}\sin 2\theta + k^2\frac{2V_0^2}{g^2}\left[\sin\theta\left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin 3\theta\right] + \ldots\right\} + C_1, \tag{25}$$

$$\psi_2 = -\frac{kV_0^2 r}{g}\left\{\frac{r\sin 2\theta}{R} - k\frac{2V_0}{gR^2}\left[\sin\theta - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sin 3\theta\right] + \ldots\right\} + C_2, \tag{26}$$

C_1 și C_2 fiind două constante arbitrare ce pot fi luate egale cu zero și se vede că condiția (2), care se mai poate scrie, în cazul plan,

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \frac{\partial \psi_2}{\partial s},$$

este îndeplinită.

Avem acum toate elementele pentru a putea caracteriza complet mișcarea, pînă la termeni de ordinul k^3. Viteza, într-un punct oarecare din fluid, va avea pe raza vectoare și pe perpendiculara la raza vectoare, componentele

$$\left.\begin{aligned} v_{1r} &= \frac{\partial \varphi_1'(r,\theta)}{\partial r} = V_0\left\{\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^2\cos\theta - 2\frac{kV_0R^2}{gr^3}\cos 2\theta + \right. \\ &\quad \left. + k^2\frac{2V_0^2}{g^2r^2}\left[\cos\theta - 3\left(\frac{R}{r}\right)^2\cdot\cos 3\theta\right] + \ldots\right\} \\ v_{1\theta} &= \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi_1(r,\theta)}{\partial\theta} = -\frac{V_0}{r^2}\left[(r^2+R^2)\sin\theta + k^2\frac{V_0R^2}{gr}\sin 2\theta - \right. \\ &\quad \left. - k^2\frac{2V_0^2}{g^2}\left[\sin\theta - 3\left(\frac{R}{r}\right)^2\sin 3\theta\right] + \ldots\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

iar în mediul poros vom avea

$$\left.\begin{aligned} v_{2r} &= k\frac{V_0^2}{gR^2}\left\{-2r\cos 2\theta + k\frac{2V_0}{g}\left[\cos\theta - 3\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos 3\theta\right] + \ldots\right\}, \\ v_{2\theta} &= k\frac{2V_0^2}{gR^2}\left\{-2r\sin 2\theta + k\frac{V_0}{gr}\left[-\sin\theta + 3\left(\frac{r}{R}\right)^2\sin 3\theta\right] + \ldots\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Viteza normală pe cilindru se obține din (27 sau (27), făcînd $r = R$:

$$v_r = 2\frac{kV_0^2}{gR}\left[-\cos 2\theta + k\frac{V_0}{gR}(\cos\theta - 3\cos 3\theta) + \ldots\right]. \quad (29)$$

Presiunea pe cilindru va fi

$$p_{r=R} = p_0 - \frac{1}{2}\rho V_0^2 + \rho\cos 2\theta - k\rho\frac{2V_0^3}{gR}(\cos\theta - \cos 3\theta) + \ldots, \quad (30)$$

de unde, aplicînd formula (19) din capitolul I, obținem forța exercitată asupra unității de lungime

$$\left.\begin{aligned} X &= 2\pi\rho\, kV_0^3\, g^{-1}, \\ Y &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Forța este deci paralelă cu viteza de la infinit și este proporțională, în prima aproximație, cu coeficientul de filtrație și cubul lui V_0 ; paradoxul lui d'Alembert se regăsește, cum era de așteptat, cînd $k = 0$.

Să verificăm acum rezultatele noastre cu ajutorul formulei (30) de la capitolul I, deoarece ne limităm numai la termenul în k sau K. Aici vom avea pentru F_x,

$$F_x = k\rho\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial r}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R^2}{r}\right)\right]_{r=R} Rd\theta;$$

Se găsește ușor

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R^2}{r}\right)\right]_{r=R} = -\cos 2\theta$$

și efectuînd integrala regăsim imediat pe F_x dat de (31).

Aici dăm peste un nou paradox, prin faptul că apare o forţă în sensul vitezei la mari distanţe, atunci cînd corpul este poros, deci cînd fluidul are mai multe căi de a ajunge din amontele în avalul corpului. Explicaţia paradoxului constă în faptul că fluidul este presupus ideal în afara corpului; în capitolul următor se va vedea că la fluidele reale rezistenţa scade faţă de cazul corpului impermeabil.

Rezultatul la care ajungem, în neconcordanţă evidentă cu experienţa, se explică prin schema prea ideală ce am adoptat-o pentru mişcarea în fluidul liber.

Dimensiunile lui X sînt MT^{-2}, căci forţa calculată este raportată la unitatea de lungime a cilindrului.

Liniile de curent le aflăm dînd lui ψ_1 şi ψ_2 diferite valori. În particular ne interesează să ştim care este volumul de fluid care trece prin mediul poros; pentru aceasta nu avem decît să facem în (25) pe $r = R$ şi $\theta = \frac{\pi}{2}$, şi obţinem valoarea $\frac{4k^2 V_0^3}{g^2 R}$.

Viteza pentru $y = 0$, $x > 0$, va fi în fluid

$$(v_1)_{\theta=0} = V_0 \left[\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) - 2\frac{kV_0R^2}{gr^3} - 4k\,\frac{V_0^2}{g^2 r^2} + \dots \right],$$

iar în mediul poros

$$(v_2)_{\theta=0} = k\,\frac{2V_0^2}{gR}\left[-1 - 2k\frac{V_0}{g^2R^2} + \dots \right];$$

pentru $y = 0$, $x<0$,

$$(v_1)_{\theta=\pi} = V_0 \left[\left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) - 2\frac{kV_0R^2}{gr^3} - 4k^2\frac{V_0^2}{g^2 r^2} + \dots \right].$$

$$(v_2)_{\theta=\pi} = k^2\,\frac{V_0^2}{gR}\left[-1 + 2k\frac{V_0}{g^2R^2} + \dots \right].$$

Forţa care ia naştere asupra cilindrului rezultă din disimetria faţă de axa Oy pe care o creează scurgerea prin mediul poros.

Să observăm că oricare ar fi mişcarea în exteriorul cilindrului, presiunea pe suprafaţa acestuia va fi o funcţie mărginită ; atunci, pe baza unei teoreme a lui S. Verblunski [55], se poate da o limitare superioară pentru viteza radială. Dacă notăm cu $p_{\max}$ presiunea maximă pe contur, cu $p\,(0)$ presiunea în centrul cercului cu $c = p\,(0)\,p_{\max}$, atunci

$$|v_r| \leqslant \frac{4k}{\pi\rho g}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\pi c}{1 + r^2 + 2r\sin\frac{\pi c}{2}}\,p_{\max}.$$

Se poate da de asemenea o limitare superioară şi pentru proiecţia vitezei pe normală la raza vectoare, folosindu-se de a doua teoremă demonstrată în [55].

Interpretarea hidrodinamică a procedeului de aproximare descris este simplă: presiunea exterioară care rezultă din mişcarea în jurul cilindrului impermeabil creează în acesta un cîmp de presiuni p_{20}, care este simetric atît

față de Ox, cît și față de Oy; cîmpul de viteze care rezultă din p_{20} creează o mișcare și în D_1, ceea ce face ca vitezele și presiunile în fiecare punct la distanța finită din D_1 să fie modificate; ca urmare, presiunile pe cilindru sînt modificate, ca și presiunile în interiorul lui; acest din urmă cîmp de presiuni proporțional cu k, nu mai este simetric față de Oy, ceea ce face ca în direcția axei Ox să apară o forță proporțională cu k.

Parametrul fără dimensiuni, care înlocuiește aci pe k, este $k = \frac{kV_0}{Rg}$, astfel încît, în funcție de el, putem scrie

$$f_1(z) = V_0\left[z + \frac{R^2}{z} + K\frac{R^3}{z^2} - 2K^2\frac{R^2}{z}\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \ldots\right], \tag{32}$$

$$f_2(z) = -k\frac{R}{V_0}\left[\frac{1}{\rho}\left(p_0 - \frac{1}{2}\rho V_0^2\right) + \frac{V_0^2}{R^2}z^2 - 2KV_0^2\frac{z}{R}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) + \ldots\right]. \tag{33}$$

Pentru $V_0 = 10$ m/s, $R = 40$ cm și $k = 5\cdot10^{-3}$ cm/s, rezultă $K = 1{,}27\cdot10^{-3}$.

10. O mișcare cu circulație

Să considerăm acum cazul mișcării cu circulație. Pentru aceasta va trebui să adăugăm un potențial complex de forma

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\log z$$

la potențialul mișcării neperturbate, astfel încît pentru cilindrul circular de rază R și o viteză la mari distanțe normală pe axa cilindrului și egală în mărime cu V_0, se obține imediat

$$\varphi_{10} = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + 2V_0R\cos\theta, \tag{34}$$

de unde φ_{20}, pe cercul de rază R, va fi dat de

$$\varphi_{20} = -\frac{1}{\rho g}\left[p_0 - \frac{\rho}{2}\left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2R^2} + V_0^2\right)\right] - \frac{\Gamma V_0}{\pi g R}\sin\theta - \frac{V_0^2\cos 2\theta}{g},$$

iar φ_{20}, într-un punct din D_2 de coordonate (r, θ), are expresia

$$\varphi_{20} = -\frac{1}{\rho g}\left[p_0 - \frac{\rho}{2}\left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2R^2} + V_0^2\right)\right] - \frac{\Gamma V_0 r}{\pi g r^2}\sin\theta - \frac{V_0^2}{g}\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos 2\theta. \tag{35}$$

Mai departe găsim succesiv

$$\varphi_{11} = \frac{V_0}{g}\left[\frac{\Gamma}{\pi r}\sin\theta + V_0\left(\frac{R}{r}\right)^2\cos 2\theta\right], \tag{36}$$

$$\varphi_{21} = \frac{V}{g^2R^2}\left[\left(2V_0^2R + \frac{\Gamma^2}{2\pi^2R}\right)\frac{r}{R}\cos\theta - 2\frac{V_0\Gamma}{\pi}\left(\frac{r^2}{R}\right)\sin 2\theta - 2V_0^2\frac{r^3}{R^2}\cos 3\theta\right], \tag{37}$$

$$\varphi_{12} = \frac{V_0}{g^2R}\left[-\left(2V_0^2R + \frac{\Gamma^2}{2\pi^2R}\right)\frac{\cos\theta}{r} + 2\frac{\Gamma V_0 R}{\pi r^2}\sin 2\theta + 2V_0^2\left(\frac{R}{r}\right)^3\cos 3\theta\right]. \tag{38}$$

Pentru a afla pe φ_{22} pe C va trebui să aplicăm formula (11), şi avem

$$\varphi_{22} = \frac{V_0}{g^3 R^2}\left[\frac{\Gamma}{\pi R}\left(6V_0^2 + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2}\right)\sin\theta + V_0\left(8V_0^2 + \frac{5\Gamma^2}{2\pi^2 R^2}\right)\cos 2\theta - \right.$$

$$\left. - \frac{7\Gamma V_0^2}{\pi R}\sin 3\theta - 6V_0^3 \cos 4\theta\right]. \tag{39}$$

Cu aceste elemente putem calcula acţiunea hidrodinamică asupra cilindrului. Pentru componentele forţei găsim

$$X = k\frac{\pi\rho V_0}{g}\left(2V_0^2 + \frac{\Gamma^2}{2\pi^2 R^2}\right) + k^3(\ldots + \ldots)\ldots, \tag{40}$$

$$Y = -\rho V_0 \Gamma\left[1 - \frac{k^2}{g^2 R^2}\left(6V_0^2 + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2}\right)\right], \tag{41}$$

iar pentru momentul faţă de axa cilindrului avem, evident, $M = 0$.

Făcînd $\Gamma = 0$ regăsim rezultatele de la paragraful 9; din (40) şi (41) rezultă că forţa în direcţia vitezei se măreşte faţă de cazul $\Gamma = 0$, iar portanţa se modifică cu un termen ce înmulţeşte pe k^2.

Se pot studia şi alte tipuri de mişcări, condiţia (3′) sau (3″) înlocuindu-se sau completîndu-se cu alte condiţii.

Formulele (40) şi (41) ne dau o indicaţie calitativă asupra modificării suferite de teorema lui Jukovski la profile oarecare cu o muchie ascuţită în spre aval. În acest caz, după ce determinăm aproximaţia de ordin zero în D_1 şi pe Γ prin regula obişnuită, trebuie să calculăm presiunea pe contur pentru a găsi φ_{20} după rezolvarea problemei Dirichlet corespunzătoare. Mai departe trebuie să rezolvăm problema lui Neumann relativă la exteriorul conturului ş.a.m.d. Rezultatul calculului acţiunii hidrodinamice va trebui să ne dea o forţă paralelă cu viteza de la infinit, forţă ce depinde de V_0 şi Γ — care la rîndul lui depinde de incidenţă — şi care se anulează odată cu k, o forţă normală vitezei de la infinit, şi un moment, aceste două din urmă elemente depinzînd de k, V_0 şi Γ, dar ele nu se anulează cînd coeficientul de filtraţie se anulează.

11. Cazul unui vîrtej constant

Să considerăm acum cazul unei mişcări cu vîrtej constant. Vom suprapune peste o mişcare de translaţie, la mari distanţe, cu viteza V_0, o distribuţie liniară de viteze, astfel încît să avem

$$u = V_0 + 2ay, \quad v = 0, \tag{42}$$

axa Ox fiind luată paralelă cu direcţia mişcării. Notînd cu φ_1 potenţialul vitezelor ce iau naştere datorită prezenţei corpului, ajungem să scriem proiecţiile vitezei sub forma

$$U = V_0 + 2ay + u_1, \quad v = v_1, \tag{43}$$

unde $\vec{v_1} = \operatorname{grad}\varphi_1$. Se ştie atunci că pe conturul corpului avem condiţia la limită [56]

$$\psi_1 = -V_0 y - ay^2 + \text{const.} \tag{44}$$

Presupunînd iarăși corpul poros, încercăm să rezolvăm problema prin dezvoltările (5) și (6) pentru φ_1 și φ_2 și calea urmată va fi aceeași.

Să exemplificăm cele spuse pe cazul cilindrului circular. Aproximația de ordin zero ne dă, pentru valorile lui ψ_1 la $r = R$,

$$\psi_{10} = -V_0 \frac{R^2}{r} \sin\theta + \frac{aR^4}{2r^2} \cos 2\theta - \frac{aR^2}{2} + \text{const.}, \tag{45}$$

de unde rezultă viteza și presiunea pe cilindru:

$$v_{10} = -2V_0 \sin\theta + 2aR \cos 2\theta - aR, \tag{46}$$

$$(p_{10})_{r=R} = \text{const} + \rho\left[-V_0^2 - \frac{3}{2}a^2R^2 - 4V_0Ra\sin\theta + (V_0^2 + 2a^2R^2)\cos 2\theta + \right.$$

$$\left. + 2V_0Ra\sin 3\theta - a^2R^2\cos 4\theta\right] \tag{47}$$

și, abstracție făcînd de o constantă, vom avea în cilindru

$$g\varphi_{20} = 4V_0ra\sin\theta - \left(2a^2 + \frac{V_0^2}{R^2}\right)r^2\cos 2\theta - 2\frac{V_0ar^3}{R}\sin 3\theta + \frac{a^2r^4}{R^2}\cos 4\theta; \tag{48}$$

din condiția (10), după rezolvarea problemei lui Neumann corespunzătoare, avem

$$\varphi_{11} = \frac{R^2}{gr}\left[-4V_0a\sin\theta + \left(2a^2 + \frac{V_0^2}{R^2}\right)\frac{R\cos 2\theta}{r} + \right.$$

$$\left. + 2V_0a\left(\frac{R}{r}\right)^2\sin 3\theta - \frac{a^2R^4}{r^3}\cos 4\theta\right] \tag{49}$$

sau, în funcție de x și y,

$$\varphi_{11} = \frac{R^2}{g}\left[-4V_0a\frac{y}{x^2+y^2} + \left(2a^2 + \frac{V_0^2}{R^2}\right)\frac{R^2}{x^2+y^2} - 2\left(2a^2 + \frac{V_0^2}{R^2}\right)\frac{R^2y^2}{(x^2+y^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{16V_0aR^2y}{(x^2+y^2)^2} - 12\frac{V_0aR^2y^3}{(x^2+y^2)^3} - \frac{a^2R^4}{(x^2+y^2)^2} + 8\frac{a^2R^4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}\right]. \tag{50}$$

Condiția (9) suferă o mică modificare în cazul de față:

$$g\varphi_{21} = \frac{\partial\varphi_{10}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\theta} + (V_0 + 2ay)\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}. \tag{51}$$

înlocuind pe (51) găsim în cele din urmă pe cilindru

$$p_{21} = -\frac{\rho}{g}\left[2V_0\left(\frac{V_0^2}{R} - 2Ra^2\right)\cos\theta + 2a\left(-V_0^2 + 4a^2R^2\right)\sin 2\theta - \right.$$

$$- V_0\left(7Ra + 2\frac{V_0^2}{R}\right)\cos 3\theta - a\left(11V_0^2 + 8a^2R^2\right)\sin 4\theta + \qquad (52)$$

$$\left. + 13V_0Ra^2\cos 5\theta + 4a^3R^2\sin 6\theta\right].$$

Ţinînd seama de (52) rezultă că, în primă aproximaţie,

$$X = 2\pi\rho\, kV_0g^{-1}\left(V_0^2 - 2R^2a^2\right) \quad , \quad Y = 4\pi\rho aV_0R^2, \qquad (53)$$

deci portanţa nu este modificată faţă de cazul $k = 0$. Pentru $a = 0$, obţinem formula (31).

12. Mediu impermeabil înconjurat de un mediu poros

O altă serie de probleme se pot pune în legătură cu corpurile poroase ce conţin în ele un corp impermeabil. Vom nota cu D_3 domeniul simplu conex ocupat de corpul impermeabil, şi care este mărginit de o suprafaţă S_1 ce are aceleaşi proprietăţi ca şi suprafaţa S de la paragraful 7; D_2 va însemna şi de aci înainte domeniul ocupat de mediul poros, ce este cuprins între S şi S_1. Vom mai presupune de asemenea că S şi S_1 nu au nici un punct comun.

Încercînd aceeaşi metodă ca mai sus, sîntem conduşi tot la determinarea a două funcţii armonice φ_1 şi φ_2, domeniul D_2 fiind acum cel specificat în prezentul paragraf, cu aceleaşi condiţii la limită, la care se adaugă încă o serie de condiţii relative la suprafaţa S_1. Aceste condiţii rezultă din anularea vitezei normale pe S_1, ceea ce se scrie

$$\frac{\partial\varphi_{2,q}}{\partial n} = 0 \text{ pe } S_1 \quad (q = 0,\ 1,\ 2,\ldots). \qquad (54)$$

În loc de seria de probleme Dirichlet interioare, întîlnită la corpurile poroase omogene, aici avem de rezolvat o serie de probleme mixte relative la D_2: să se găsească o funcţie armonică φ_{2q} cînd se cunoaşte valoarea ei pe S şi valoarea derivatei sale normale pe S_1.

Condiţiile (4′) sînt în cazul de faţă satisfăcute, ca urmare a armonicităţii lui φ_{2q} şi a condiţiei (54).

Pentru cazul plan, condiţia (54) se poate înlocui cu

$$\psi_q = \text{const. pe } C_2 \quad (q = 0,\ 1,\ 2,\ldots) \qquad (55)$$

şi problema se reduce la a găsi în domeniul dublu conex D_2, o funcţie de variabilă complexă a cărei parte reală este cunoscută pe o frontieră C a domeniului, iar partea imaginară pe cealaltă frontieră C_1. Făcînd o transformare conformă a lui D_2 pe inelul circular de raze 1 şi q ($q < 1$), nu avem decît să aplicăm o formulă a lui H. Villat [57] pentru a găsi funcţia căutată.

Ca un exemplu să luăm un cilindru impermeabil de rază R_1 înconjurat de un mediu poros a cărui suprafaţă de separare cu fluidul liber este un cilindru de rază $R > R_1$, coaxial cu primul, viteza la mari distanţe a fluidului fiind normală pe axa cilindrilor şi avînd valoarea V_0. Funcţia φ_{10} va fi dată tot de

(15), iar pentru celelalte funcții căutate se obține

$$\varphi_{20} = -g^{-1}\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}V_0^2 + V_0^2 R^2 \frac{r^2 + R_1^4 r^{-2}}{R^4 + R_1^4}\cos 2\theta\right) \quad (R_1 \leqslant r \leqslant R), \tag{56}$$

$$\varphi_{11} = \frac{V_0^2 R^2 (R^4 - R_1^4)}{g(R^4 + R_1^4) r^2}\cos 2\theta \qquad (r \geqslant R) \tag{57}$$

$$\varphi_{21} = \frac{2V_0^3 (R^4 - R_1^4)}{R^2 g^2 (R^4 + R_1^4)}\left(\frac{R_1^2 r + r^{-1}}{R_1^{-2} R + R^{-1}}\cos\theta - \right.$$

$$\left. - \frac{R_1^6 r^3 + r^{-3}}{R_1^{-6} R^3 + R^{-4}}\cos 3\theta\right) \qquad (R_1 \leqslant r \leqslant R), \tag{58}$$

$$\varphi_{12} = \frac{2V_0^3 (R^4 - R^4)}{R^2 g^2 (R^4 + R_1^4)}\left(\frac{1 - R^2 R_1^{-2}}{R_1^{-2} R + R^{-1}}\frac{\cos\theta}{r} - \right.$$

$$\left. - \frac{1 + R^6 R_1^{-6}}{R_1^{-6} R^3 + R^{-3}}\frac{\cos 3\theta}{r^3}\right) \qquad (r \geqslant R) \tag{59}$$

expresii ce permit scrierea funcțiilor $f_1(z)$ și $f_2(z)$ și găsirea elementelor mișcării.

Să calculăm care este forța ce acționează asupra corpului. Forța totală va fi

$$F_x = \frac{2\pi\rho V_0^3 k}{g}\frac{R^4 - R^4}{R^4 + R_1^4} \tag{60}$$

și ea se anulează cînd $R = R_1$, adică nu mai avem mediu poros. Forța ce se exercită asupra cilindrului impermeabil, datorită presiunii de pe suprafața sa, rezultă din φ_{21} dat de (4) pentru $r = R_1$, și are expresia

$$F_x' = \frac{2\pi\rho V_0^3}{Rg} K \frac{R^4 - R^4}{R^4 + R_1^4}\frac{2.}{R^{-1} + RR_1^{-2}},$$

de unde rezultă că forța exercitată numai asupra mediului poros are expresia simplă

$$F_{x\,\text{poros}} = \frac{2\pi\rho V_0^3}{g} k \frac{(R^2 - R_1^2)^2}{R^4 + R_1^4}. \tag{61}$$

Viteza pe cilindrul impermeabil va fi

$$(\varphi_{20})_{r=R_1} = 4kV_0^2 g^{-1}(R^4 + R_1^4)^{-1}\left[\sin 2\theta + \frac{kV_0(R^4 - R_1^4)}{g}\left(\frac{3\sin 3}{R_1^3 + R^6 R_1^3} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\sin\theta}{R_1 R^2 + R^4 R_1^{-1}}\right)\right]$$

și ea se anulează odată cu k, ceea ce era de așteptat.

Folosind coordonate bipolare [58], [59], se poate uşor studia cazul cînd cilindrul impermeabil nu are aceeaşi axă cu suprafaţa exterioară a mediului poros.

Fără nici o greutate se pot scrie condiţiile la limită pentru cazul unui corp poros care include mai multe corpuri impermeabile şi pentru mai multe corpuri poroase care au în ele, fiecare, un număr de corpuri impermeabile.

13. Mediu poros continuat cu un mediu impermeabil

Să presupunem acum că avem un corp compus dintr-un mediu poros limitat de o suprafaţă $S = S' + S''$, unde S' este porţiunea din suprafaţă în contact cu fluidul liber, ias S'' porţiunea în contact cu un corp impermeabil de suprafaţă $S'' + S'''$, S''' fiind de asemenea în contact cu fluidul liber. Fiecare din cele 3 domenii — fluid liber, corp poros, şi corp impermeabil — este considerat un domeniu simplu conex.

Pentru a studia problema, rămîne să găsim tot două funcţii armonice φ_1 şi φ_2, prima definită în domeniul D_1, exterior suprafeţei $S' + S'''$, iar a doua în domeniul D_2, limitat de suprafaţa S. Condiţiile la limită se complică întrucîtva

$$\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial n} = 0 \qquad \text{pe } S' + S''', \tag{62}$$

$$p_0 + \frac{\rho}{2} V_{20} - \frac{\rho}{2}(\operatorname{grad} \varphi_{10})^2 = -\rho g \varphi_{20} \qquad \text{pe } S', \tag{63}$$

$$\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial n} = 0 \qquad \text{pe } S'' \tag{64}$$

$$\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial n} \qquad \text{pe } S' \tag{65}$$

$$\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial n} = 0 \qquad \text{pe } S''', \tag{66}$$

$$\operatorname{grad} \varphi_{10} \operatorname{grad} \varphi_{11} = g \varphi_{21} \qquad \text{pe } S', \tag{67}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \varphi_{21}} = 0 \qquad \text{pe } S'', \tag{68}$$

$$\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial n} \qquad \text{pe } S', \tag{69}$$

$$\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial n} = 0 \qquad \text{pe } S''', \tag{70}$$

. . . . . .

Aproximaţia de ordin zero rezultă tot după rezolvarea unei probleme Neumann exterioare, şi ea corespunde mişcării fluidului în jurul unui corp impermeabil limitat de $S' + S'''$. Condiţiile în punctul de la ∞ rămîn aceleaşi. φ_{20} se găseşte prin rezolvarea unei probleme interioare mixte, φ_{21} se determină rezolvînd tot o problemă Neumann exterioară ştiindu-se valoarea derivatei normalei pe $S' + S'''$, etc.

Condiția ca fluxul hidrodinamic prin suprafața corpului să fie nul este îndeplinită în cazul de față, ca urmare a faptului că φ_2 este o funcție armonică în D_2, și a condițiilor de tipul lui (64) și (66).

Ca un prim exemplu, fie cilindrul de la paragraful 9 cu porțiunea $\frac{3\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ impermeabilă. φ_{10} va fi dat de (15); mai departe trebuie să aflăm pe φ_{20}, care este egal cu expresia dată de (16) pentru $\frac{\pi}{2} \geqslant 0 \geqslant \frac{\pi}{2}$, avînd razele $\pm$ $\pm \frac{\pi}{2}$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$ condiția care rezultă din (64),

$$\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial \theta} = 0.$$

φ_{20} dat de (17) satisface aceste condiții, și deci φ_{20} este dat de (17), cu $\frac{\pi}{2} \geqslant \theta \geqslant -\frac{\pi}{2}$. Mai departe, φ_{11} este dat de

$$\varphi_{11} = \frac{2V_0^2}{\pi g} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{1}{n} \cos n\theta \cos n\chi \cos 2\chi \, d\chi,$$

de unde

$$\varphi_{11} = \frac{2V_0^2 R}{\pi g r}\left(\frac{2}{3}\cos\theta + \frac{\pi}{4}\frac{R}{r}\cos 2\theta + 2\sum_{n=3,5,\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^2-4}\left(\frac{R}{r}\right)^{n-1}\cos n\theta\right).$$

Din (67) rezultă valoarea lui φ_{21} pentru $r + R$, $\frac{\pi}{2} \geqslant \theta \geqslant -\frac{\pi}{2}$:

$$\varphi_{21} = \frac{4V_0^3}{\pi g^2 R}\left[\frac{1}{3}(1-\cos 2\theta) + \frac{\pi}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=3,5,\ldots}^{\infty} \frac{n(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^2-4}(\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta)\right].$$

Ca un alt exemplu să luăm același cilindru, cu porțiunea $-\pi \leqslant \theta \leqslant 0$ impermeabilă. φ_{10} va fi dat, bineînțeles, tot de (15), iar φ_{20} tot de (17), unde $\pi \geqslant \theta \geqslant 0$. Pentru φ_{11} avem, după (65) și (66),

$$\varphi_{11} = \frac{2V_0^2}{\pi g}\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{1}{n}(\cos n\theta \cos n\chi + \sin n\theta \sin n\chi)\cos 2\chi \, d\chi,$$

de unde

$$\varphi_{11} = \frac{2V_0^2 R}{\pi g^2 r}\left(-\frac{2}{3}\sin\theta + \frac{\pi}{4}\frac{R}{r}\cos 2\theta + 2\sum_{n=3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2-4}\left(\frac{R}{r}\right)^{n-1}\sin n\theta\right)$$

și expresia lui φ_{21}, pentru $r = R$ și $\pi \geqslant \theta \geqslant 0$, este

$$\varphi_{21} = \frac{4V_0^3}{\pi g^2 R}\left[\frac{1}{3}\sin 2\theta + \frac{\pi}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta) - \sum_{n=3,5,\ldots}^{\infty} \frac{n}{n^2-4}(\sin(n+1)\theta + \right.$$

$$\left. + \sin(n-1)\theta)\right].$$

14. Cazul mai multor corpuri poroase omogene

Să vedem cum se aplică metoda noastră în cazul mai multor corpuri omogene. Să presupunem că avem n corpuri de dimensiuni finite, fiecare având un coeficient de filtrație k_i $(i = 1, 2, \ldots n)$; $k_i \neq k_j$ dacă $i \neq j$) și fiind mărginit de o suprafață S_i, ce satisface condițiile de la paragraful 4; de asemenea mai presupunem că S_i nu are nici un punct comun cu S_j $(j \neq i)$. Să considerăm, pentru a fixa ideile, că mișcarea fluidului la mari distanțe este tot o translație de viteză V_0, și să alegem axa Ox paralelă cu direcția acelei viteze; formularea problemei se face în mod cu totul analog, iar condițiile (1) și (2) vor trebui să fie satisfăcute pe fiecare suprafață S_i. Condiția ca fluxul hidrodinamic să fie nul prin S_i se exprimă tot prin condiția (4), aplicată fiecărei suprafețe în parte.

Potențialul vitezelor în tot spațiul, minus suma domeniilor D_i, mărginite de S_i, să-l notăm cu φ_0, va trebui să depindă de toți coeficienții de filtrație și de aceea îl vom căuta sub forma

$$\varphi_0 = \varphi_{0,0} + \sum_{i=1}^{n} k_i \varphi_{0,i} + \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} k_i k_l \varphi_{0,il} + \cdots \tag{71}$$

De asemenea, potențialul vitezelor în D_l va trebui să depindă și el de toți coeficienții de filtrație k_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ și de aceea îl vom căuta sub forma

$$\varphi_l = k_l\left(\varphi_{l,0} + \sum_{i=1}^{n} k_i \varphi_{l,i} + \sum_{f=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} k_i k_f \varphi_{l,if} + \cdots\right), \tag{72}$$

căci φ_l trebuie să se anuleze odată cu k_l.

Presiunea în domeniul D_0, în care este definit φ_0, va fi dată de

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2}\left[V_0^2 - (\operatorname{grad}\varphi_0)^2\right]$$

și aplicarea lui (1) pe S_l conduce la

$$p_0 + \frac{\rho}{2}V_0^2 - \frac{\rho}{2}\left[(\operatorname{grad}\varphi_{0,0})^2 + 2\operatorname{grad}\varphi_{0,0}\sum_{i=1}^{n} k_i \operatorname{grad}\varphi_{0,i} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} k_i^2 (\operatorname{grad}\varphi_{0,i})^2 + 2\operatorname{grad}\varphi_{0,0}\sum_{f=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} k_i k_f \operatorname{grad}\varphi_{0,if} + \cdots\right] =$$

$$= -\rho g\left(\varphi_{l,0} + \sum_{i=1}^{n} k_i \varphi_{l,i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{f=1}^{n} k_i k_f \varphi_{l,if} + \cdots\right),$$

iar condiția (2) se scrie

$$\frac{\partial \varphi_{0,0}}{\partial n} + \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{\partial \varphi_{0,i}}{\partial n} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} k_i k_j \frac{\partial \varphi_{0,ij}}{\partial n} + \ldots = k_l \left(\frac{\partial \varphi_{l,0}}{\partial n} + \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{\partial \varphi_{l,i}}{\partial n} + \ldots \right)$$

Obținem, ca mai sus, pe S_l

$$p_0 + \frac{\rho}{2} [V_0^2 - (\text{grad } \varphi_{0,0})^2] = - \rho g \varphi_{l,0}, \tag{73}$$

$$\frac{\partial \varphi_{0,0}}{\partial n} = 0, \tag{74}$$

$$\text{grad } \varphi_{0,0} \cdot \text{grad } \varphi_{0,i} = g \varphi_{l,i}, \tag{75}$$

$$\frac{\partial \varphi_{0,l}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{l,0}}{\partial n}, \tag{76}$$

$$\frac{\partial \varphi_{0,m}}{\partial n} = 0 \qquad (m \neq l), \tag{77}$$

$$\frac{1}{2} (\text{grad } \varphi_{0,j})^2 + \text{grad } \varphi_{0,0} \cdot \text{grad } \varphi_{0,jj} = g \varphi_{l,jj}, \tag{78}$$

$$\text{grad } \varphi_{0,0} \cdot \text{grad } \varphi_{0,jf} = g \varphi_{l,jf} \qquad (f \neq j), \tag{79}$$

$$\frac{\partial \varphi_{0,jl}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{l,j}}{\partial n}, \tag{80}$$

$$\frac{\partial \varphi_{0,jm}}{\partial n} = 0 \qquad (m \neq l), \tag{81}$$

.....

Aproximația de ordin zero este clară: ea se determină considerînd, după (74), toate corpurile impermeabile, și avînd în punctul de la infinit condițiile (3), indicele 1 înlocuindu-se cu 0,0; odată $\varphi_{0,0}$, găsit, știm valorile fiecărui $\varphi_{l,0}$ pe o suprafață S_l; rezolvînd n probleme Dirichlet interioare, căpătăm pe $\varphi_{l,0}$ în fiecare punct din D_l ($l = 1, 2, \ldots n$), și sîntem în măsură să cunoaștem derivatele normale ale lui $\varphi_{l,0}$ pe S_l. Pentru a trece la $\varphi_{0,l}$, trebuie să rezolvăm n probleme Neumann relative la domeniul D_0, ce revine în fond a considera că în mișcarea provocată în D_0 de presiunea pe S_l, domeniile $D_1, D_2, \ldots$ $\ldots, D_{l-1}, D_{l+1}, \ldots, D_n$ sînt ocupate de corpuri impermeabile, căci (76) și (77) se pot transcrie pentru fiecare $\varphi_{0,l}$:

$$\frac{\partial \varphi_{0,l}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{l,0}}{\partial n} \qquad \text{pe } S_l$$

$$\frac{\partial \varphi_{0,l}}{\partial n} = 0 \text{ pe } S_1, S_2, \ldots, S_{l-1}, S_{l+1}, \ldots, S_n.$$

În punctul de la infinit avem, evident, grad $\varphi_{0,l} = 0$. Pentru aflarea lui $\varphi_{l,i}$ va trebui să rezolvăm n^2 probleme Dirichlet interioare, iar $\varphi_{0,il}$, rezultă, după (80) și (81), în urma rezolvării problemei lui Neumann de n^2 ori, relativă la domeniul D_0; condițiile (80) și (81) se pot grupa, pentru o funcție $\varphi_{0,il}$ astfel:

$$\frac{\varphi_{0,il}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{l,i}}{\partial n} \text{ pe } S_l$$

$$\frac{\partial \varphi_{0,il}}{\partial n} = 0 \text{ pe } S_1, S_2, \ldots, S_{l-1}, S_{l+1}, \ldots, S_n,$$

ceea ce arată că iarăși corpurile mărginite de $S_1, \ldots, S_{l-1}, S_{l+1}, \ldots, S_n$ trebuie socotite impermeabile față de mișcarea provocată în D_0 de presiunea suplimentară de pe S_l. Condiția pentru $\varphi_{0,il}$ la infinit este tot grad $\varphi_{0,il} = 0$.

Se observă de asemenea că condiția (4) este îndeplinită, avînd într-adevăr

$$\int_{S_k} \frac{\partial \varphi_{0,l}}{\partial n} \, d\sigma = 0, \quad \int_{S_k} \frac{\partial \varphi_{0,li}}{\partial n} \, d\sigma = 0 \quad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Pentru cazul mai multor corpuri de genul corpului de la paragraful 12 sau de la paragraful 13, sau a unei combinații a lor, de asemenea se pot stabili condițiile la limită, urmînd aceeași cale. Nu am găsit necesar să dezvoltăm aci aceste condiții, ele fiind un caz particular a condițiilor ce rezultă din enunțarea generală a problemei, expusă la paragraful 26.

15. Problema pentru fluidele compresibile

Pentru fluidele compresibile problema este mult mai grea, ecuația ce o satisface potențialul vitezelor în afara corpurilor fiind o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi, neliniară în derivatele de primul ordin, iar ambele condiții la limită ce trebuie satisfăcute fiind neliniare. Să considerăm mai întîi cazul unui singur corp în mișcarea plană, notînd, ca în paragraful 7, cu D_1 domeniul exterior corpului; potențialul vitezelor va satisface pentru mișcarea staționară irotațională ecuația

$$\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0, \quad (82)$$

unde

$$c^2 = c_0\left[1 - \frac{\gamma - 1}{2c_0^2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2\right\}\right]; \quad (83)$$

ca lege caracteristică s-a luat ecuația

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} p^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (84)$$

Pentru mișcarea în interiorul corpului luăm ca lege caracteristică:

$$\rho = \frac{1}{\beta} p^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (85)$$

Mai general ar fi fost să luăm exponentul lui p în (85) γ_1^{-1}, unde $\gamma_1 \neq \gamma$; în acest caz, toate ecuațiile în care intervine funcția armonică

$$P = \frac{\gamma}{\beta(1+\gamma)} p^{\frac{1}{1+\gamma}} \tag{86}$$

ar suferi mici modificări.

Continuitatea presiunilor cere ca pe C

$$p_0 \left\{1 - \frac{\gamma-1}{2c_0^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}\right)^2\right]\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left[\frac{\beta(1+\gamma)}{\gamma} P\right]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}, \tag{87}$$

$$p_0 \frac{\gamma-1}{\gamma}\left\{1 - \frac{\gamma-1}{2c_0^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}\right)^2\right]\right\} = \left[\frac{\beta(1+\gamma)}{\gamma} P\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}, \tag{88}$$

iar continuitatea fluxului, ca

$$\rho_0 \left\{1 - \frac{\gamma-1}{2c_0^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -k\frac{\partial P}{\partial n}. \tag{89}$$

Vom căuta, ca mai sus, să satisfacem condițiile la limită (88), (89) și ecuația (82) prin dezvoltările

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + k\varphi_{11} + k^2\varphi_{12} + \dots \tag{90}$$

$$P = P_0 + kP_1 + k^2P_2 + \dots \tag{91}$$

Introducem (90) în ecuația (82), scoțînd în evidență termenii care apar în urma compresibilității fluidului:

$$\left\{c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}\left[(\operatorname{grad}\varphi_{10})^2 + 2k\operatorname{grad}\varphi_{10}\cdot\operatorname{grad}\varphi_{11} + k^2(2\operatorname{grad}\varphi_{10}\cdot\operatorname{grad}\varphi_{12} + (\operatorname{grad}\varphi_{11})^2) + \dots\right]\right\} \times (\Delta\varphi_{10} + k\Delta\varphi_{11} + \dots) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2\varphi_{10}}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x^2} + \dots\right)\left[\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial x}\right)^2 + 2k\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x} + \dots\right] +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial^2\varphi_{10}}{\partial x\partial y} + k\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x\partial y} + \dots\right)\times\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial x} + k\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x} + \dots\right)\times\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial y} +$$

$$+ k\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y} + \dots\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi_{10}}{\partial y^2} + k\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial y^2} + \dots\right)\left[\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial y}\right)^2 + 2k\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y} + \dots\right] \tag{92}$$

Din (88) rezultă

$$p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left\{1 - \frac{\gamma-1}{2c_0^2}\left[(\operatorname{grad}\varphi_{10})^2 + 2k\operatorname{grad}\varphi_{10}\cdot\operatorname{grad}\varphi_{11} + \dots\right]\right\} = \tag{93}$$

$$= B(P_0 + kP_1 + \dots)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}},$$

unde s-a notat

$$B = \left(\frac{\beta\,(1+\gamma)}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}.$$

Limitîndu-ne la cazul cînd mișcarea în D_1 este în întregime subsonică, și observînd că funcțiile P_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ sînt în acest caz mărginite, pozitive și $\neq 0$ în $D_2 + C$, membrul doi al ecuației (93) se mai poate scrie, neglijînd sistematic puterile lui k superioare puterii întîia:

$$B\,(P_0 + kP_1 + \ldots)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = B\,(P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,k\,P_1\,P_0^{-\frac{2}{\gamma+1}} + \ldots,$$

La fel, din (89) se obține

$$\rho_0\left\{1 - \frac{\gamma-1}{2c_0^2}\left[(\operatorname{grad}\varphi_{10})^2 + 2k\operatorname{grad}\varphi_{10}\operatorname{grad}\varphi_{11} + \ldots\right]\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial n} + \right.$$

$$\left. + k\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial n} + \ldots\right) = -k\left(\frac{\partial P_0}{\partial n} + k\frac{\partial P_1}{\partial n} + \ldots\right)$$

sau

$$\rho_0\left[1 - \frac{\gamma-1}{2c_0^2}(\operatorname{grad}\varphi_{10})^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\left\{1 + 2k\operatorname{grad}\varphi_{10}\cdot\operatorname{grad}\varphi_{11}\left[1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\gamma-1}{2c_0^2}(\operatorname{grad}\varphi_{10})^2\right]^{-1} + \ldots\right\}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial n} + k\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial n} + \ldots\right) = -k\left(\frac{\partial P_0}{\partial n} + k\frac{\partial P_1}{\partial n} + \ldots\right). \tag{94}$$

Egalînd în (92) coeficienții lui k^0 și k^1 obținem ecuațiile

$$\left[c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(\operatorname{grad}\varphi_{10})^2\right]\Delta\varphi_{10} = \frac{1}{2}\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\varphi_{10})^2\cdot\operatorname{grad}\varphi_{10}, \tag{95}$$

$$\left[c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(\operatorname{grad}\varphi_{10})^2\right]\Delta\varphi_{11} + 2\operatorname{grad}\varphi_{10}\cdot\operatorname{grad}\varphi_{11}\,\Delta\varphi_{10} =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial x}\right)^2 + 2\left[\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2\varphi_{10}}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2\varphi_{10}}{\partial y^2}\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y}\right] + \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial y}\right)^2 \tag{96}$$

.....

iar condițiile la limită ne dau succesiv

$$p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[1-\frac{\gamma-1}{2c_0^2}(\operatorname{grad}\varphi_{10})^2\right]=BP_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}. \tag{97}$$

$$2p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\operatorname{grad}\varphi_{10}\operatorname{grad}\varphi_{11}=-B\frac{\gamma-1}{\gamma-\gamma}P_0^{-\frac{2}{\gamma+1}}P_1, \tag{98}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\rho_0\left[1-\frac{\gamma-1}{2c_0^2}(\operatorname{grad}\varphi_{10})^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial n}=0, \tag{99}$$

$$2\rho_0\operatorname{grad}\varphi_{10}\operatorname{grad}\varphi_{11}\left[1-\frac{\gamma-1}{2c_0^2}(\operatorname{grad}\varphi_{10})^2\right]^{\frac{2-\gamma}{\gamma+1}}\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial n}+$$

$$+\rho_0\left[1-\frac{\gamma-1}{2c_0^2}(\operatorname{grad}\varphi_{10})^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial n}=-\frac{\partial P_0}{\partial n} \tag{100}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Procedeul este același ca la fluidele ideale incompresibilitate: din mișcarea în jurul profilului impermeabil rezultă φ_{10}, care, după (97), determină pe P_0 pe C; după rezolvarea unei probleme Dirichlet interioare aflăm derivata normală a lui φ_{11}, ș.a.m.d.

Ecuația (95) este cunoscuta ecuație cu derivate parțiale pe care o satisface potențialul vitezelor; dezvoltînd după numărul lui Mach, vom scrie

$$\varphi_{10}=\varphi_{100}+M_\infty^2\varphi_{101}+M_\infty^4\varphi_{102}+\ldots \tag{101}$$

și vom aplica o metodă de aproximație din teoria mișcărilor subsonice. Condiția la limită pentru φ_{10} este $\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial n}=0$ pe C, deoarece paranteza mare din (99) este neapărat diferită de zero, iar (97), (98) și (100) se simplifică:

$$p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[1-\frac{\gamma-1}{2c_0^2}\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial s}\right)^2\right]=BP_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}, \tag{102}$$

$$2p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial s}\cdot\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial s}=-B\frac{\gamma-1}{\gamma+1}P_0^{-\frac{2}{\gamma+1}}P_1, \tag{103}$$

$$\rho_0\left[1-\frac{\gamma-1}{2c_0^2}\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial s}\right)^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial n}=-\frac{\partial P_0}{\partial n}. \tag{104}$$

Funcția φ_{11}, care satisface ecuația cu derivate parțiale (96), are derivata normală pe C cunoscută din (104).

Se poate verifica de asemenea că fluxul fluidului prin C este nul.

Trebuie să menționăm că nu putem lua în mod arbitrar numărul termenilor în seriile (90) și (91). Să transcriem φ_1 în funcție de parametrul adimensional K:

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + K\varphi_{11} + K^2\varphi_{12} + \dots, \tag{90'}$$

funcțiile φ_{1j} $(j = 1, 2, 11)$ din (90') obținîndu-se din funcțiile corespunzătoare care figurează în (90) prin înmulțirea cu niște constante. Fie K de ordinul lui M_∞^{2s}, ceea ce se notează $K = 0\,(M_\infty^{2s})$. Dacă ne vom limita, de pildă, la termenii în K și K^2 vom avea

$$\begin{aligned}\varphi_1 = \varphi_{10} + M_\infty^2(\dots) + M_\infty^4(\dots) + \dots + M_\infty^{2s}(\dots) + \dots + K(\dots) + KM_\infty^2(\dots) + \\ + KM_\infty^4(\dots) + \dots + KM_\infty^{2s}(\dots) + \dots + K^2(\dots) + K^2M_\infty^2(\dots) + \\ + K^2M_\infty^4(\dots) + \dots + K^2M_\infty^{2s}(\dots) + \dots\end{aligned} \tag{105}$$

Reținînd numai termeni de ordinul lui M_∞^{2s},

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + M_\infty^2(\dots) + \dots + M_\infty^{2s}(\dots) + K(\dots)$$

și se vede că dacă ne-am fi limitat la termenul în M_∞^2 din (90) am obține un rezultat eronat, efectul compresibilității din aproximația de ordinul zero fiind mult mai mare — prin termenii ce se înmulțesc cu $M_\infty^4, \dots, M_\infty^{2(s-1)}$ decît termenul corectiv ce îl calculăm datorită porozității.

Fie un cilindru circular de rază R. Să presupunem că $K \approx M_\infty$ și că ne limităm la termenii de ordinul lui M_∞^4; sîntem atunci conduși să luăm

$$\begin{aligned}\varphi_1 = \varphi_{100} + M_\infty^2\varphi_{101} + M_\infty^4\varphi_{102} + K(\varphi_{110} + M_\infty^2\varphi_{111}) + \\ + K^2(\varphi_{120} + M_\infty^2\varphi_{121}).\end{aligned} \tag{106}$$

φ_{100}, φ_{101} și φ_{102}, urmînd calculele lui I. I m a i, sînt cunoscute [60], [52] *); pentru calculul lui P_0, avem, ținînd seama de cele spuse mai sus,

$$B^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} P_0 = p_0^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \left\{1 - \frac{\gamma-1}{2c_0^2}\left[4\sin^2\theta + 4M_\infty^2\left(\frac{2}{3}\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 3\theta\right)\right]\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tag{107}$$

sau, dezvoltînd și limitîndu-ne tot la termenul în M_∞^2,

$$\begin{aligned}B^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} P_0 = p_0^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \left\{\left[1 - \frac{\gamma-1}{2c_0^2}(1-\cos 2\theta)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} + \right. \\ \left. + 2M_\infty^2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left[1 - \frac{\gamma-1}{2c_0^2}(1-\cos 2\theta)\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}\left(\frac{7}{6}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos 4\theta - \frac{2}{3}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{108}$$

Cu $\gamma = 1{,}4$,

$$\begin{aligned}P_0 = B^{\frac{1}{6}} p_0^{1,7}\left\{\left(1 - \frac{1-\cos 2\theta}{5c_0^2}\right)^6 + \right. \\ \left. + 12M_\infty^2\left(1 - \frac{1-\cos 2\theta}{5c_0^2}\right)^5\left(\frac{7}{6}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos 4\theta - \frac{2}{3}\right)\right\}\end{aligned} \tag{109}$$

pe $r = R$

*) p. 659.

La fel ca mai sus, se pot obține, fără dificultăți deosebite, condițiile la limită pentru cazul fluidului compresibil și a n corpuri poroase diferite, fie în cazul problemei plane, fie în cazul problemei generale în 3 dimensiuni.

Cele expuse în acest paragraf au avut ca scop să prezinte felul de a pune problemele mișcării fluidelor compresibile în prezența corpurilor poroase. Numai studii amănunțite ar putea stabili care sînt ecuațiile și condițiile la limită cele mai propice de folosit.

Capitolul III

MIȘCAREA FLUIDELOR VÎSCOASE ÎN PREZENȚA CORPURILOR POROASE OMOGENE

16. Problema generală

Pentru un corp poros omogen, înconjurat de un fluid real va trebui, pentru a găsi mișcarea fluidului, să rezolvăm în D_1 următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale:

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{\vec{v}_1^2}{2} + \operatorname{rot} \vec{v}_1 \times \vec{v}_1 = \vec{F}_1 - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p_1 + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}_1 + \nu \Delta \vec{v}_1 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}_1) = 0, \tag{2}$$

$$f(p_1, \rho) = 0, \tag{3}$$

iar în D_2 sistemul

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_2 &= -k \operatorname{grad} h \text{ (pentru lichide)}, \\ \vec{v}_2 &= -k \operatorname{grad} p_2 \text{ (pentru gaze)}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}_2) = 0 \tag{5}$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^m e^{Bp}, \tag{6}$$

unde h are semnificația din ecuația (4), capitolul I, iar (6) reprezintă ecuația de stare sub forma dată de M. M u s k a t [13] *) pentru lichide, avînd $m = 0$ și $B = 0$ sau $\neq 0$, după cum lichidul este incompresibil sau compresibil, iar pentru gaze $B = 0$ și $m \neq 0$.

Condițiile la limită pe suprafața corpului vor fi cele folosite anterior

$$\vec{v}_1 = v_1 \vec{n}, \tag{7}$$

$$p_1 = p_2, \tag{8}$$

$$v_{1n} = v_{2n}. \tag{9}$$

Mai trebuie să știm de asemenea condițiile inițiale, precum și condiția în punctul de la infinit, sau, eventual, condițiile de la infinit și din alte puncte.

*) p. 137.

Forma (7) a vitezei normale pe S exprimă faptul că viteza tangențială trebuie să se anuleze pe suprafața corpului poros și, deoarece cînd $k = 0$ trebuie să regăsim cazul corpului impermeabil, v_1 pe S trebuie să fie o funcție de k, $v_1 = \chi(k)$, astfel încît $\chi(0) = 0$.

Dacă ținem seama de variațiile de temperatură și de schimburile de căldură, ecuațiile (1), (2), (3), (4), (5), (6) se completează cu alte ecuații, iar în (3) și (6) temperatura poate apare în mod explicit.

Problema rezolvării ecuațiilor (1), (2), (3) pentru un corp impermeabil prezintă dificultăți mari; se înțelege că pentru un corp poros de aceeași suprafață problema se complică și mai mult. Vom încerca să reprezentăm soluția prin dezvoltări de tipul celor folosite anterior:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{10} + k\vec{v}_{11} + k^2\vec{v}_{12} + \ldots, \tag{10}$$

$$p_1 = p_{10} + kp_{11} + k^2 p_{12} + \ldots, \tag{11}$$

$$p_2 = p_{20} + kp_{21} + k^2 p_{22} + \ldots, \tag{12}$$

aici fiind mai indicat de a lucra cu p_2 în loc de potențialul φ_2 al vitezelor din p_2; $\vec{v}_{10}$ și p_{10} vor corespunde corpului impermeabil, ca și mai sus. Determinînd pe p_{20} în urma rezolvării unei probleme Dirichlet interioare, aflăm viteza normală pe suprafața corpului, și vom avea de rezolvat în D_1 ecuațiile

$$\frac{\partial \vec{v}_{11}}{\partial t} + \operatorname{grad}(\vec{v}_{10}\vec{v}_{11}) + \operatorname{rot}\vec{v}_{10} \times \vec{x}v_{11} + \operatorname{rot}\vec{v}_{11} \times \vec{v}_{10} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p_{11} + \frac{\nu}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}_{11} + \nu\Delta\vec{v}_{11}, \tag{13}$$

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}_{11}) = 0, \tag{14}$$

$$f_1(p_{11}, \rho) = 0, \tag{15}$$

f_1 reprezentînd coeficientul lui k în dezvoltarea lui f după puterile coeficientului de filtrație, $\vec{v}_{11}$ fiind, cunoscut ca mărime pe S, iar direcția sa coincizînd cu direcția normalei. În f_1 poate intra și p_{10}, care este cunoscut din aproximația de ordin zero. Cu valorile primei aproximații găsim vitezele pe S în aproximația a doua ș.a.m.d.

În lucrarea de față ne vom limita la mișcările staționare ale fluidelor incompresibile pentru numere Reynolds foarte mici.

17. Mișcări cu numere Reynolds mici

Să presupunem că la mari distanțe fluidul are o mișcare de translație cu viteza $\vec{V}_0$, iar în D_2 nu avem surse pozitive sau negative. Luînd axa Ox paralelă cu $\vec{V}_0$, neglijînd în (1) termenii inerțiali, și neținînd seama de forțele de masă, cum se face de obicei, problema în definitiv se poate enunța astfel:

Să se determine două funcții scalare p_1 și p_2 și o funcție vectorială $\vec{v}_1$, știind că ele satisfac sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$\operatorname{grad} p_1 = \mu \Delta \vec{v}_1, \tag{16}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}_1 = 0, \tag{17}$$

$$\Delta p_2 = 0, \tag{18}$$

p_1 și $\vec{v}_1$ fiind definite în domeniul D_1 care conține punctul de la infinit, iar p_2 în domeniul simplu conex D_2, complementar lui D_1, pe frontiera comună a lui D_1 și D_2 avînd condițiile

$$p_1 = p_2, \tag{8}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 n, \tag{7}$$

$$v_1 = -K \frac{\partial p_2}{\partial n}, \tag{19}$$

$$\int_S v_1 \, d\sigma = 0, \tag{20}$$

iar

$$\lim_{r \to \infty} \vec{v}_1 = V_0 \vec{i} \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2), \tag{21}$$

V_0 și K și μ fiind niște constante.

Coeficientul K, în problema noastră, va fi egal cu $\frac{k}{\gamma}$, γ fiind greutatea specifică a fluidului.

Din (16) și (17) se deduce imediat

$$\Delta p_1 = 0, \tag{22}$$

deci presiunile p_1 și p_2 sînt funcții armonice în domeniile în care ele sînt definite.

Soluția problemei o vom exprima prin dezvoltările (10), (11), (12); aici p_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 0, 1, 2, \ldots)$ vor fi funcții armonice, iar p_{1j} și $\vec{v}_{1j}$ vor fi legați între ei prin ecuația liniară (16). Vom avea

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{grad} p_{1j} = \mu \Delta \vec{v}_{1j} \\ &\operatorname{div} \vec{v}_{1j} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (j = 0, 1, 2 \ldots) \quad \text{în } D_1 \tag{16'}$$

$$\Delta p_{2j} = 0 \qquad \text{în } D_2, \tag{17'}$$

$$\Delta p_{2j} = 0 \qquad \text{în } D_2, \tag{18'}$$

iar pe S

$$p_{1j} = p_{2j}, \tag{8}$$

$$\vec{v}_{1j} = v_{1j} \vec{n} \tag{7'}$$

$$v_{10} = 0,$$

$$v_{1l} = -K \frac{\partial p_{2l}}{\partial n} \qquad (l = 1, 2, \ldots) \tag{19'}$$

$$\int_S v_{1l} \, d\sigma = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots) \tag{20'}$$

$$\lim_{r \to \infty} \vec{v}_{10} = V_0 \vec{i} \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\lim_{r \to \infty} v_{1l} = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots). \tag{21'}$$

În locul ecuaţiei (17′) ne-am putea servi, evident, de

$$\Delta p_{1j} = 0 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{22′}$$

Să notăm că rezultatele ce se vor obţine prezintă un interes calitativ, în primul rînd, metoda noastră de corecţie aplicîndu-se acum unor ecuaţii care sînt ele însele aproximative.

18. Cazul sferei

Fie o sferă de rază a, şi să luăm centrul ei drept originea sistemului de referinţe. Pentru a revolza sistemul (16′), (17′) metoda utilizată în [61]*) ni s-a părut cea mai indicată. În coordonate sferice (16′) şi (17′) dau următoarele 3 ecuaţii:

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = \mu\left(\frac{\partial^2 \partial \varphi_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial \varphi_{1r}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \varphi_{1r}}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial \varphi_{1r}}{\partial \theta} - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \varphi_{1\theta}}{\partial \theta} - \frac{2\varphi_{1r}}{r^2} - \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\varphi_{1\theta}\right), \tag{23}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p_1}{\partial \theta} = \mu\left(\frac{\partial \varphi_{1\theta}}{\theta r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi_{1\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \varphi_{1\theta}}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial \varphi_{1\theta}}{\partial \theta} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial \varphi_{1r}}{\partial \theta} - \frac{\varphi_1}{r^2 \sin\theta}\right), \tag{24}$$

$$\frac{\partial \varphi_{1r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_{1\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_r}{r} + \frac{\varphi_{1\theta}\operatorname{ctg}\theta}{r} = 0. \tag{25}$$

iar (21), două condiţii,

$$\lim_{r\to\infty} \varphi_{1r} = V_0 \cos\theta, \tag{26}$$

$$\lim_{r\to\infty} \varphi_{1\theta} = -V_0 \sin\theta, \tag{27}$$

φ_{1r} şi $\varphi_{1\theta}$ fiind reprezentanţii prin

$$\varphi_{1r} = \varphi_{1r,0} + k\varphi_{1r,1} + \ldots, \tag{28}$$

$$\varphi_{1\theta} = \varphi_{1\theta,0} + k\varphi_{1\theta,1} + \ldots, \tag{29}$$

$\varphi_{1\theta,j}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ fiind nuli pe sfera de rază a.

Aproximaţia de ordin zero este bine cunoscută:

$$\varphi_{1r,0} = V_0 \cos\theta\left(1 - \frac{3}{2}\frac{a}{r} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right), \tag{30}$$

$$\varphi_{1\theta,0} = V_0 \sin\theta\left(1 - \frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right), \tag{31}$$

$$p_{1\theta} = -\frac{3}{2}\mu\frac{V_0 a}{r^2}\cos\theta. \tag{32}$$

*) p. 388.

Tensiunile pe suprafața sferei vor fi

$$p_{1rr,0} = -p_{10} + 2\mu \frac{\partial v_{1r,0}}{\partial r} = \frac{3}{2}\mu \frac{V_0}{a}\cos\theta, \tag{33}$$

$$p_{1r\theta,0} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_{1r,0}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{1\theta,0}}{\partial r} - \frac{v_{1\theta,0}}{r}\right) = -\frac{3}{2}\frac{\mu V_0}{2a}\sin\theta, \tag{34}$$

și, în ipoteza sferei impermeabile, rezultă formula clasică a lui Stokes

$$F_x = \int_0^{\pi} (p_{1rr,0}\cos\theta - p_{1r\theta,0}\sin\theta)\, 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta = 6\pi\mu a V_0. \tag{35}$$

Cunoaștem funcția armonică p_{20} pe suprafața sferei, care, după (8′) este

$$p_{20} = -\frac{3\mu V_0}{2}\cos\theta;$$

rezolvînd problema lui Dirichlet relativ la interiorul sferei, avem

$$p_{20} = -\frac{3\mu V_0 r}{2a^2}\cos\theta, \tag{36}$$

și deci viteza pe suprafața sferei va fi

$$v_{1r,1} = \frac{3\mu V_0}{2\rho g a^2}\cos\theta. \tag{37}$$

Acum avem de rezolvat ecuațiile (23), (24), (25) pentru $v_{1r,1}$ $v_{1\theta,1}$, și p_{11}, cu condițiile la limită corespunzătoare. Forma condiției (37) ne sugerează să punem

$$v_{1r,1} = f(r)\cos\theta,$$

iar condițiile de simetrie ale lui p_{11} față de axa Ox și de antisimetrie a lui $v_{1\theta,1}$ față de aceeași axă, să luăm

$$v_{1\theta,1} = g(r)\sin\theta,$$
$$p_{11} = \mu h(r)\cos\theta.$$

Funcțiile f, g și h vor satisface ecuațiile

$$h' = f'' + \frac{2}{r}f' - \frac{4(f+g)}{r^2},$$

$$\frac{h}{r} = -g'' - \frac{2}{r}g' + \frac{2(f+g)}{r^2},$$

$$f' + 2\frac{(f+g)}{r} = 0,$$

cu condițiile la limită

$$\left.\begin{aligned} f(a) &= \frac{3\mu V_0}{2\rho g a^2}, \qquad & g(a) &= 0 \\ f(\infty) &= g(\infty) = h(\infty) = 0; & & \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

f, g, și h vor fi dați de

$$f = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2,$$

$$g = \frac{A}{2r^3} - \frac{B}{2r} - C - 2Dr^2,$$

$$h = \frac{B}{r^2} + 10\,Dr.$$

Condițiile (38) cer ca $D = C = 0$, iar A și B să aibă valorile

$$A = a^2 B, \qquad B = \frac{3\mu V_0}{4\rho g a}, \tag{39}$$

de unde, în primă aproximație, notînd $H = \frac{3\mu V_0}{4\rho g a}$, avem

$$\begin{aligned} v_{1r,1} &= H\left(\frac{a^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \\ v_{1\theta,1} &= \frac{H}{2}\left(\frac{a^2}{r^3} - \frac{1}{r}\right)\sin\theta, \\ p_{11} &= \mu\frac{H}{r^2}\cos\theta. \end{aligned} \tag{40}$$

După prima relație din (40) se vede că fluidul intră prin suprafața emisferei amonte și iese prin suprafața emisferei aval, ceea ce era de așteptat, căci, după (36), presiunea este mai mare în amonte decît în aval; rezultatul se poate vedea și direct din expresia lui $v_{1r,1}$, pentru $r = a$ (formula (37)). Pe suprafața sferei vom avea

$$p_{11} = \frac{3\mu^2 V_0}{4\rho g a^3}\cos\theta,$$

de unde

$$(p_1)_{r=a} = -\frac{3\mu V_0}{2a}\left(1 - \frac{k\mu}{2\rho g a^2}\right)\cos\theta \tag{41}$$

și deci presiunea este mai mică pe fața amonte a sferei și mai mare pe cea aval, decît în cazul $k = 0$, ceea ce face ca și vitezele normale pe sferă, în a doua aproximație, să se micșoreze în valoare absolută față de prima aproximație. Condiția (20′) este satisfăcută de (37) sau de prima ecuație (40) pentru $r=a$.

Fluxul hidrodinamic prin segmentul de sferă de rază r_0 cu centrul în originea coordonatelor, cu vîrful pe Ox, și cu deschiderea $2\theta_0$, este dat de

$$\begin{aligned} Q = \rho\int_0^{\theta_0} v_{1r}\cdot 2\pi r_0^2\sin\theta\,d\theta = \rho\pi V_0\sin^2\theta_0\Bigg[r_0^2 - \frac{3}{2}ar_0 + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r_0} + \\ + \frac{3k\mu}{4\rho g}\left(\frac{a}{r_0} + \frac{r_0}{a}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{42}$$

Vitezele în planul $\theta = \frac{\pi}{2}$ vor fi

$$\left.\begin{aligned} &v_r\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 && \text{în } D_1 \text{ și } D_2, \\ &v_\theta = \frac{3\mu V_0}{8\rho gar}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1\right] && \text{în } D_1, \\ &v_\theta = -\frac{3k\mu V_0}{2\rho ga^2} && \text{în } D_2. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

19. Generalizarea formulei lui Stokes

Vom aplica acum formulele (16) și (17) din primul capitol la cazul nostru F_y și M vor fi nule, și nu ne mai rămîne să calculăm decît pe F_x, care are expresia

$$F_x = (1-m)\int_S \Phi_{nx}\, d\sigma - m\int_S p n_x\, d\sigma.$$

Aici

$$\Phi_{nx} = p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta, \quad n_x = \cos\theta,$$

și înlocuind,

$$F_x = \int_0^\pi \left\{\left[-p + 2\mu(1-m)\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\right]_{r=a}\cos\theta - \right.$$

$$\left. - \mu(1-m)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right|_{r=a}\sin\theta\right\} 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta,$$

de unde, în primă aproximație,

$$F_x = 6\pi a\mu V_0\left(1 - \frac{2}{3}m - \frac{1}{2}\frac{\mu k}{\rho g a^2} + \frac{m\mu k}{3\rho g a^2}\right), \tag{44}$$

ceea ce reprezintă generalizarea formulei lui Stokes pentru o sferă poroasă. Se vede că forța aplicată asupra sferei scade.

Să ne reamintim că deși mișcarea în sferă se face ținînd seama de forțele de viscozitate, totuși, global, lichidul se comportă ca un fluid ideal. Formula (44) a fost obținută egalînd presiunea pe suprafața sferei cu invariantul $-\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33})$ din D_1 pe S, direcțiile principale ale tensorului tensiune admițîndu-se că sînt identice cu acelea ale tensorului deformație; se pune întrebarea dacă p nu trebuie înlocuit mai bine cu tensiunea normală în punctul respectiv de pe S. În ultima ipoteză expresia lui F_x este

$$F_x = \int_0^\pi \left\{\left[-p + 2\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\right]_{r=a}\cos\theta - \mu(1-m)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{r=a}\sin\theta\right\} 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta$$

și ea va da

$$F_x = 6\pi\, a\mu\, V_0\left(1 - \frac{2}{3}\, m - \frac{1}{2}\,\frac{\mu k}{\rho g a^2} - \frac{mk\mu}{\rho g a^2}\right). \tag{45}$$

Diferența între expresiile (44) și (47) este $(8\pi V_0 \mu^2\, km)\,(a\gamma)^{-1}$; neglijînd ultimul termen, ca fiind foarte mic față de ceilalți termeni, obținem

$$F_x = 6\pi\, a\mu V_0\left(1 - \frac{2}{3}\, m - \frac{1}{2}\,\frac{\mu k}{\rho g a^2}\right).$$

Dacă înlocuind pe k printr-o expresie în funcțiune de m, am putea scrie simbolic

$$F_x = 6\pi a\mu V_0\,[1 - \psi\,(m)], \tag{46}$$

unde $\psi\,(m)$ este astfel încît $\psi\,(0) = 0$.

Considerînd că sfera se mișcă sub acțiunea cîmpului gravitațional și notînd cu ρ' densitatea materialului din care este făcută sfera, vom egala expresia (46) a lui F_x cu greutatea sferei, ținînd seamă că din volumul sferei numai fracțiunea $(1 - m)$ este ocupată de mediul solid:

$$6\pi a\mu V_0\left(1 - \frac{2}{3}\, m - \frac{1}{2}\,\frac{\mu k}{\rho g a^2}\right) = \frac{4}{3}\,\pi a^3 g\,(\rho' - \rho)\,(1 - m),$$

de unde putem scoate pe V_0,

$$V_0 = \frac{2a^2 g\,(\rho' - \rho)}{9\mu}\cdot\frac{1 - m}{1 - \frac{2}{3}\, m - \frac{1}{2}\,\frac{\mu k}{\rho g a^2}}, \tag{47}$$

pentru m și k foarte mici, astfel încît termenii negativi de la numitor sînt în valoare absolută $\ll 1$, mai putem da formula aproximativă

$$V_0 = \frac{2a^2 g\,(\rho' - \rho)}{9\,\mu}\left(1 - \frac{1}{3}\, m + \frac{\mu k}{2\rho g a^2}\right). \tag{48}$$

Înlocuind pe k în funcție de m, din (48) obținem că termenul corectiv este o funcție de m care se anulează odată cu acesta.

Interpretarea fizică a formulei (46) este simplă: fluidul găsind mai multe căi de acces pentru a ajunge din amontele în avalul sferei — față de corpul impermeabil — urmează că în mod necesar rezistența trebuie să se micșoreze. Cînd $k = m = 0$, dăm peste formula clasică (35).

20. Calculul rotorului

Ecuația liniarizată (16) ne descrie mișcarea pentru punctele din apropierea sferei; de aceea, pentru a afla rotorul, într-o măsură mai precisă în fluid, vom înlocui pe (16) prin ecuația lui Oseen

$$V_0\,\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\; p_1 + \nu\Delta\vec{v}_1, \tag{49}$$

celelalte ecuații și condiții la limită rămînînd neschimbate. Ecuația (49) fiind liniară, urmează că ea va fi valabilă pentru fiecare grup p_{1j}, $\vec{v}_{1j}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ și procedeul de a afla o aproximație oarecare va urma foarte îndeaproape procedeul folosit la găsirea grupului p_{10}, $\vec{v}_{10}$.

Din (49) și (17) urmează că p_1 continuă să fie o funcție armonică în D_1; cu $\vec{\Omega}_1 = \text{rot}\ \vec{v}_1$ (49) se transformă în

$$V_0 \frac{\partial \vec{\Omega}_1}{\partial x} = \nu \Delta \vec{\Omega}_1 \tag{50}$$

și ajungem să scriem [61] *)

$$\left.\begin{aligned} v_{1r} &= \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{1}{2h}\frac{\partial \chi}{\partial r} - \chi \cos\theta, \quad \left(h = \frac{V_0}{2\nu}\right) \\ v_{1\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{2hr}\frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \chi \sin\theta, \\ p_1 &= -\rho V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

unde φ și χ, pentru aproximația de primul ordin, care ne interesează aici, au expresiile

$$\chi = C_0\left[\frac{1}{r} - h(1-\cos\theta) - \frac{h^2 r}{2}(1-\cos\theta)^2\right] - C_1\left(\frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{h\cos^2\theta}{r}\right) + C_2 \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} + \ldots \tag{52}$$

$$\varphi = \frac{A_0}{r} - \frac{A_1 \cos\theta}{r^2} + A_2 \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} + \ldots; \tag{53}$$

în (52) nu mai figurează termenul constant $-V_0$ ca în aproximația de ordin zero, deoarece aici la infinit $\vec{v}_{11}$ trebuie să se anuleze.

Presiunea are expresia

$$p = -\frac{3}{2}\mu V_0 a\left(1 + \frac{3ha}{4}\right)\frac{\cos\theta}{r} - \frac{1}{2}\rho \frac{V_0^2 a^3}{r^3}(3\cos^2\theta - 1) + \ldots$$

iar pe suprafața sferei este [61],

$$p_{10} = -\frac{3}{2}\mu V_0\left(1 + \frac{3ha}{4}\right)\frac{\cos\theta}{a} - \frac{1}{2}\rho V_0^2(3\cos^2\theta - 1). \tag{54}$$

*) p. 404.

Să observăm că raportul primului termen către cel de al doilea este de ordinul R^{-1}, și de aceea vom neglija termenul al doilea din (54); cu această aproximație, presiunea în interiorul sferei va fi

$$p_{20} = -\frac{3}{2}\mu V_0 r\left(1+\frac{3ha}{4}\right)\frac{\cos\theta}{a^2}, \tag{55}$$

de unde, pentru $r = a$,

$$\varphi_{1r,1} = \frac{3\mu V_0}{2\rho g}\left(1+\frac{3ha}{4}\right)\frac{\cos\theta}{a^2}. \tag{56}$$

Comparîndu-se cu soluția obținută din (16) se observă că A_0 este tot de ordinul lui R^{-1}, deci ne așteptăm ca A_1 să fie de ordinul 1, A_2 de ordinul R, ș.a.m.d., iar C_0 să fie de ordinul 1, C_1 de ordinul lui R etc. Introducem pe (52) și (53) în (51) și scriem că $\varphi_{1r,1}(a, \theta)$ este dat de (56), iar $\varphi_{10,1}$, $(a, \theta) = 0$; egalînd coeficienții lui 1, $\cos\theta$ și $3\cos^2\theta - 1$, obținem 5 ecuații pentru 6 coeficienți necunoscuți:

$$\left.\begin{aligned}
&A_0 + \frac{C_0}{2h} - \frac{C_1}{2} = 0,\\
&2A_1 - C_0 a^2\left(1-\frac{ha}{2}\right) + \frac{C_1}{h} = Ka^3,\\
&3A_2 + C_0\frac{ha^4}{4} - C_1\frac{a^2}{2} + \frac{3C_2}{2h} = 0,\\
&A_1 + C_0\frac{a^2}{2}(1-ha) + \frac{C_1}{2h} = 0,\\
&6A_2 - \frac{C_0 ha^4}{2} + \frac{3C_2}{h} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Se obține ușor

$$\left.\begin{aligned}
C_0 &= -\frac{2Ka}{4-3ha},\\
C_1 &= \frac{2Kha^3}{4-3ha},\\
A_0 &= \frac{Ka(1+h^2a^2)}{h(4-3ha)},\\
A_1 &= \frac{Kha^4}{4-3ha},
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

unde s-a notat

$$K = \frac{3\mu V_0}{2\rho g a^2}\left(1+\frac{3ha}{4}\right). \tag{59}$$

Neglijînd în A_0 și A_1 termenii de ordinul lui h, iar în C_0 și C_1 termenii de ordinul h^2, care se găsesc în afara lui K, avem

$$C_0 \cong -\frac{Ka}{2}\left(1+\frac{3ha}{4}\right),$$

$$C_1 \cong \frac{Kha^3}{2},$$

$$A_0 \cong \frac{Ka}{4h}\left(1+\frac{3ha}{4}\right), \tag{60}$$

$$A_1 \cong -\frac{Kha^4}{4}.$$

Introducînd expresiile (60) în (52) și (53), iar pe χ și φ astfel aflați în (5), găsim pe $v_{1r,1}$, $v_{10,1}$ și p_{11}; pe noi ne interesează aici calculul rotorului, ale cărui componente sînt

$$\Omega_x = 0,$$

$$\Omega_y = -\frac{\partial \chi}{\partial z},$$

$$\Omega_z = \frac{\partial \chi}{\partial y};$$

avem, aproximativ,

$$\chi \cong C_0 \frac{e^{h(x-r)}}{r},$$

de unde

$$\Omega \cong C_0\, e^{-hr(1-\cos\theta)} \frac{1+hr}{r^2} \sin\theta$$

și putem scrie expresia lui

$$\Omega \cong \frac{a}{2}\left(1+\frac{3\,ha}{4}\right)(3\,V_0 - kK)\, e^{-hr(1-\cos\theta)} \frac{1+hr}{r^2} \sin\theta. \tag{61}$$

Pentru $\theta = \frac{1}{hr}$, hr fiind foarte mare,

$$\Omega \cong \frac{a}{2}\left(1+\frac{3ha}{4}\right)(3\,V_0 - kK)\sqrt{\frac{h}{er^3}}.$$

Rezultatul analizei noastre este că vîrtejurile sînt mai mici în cazul sferei poroase decît în cazul sferei impermeabile. O explicație ar fi că sfera poroasă permite o scurgere a fluidului vîscos care este mai apropiată de situația absenței obstacolului — cînd vîrtejurile lipsesc — decît scurgerea în jurul aceleiași sfere, însă impermeabilă.

Calcule analoge celor din paragrafele 17, 18 și 19 se pot face și la cilindrul circular.

21. Extinderi la alte cazuri

Putem considera, ca la paragraful 12, cazul unui corp poros care conține un corp impermeabil de suprafață S_1. Formularea problemei rămîne cea de la paragraful 16, cu diferența că domeniul D_2 va fi acum limitat de S și S_1, iar p_2 pe S_1 va satisface condiția suplimentară

$$\frac{\partial p_2}{\partial n} = 0 \qquad \text{pe } S_1. \tag{62}$$

Condițiile (20′) vor fi satisfăcute pentru aceleași motive ca la paragraful 12.

De exemplu, pentru o sferă poroasă de rază a care conține o sferă impermeabilă de rază a_1, ambele sfere avînd același centru, condiția (62) se desface în

$$\frac{\partial p_{2j}}{\partial r} = 0 \ (j = 0, 1, 2, \ldots) \text{ pentru } r = a_1. \tag{62'}$$

Funcția p_{20} va satisface (8′) pentru $r = a$ și (62′) pentru $r = a_1$ și se obține

$$p_{20} = -\frac{3\mu V_0 a}{2a^3 + a_1^3}\left(r + \frac{a_1^3}{2r^2}\right)\cos\theta. \tag{63}$$

Expresiile lui $v_{1r,1}$ și $v_{10,1}$ rămîn valabile, cu diferența că H va avea aici valoarea

$$H = \frac{3\mu V_0 a^2 (1 - a_1^3 a^{-3})}{2\rho g (2a^3 + a_1^3)}; \tag{64}$$

p_{11} are astfel expresia, pentru $r = a$,

$$p_{11} = \frac{3\mu V_0 (1 - a_1^3 a^{-3})}{2\rho g a (2a^3 + a_1^3)}\cos\theta, \tag{65}$$

iar în D_2 p_{21} va fi reprezentat prin

$$p_{21} = \frac{3\mu V_0 a (1 - a_1^3 a^{-3}}{\rho g (2a^3 + a_1^3)^2}\left(r + \frac{a_1^3}{2r^2}\right)\cos\theta. \tag{66}$$

Calculînd forța care se exercită asupra întregului corp, se poate obține o nouă generalizare a legii lui Stokes, pentru $a_1 = 0$ căpătînd formula (46), iar pentru $a = a_1$ formula (35).

Folosind un sistem de coordonate adecuat, s-ar putea trata și problema unei sfere impermeabile, excentric așezată într-o sferă poroasă.

De asemenea, ca și la paragraful 13, se poate considera cazul unui corp poros continuat cu un corp impermeabil. Vom avea atunci, cu aceleași notații relative la suprafețe ca în paragraful amintit, o condiție suplimentară pentru p_2

$$\frac{\partial p_2}{\partial n} = 0 \text{ pe } S'', \tag{67}$$

iar condițiile (7), (8) și (19) se înlocuiesc prin

$$p_1 = p_2 \text{ pe } S', \tag{68}$$

$$\vec{v}_1 = 0 \text{ pe } S''', \tag{69}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_1 &= v_1 \vec{n} \\ v_1 &= K - \frac{\partial p_2}{\partial n} \end{aligned}\right\} \text{ pe } S', \tag{70}$$

p_2 fiind acum definitiv în domeniul mărginit de S' și S'', iar p_1 tot în domeniul exterior lui S ($S = S' + S'''$).

Se pot face aplicații analoge celor de la paragraful 13.

Capitolul IV

MIȘCAREA FLUIDELOR ÎN PREZENȚA CORPURILOR POROASE NEOMOGENE

22. Cele 3 tipuri de corpuri neomogene

Cînd coeficientul de filtrație nu mai este același în fiecare punct al unui corp poros, presupus izotrop, se spune că avem un corp poros neomogen. De fapt, în capitolul II și capitolul III, noi am considerat niște cazuri speciale de corpuri neomogene, cînd am luat un corp poros, cu un k constant, care are alipit sau include unul sau mai multe corpuri impermeabile. Potențialul mișcării în mediul poros, precum și potențialul mișcării în fluidul liber, pentru fluidele ideale, sau funcțiile p_1 și $\vec{v}_1$ în cazul fluidelor reale, au depins astfel numai de constanta k. Am putea numi neomogenitatea de acest fel, o neomogenitate de tip I. Alt caz este cînd mediul poros este împărțit în mai multe regiuni, în fiecare din ele coeficientul de filtrație avînd o valoare constantă, diferită de valorile aceluiași coeficient în regiunile învecinate; neomogenitatea întîlnită o vom denumi neomogenitate de tip II. În sfîrșit, în cazul cel nai general, cînd k variază de la punct la punct, probleme de acest fel, care oferă dificultăți mari și în hidrogazodinamica subterană, le vom numi probleme cu neomogenitate de tip III.

Să observăm că printr-un proces de trecere la limită putem stabili o legătură între corpurile impermeabile, corpurile poroase omogene și corpurile poroase care prezintă o neomogenitate din primele două tipuri. Fie un corp poros împărțit în 3 regiuni, fiecare cu un coeficient de filtrație constant ($k_1 \neq k_2 \neq k_3$); neomogenitatea este de tip II, și va rămîne ca atare dacă vom anula unul din coeficienții de filtrație; egalînd cu zero 2 din coeficienți, obținem o neomogenitate de tipul I, iar cînd $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, obținem un corp impermeabil; în sfîrșit, dacă avem $k_1 = k_2 = k_3 = k \neq 0$ căpătăm un corp poros omogen.

La fel se poate stabili o legătură între corpurile cu neomogenitate de tipul III și celelalte tipuri de corpuri.

În acest capitol ne vom ocupa numai de corpurile cu neomogenitate de tip II, și deoarece găsirea mișcării în domeniul ocupat de fluidul liber se reduce la o succesiune de probleme Neumann exterioare (fluidele ideale), sau la găsirea unor funcții ce satisfac un sistem de ecuații cu derivate parțiale în D_1 și anumite

condiţii pe suprafaţa corpului (fluidele reale), atenţia ne va fi îndreptată asupra mişcării din interiorul corpului, această mişcare determinînd mişcarea în D_1, pentru aproximaţiile următoare celei de ordin zero. Vom fi conduşi astfel la noi probleme la limită ale fizicei matematice, referitoare la un domeniu mărginit.

23. Anularea fluxului hidrodinamic prin suprafaţa corpului

Pentru un corp poros neomogen, format din l ($l \geqslant 2$) medii diferite, cînd nu avem singularităţi ale mişcării fluidului în mediul poros, condiţia

$$\int_S \varphi_n \, d\sigma = 0$$

trebuie neapărat satisfăcută, indiferent de felul cum este privit fluidul în exteriorul corpului poros, şi indiferent de singularităţile din fluidul liber ce determină mişcarea. Vom arăta că această condiţie este totdeauna satisfăcută, ca urmare a faptului că p_j este o funcţie armonică în domeniul său de definiţie D_j ($j = 2, 3, \ldots, l+1$; D_1 rămîne ca şi mai înainte, domeniul exterior corpului poros) şi a condiţiilor la limită pe suprafaţa de separare a două medii poroase diferite.

Fie un corp format din două medii poroase diferite, avînd coeficienţii k_2 şi k_3 şi suprafeţele reprezentate prin $S_2 + S_4$, $S_3 + S_4$, suprafaţa întregului corp fiind dată de $S_2 + S_3$. Trebuie să demonstrăm că

$$\int_{S_2} v_{1n} \, d\sigma + \int_{S_3} v_{1n} \, d\sigma = 0.$$

Dar, pe S_2 am $\varphi_{1n} = \frac{k}{\gamma} \frac{\partial p_2}{\partial n}$ iar pe S_3, $\varphi_{1n} = \frac{k}{\gamma} \frac{\partial p_3}{\partial n}$; luînd normalele interioare, şi suma de mai sus se poate scrie

$$k_2 \int_{S_2} \frac{\partial p_2}{\partial n} \, d\sigma + k_3 \int_{S_3} \frac{\partial p_3}{\partial n} \, d\sigma = 0.$$

Însă funcţiile p_2 şi p_3 sînt armonice, şi deci avem

$$\int_{S_2} \frac{\partial p_2}{\partial n} \, d\sigma + \int_{S_4} \frac{\partial p_2}{\partial n} \, d\sigma = 0,$$

$$\int_{S_3} \frac{\partial p_3}{\partial n} \, d\sigma + \int_{S_4} \frac{\partial p_3}{\partial n} \, d\sigma = 0.$$

Înmulţind prima relaţie cu k_2 şi a treia cu k_3 şi adunînd, obţinem

$$k_2 \int_{S_2} \frac{\partial p_2}{\partial n} \, d\sigma + k_3 \int_{S_3} \frac{\partial p_3}{\partial n} \, d\sigma + k_2 \int_{S_4} \frac{\partial p_2}{\partial n} \, g\sigma + k_3 \int_{S_4} \frac{\partial p_3}{\partial n} \, d\sigma = 0.$$

Pe S_4 avînd

$$k_2 \frac{\partial p_2}{\partial n} = - k_3 \frac{\partial p_3}{\partial n},$$

ultimele două integrale se anulează și afirmația noastră este demonstrată.

Cazul cînd unul sau mai multe medii poroase nu au nici o suprafață comună cu fluidul liber, conduce la aceeași concluzie.

De asemenea, se poate arăta că fluxul hidrodinamic este nul prin suprafața corpului și pentru fluidele compresibile, ceea ce rezultă din armonicitatea funcțiilor $P_j (j = 0, 1, 2, \ldots)$ și a condițiilor la limită corespunzătoare.

24. Problemele fundamentale

Problema A. Prima problemă pe care o vom considera, și pe care o vom numi *problema A*, este problema unui corp format din două medii diferite; un mediu ce ocupă un domeniu D_2, limitat către fluidul liber de o suprafață S și către cel de al doilea mediu, ce ocupă domeniul D_2, prin suprafața S'; un astfel de corp îl vom numi de tip A. Fie k_2, k_3, φ_2, și φ_3 coeficienții de filtrație și potențialele vitezelor în cele două medii. Este natural să considerăm că potențialul vitezelor φ_1, în domeniul D_1 exterior suprafeței S, va depinde atît de k_2, cît și de k_3; vom lua deci

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + k_2 \varphi_{11,2} + k_3 \varphi_{11,3} + k_2^2 \varphi_{12,2} + k_3^2 \varphi_{12,3} k_2 k_3 \varphi_{12,23} + \ldots \tag{1}$$

Cît privește pe φ_2 și φ_3, ele vor depinde de asemenea de k_2 și k_3, și vor trebui să se anuleze, respectiv, odată cu k_2 și k_3,

$$\varphi_2 = k_2 (\varphi_{20} + k_2 \varphi_{21,2} + k_3 \varphi_{21,3} + k_2^2 \varphi_{22,2} + k_3^2 \varphi_{22,3} + k_2 k_3 \varphi_{22,23} + \ldots) \tag{2}$$

$$\varphi_3 = k_3 (\varphi_{30} + k_3 \varphi_{31,3} + k_2 \varphi_{31,2} + k_3^2 \varphi_{32,3} + k_2^2 \varphi_{32,2} + k_2 k_3 \varphi_{32,23} + \ldots) \tag{3}$$

Din egalitatea presiunilor și vitezelor pe S și S' rezultă 4 condiții, considerînd, pentru a fixa ideile, că în D_1 mișcarea la mari distanțe este o translație cu viteza V_0,

$$\left.\begin{aligned} p_0 + \frac{\rho}{2} [V_0 - (\operatorname{grad} \varphi_1)^2] &= - \frac{\rho g}{k} \varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \\ \frac{\varphi_2}{k_2} &= \frac{\varphi^3}{k_3}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \end{aligned}\right\} \text{ pe } S.$$

Înlocuind pe φ_1, φ_2 şi φ_3 prin (1), (2), (3), avem

$$p_0^2 + \frac{\rho}{2} \cdot V_0^2 - \frac{\rho}{2}\{(\text{grad}\,\varphi_{10})^2 + 2\text{grad}\,\varphi_{10}(k_2\,\text{grad}\,\varphi_{11,2} + k_3\,\text{grad}\,\varphi_{11,3}) +$$

$$+ k_2^2[(\text{grad}\,\varphi_{11,2})^2 + 2\text{grad}\,\varphi_{12,2}\,\text{grad}\,\varphi_{10}] + k_3^2[(\text{grad}\,\varphi_{11,3})^2 + \quad (4)$$

$$+ 2\text{grad}\,\varphi_{12,3}\,\text{grad}\,\varphi_{10}] + 2k_2k_3(\text{grad}\,\varphi_{12,23}\,\text{grad}\,\varphi_{10} + \text{grad}\,\varphi_{11,2}\,\text{grad}\,\varphi_{11,3}) +$$

$$+ \ldots\} = -\rho g\,(\varphi_{20} + k_2\varphi_{21,2} + k_3\,\varphi_{21,3} + k_2^2\varphi_{22,2} + k_3^3\varphi_{22,3} + k_2k_3\varphi_{22,23} + \ldots)\,\text{pe } S,$$

$$\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial n} + k_2\,\frac{\partial\varphi_{11,2}}{\partial n} + k_3\,\frac{\partial\varphi_{11,3}}{\partial n} + k_2^2\,\frac{\partial\varphi_{12,2}}{\partial n} + k_3^2\,\frac{\partial\varphi_{12,3}}{\partial n} + k_2k_3\,\frac{\partial\varphi_{12,23}}{\partial n} + \ldots = \quad (5)$$

$$= k_2\left(\frac{\partial\varphi_{20}}{\partial n} + k_2\frac{\partial\varphi_{21,2}}{\partial n} + k_3\frac{\partial\varphi_{21,3}}{\partial n} + k_2^2\frac{\partial\varphi_{22,3}}{\partial n} + k_3^2\frac{\partial\varphi_{22,3}}{\partial n} + k_2k_3\,\frac{\partial\varphi_{22,23}}{\partial n}\right., \ldots \text{pe } S,$$

$$\varphi_{20} + k_2\varphi_{21,2} + k_3\varphi_{21,3} + k_2^2\,\varphi_{22,2} + k_3^2\,\varphi_{22,3} + k_2k_3\,\varphi_{22,23} + \ldots = \quad (6)$$

$$= \varphi_{30} + k_3\varphi_{31,3} + k_2\varphi_{31,2} + k_3^2\,\varphi_{32,3} + k_2^2\,\varphi_{32,2} + k_2k_3\,\varphi_{22,23} + \ldots \text{ pe } S',$$

$$k_2\left(\frac{\partial\varphi_{20}}{\partial n} + k_2\,\frac{\partial\varphi_{21,2}}{\partial n} + k_3\,\frac{\partial\varphi_{21,3}}{\partial n} + k_2^2\,\frac{\partial\varphi_{22,2}}{\partial n} + k_3^2\,\frac{\partial\varphi_{22,3}}{\partial n} + k_2k_3\,\frac{\partial\varphi_{22,23}}{\partial n} + \ldots\right) = \quad (7)$$

$$= k_3\left(\frac{\partial\varphi_{30}}{\partial n} + k_3\,\frac{\partial\varphi_{31,3}}{\partial n} + k_2\,\frac{\partial\varphi_{31,2}}{\partial n} + k_3^2\,\frac{\partial\varphi_{32,3}}{\partial n} + k_2^2\,\frac{\partial\varphi_{32,2}}{\partial n} + k_2k_3\,\frac{\partial\varphi_{32,23}}{\partial n} + \ldots\right)\text{pe } S'.$$

Am scris relaţiile de mai sus pentru a se vedea mai bine cum se va aplica procedeul de rezolvare. Din (5) este clar că, egalînd coeficienţii lui k_2, k_3, k_2^2, k_3^2 şi k_2k_3, vom avea pe S

$$\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial n} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial\varphi_{11,2}}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_{20}}{\partial n}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial\varphi_{11,3}}{\partial n} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial\varphi_{12,2}}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_{21,2}}{\partial n}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial\varphi_{12,3}}{\partial n} = 0. \quad (12)$$

$$\frac{\partial\varphi_{12,23}}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_{21,3}}{\partial n}, \quad (13)$$

. . . . . .

În condiția (4) vom egala de asemenea coeficienții lui k_2, k_3, k_2^2, k_3^2 și k_2k_3 și obținem tot pe S,

$$p_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2 - \frac{\rho}{2} (\text{grad } \varphi_{10}) = - \rho g \varphi_{20}, \tag{14}$$

$$\text{grad } \varphi_{10} \text{ grad } \varphi_{11,2} = g\varphi_{21,2}, \tag{15}$$

$$\text{grad } \varphi_{10} \text{ grad } \varphi_{11,3} = g\varphi_{21,3}, \tag{16}$$

$$(\text{grad } \varphi_{11,2})^2 + 2\text{grad } \varphi_{12,2} \text{ grad } \varphi_{10} = 2g\varphi_{22,2}, \tag{17}$$

$$(\text{grad } \varphi_{11,3})^2 + 2\text{grad } \varphi_{12,3} \text{ grad } \varphi_{10} = 2g\varphi_{22,3}, \tag{18}$$

$$\text{grad } \varphi_{12,23} \text{ grad } \varphi_{10} + \text{grad } \varphi_{11,2} \text{ grad } \varphi_{11,3} = g\varphi_{22,23}, \tag{19}$$

. . . . . .

Din (6) rezultă, de asemenea, imediat

$$\varphi_{20} = \varphi_{30}, \tag{20}$$

$$\varphi_{21,2} = \varphi_{31,2}, \tag{21}$$

$$\varphi_{21,3} = \varphi_{31,3}, \tag{22}$$

$$\varphi_{22,2} = \varphi_{32,2}, \tag{23}$$

$$\varphi_{22,3} = \varphi_{32,3}, \tag{24}$$

$$\varphi_{22.23} = \varphi_{32,23}, \tag{25}$$

. . . . . .

Trecînd la ultima condiție pe S', am fi tentați să procedăm tot prin egalarea coeficienților lui k_1, k_2, . . . ; am avea atunci, de exemplu,

$$\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{30}}{\partial n} = 0,$$

ceea ce ar însemna că S reprezintă o suprafață impermeabilă, atît pentru φ_{20} cît și pentru φ_{30}, ceea ce este fals. Ținînd seama că egalarea primilor termeni din stînga și din dreapta relației (7) nu reprezintă decît egalitatea vitezei din prima aproximație, atît pentru φ_2, cît și pentru φ_3, urmează că în mod obligator sîntem conduși să punem pe S',

$$k_2 \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial n} = k_3 \frac{\partial \varphi_{30}}{\partial n}. \tag{26}$$

Continuînd în același mod, avem pe S',

$$k_2^2 \frac{\partial \varphi_{21,2}}{\partial n} + k_2 k_3 \frac{\partial \varphi_{21,3}}{\partial n} = k_3^2 \frac{\partial \varphi_{31,3}}{\partial n} + k_2 k_3 \frac{\partial \varphi_{31,2}}{\partial n}, \tag{27}$$

$$k_2^3 \frac{\partial \varphi_{22,2}}{\partial n} + k_2 k_3^2 \frac{\partial \varphi_{22,3}}{\partial n} k_2^2 k_3 \frac{\partial \varphi_{22,23}}{\partial n} = k_3^2 \frac{\partial \varphi_{32,3}}{\partial n} + k_3 k_2^2 \frac{\partial \varphi_{32,2}}{\partial n} + k_2 k_3^2 \frac{\partial \varphi_{32,23}}{\partial n} \tag{28}$$

. . . . . .

Relațiile (27) și (28) exprimă egalitatea vitezei normale cînd trecem din domeniul D_2 în D_3, sau viceversa, și ele ne dau

$$k_2^2 \frac{\partial \varphi_{21,2}}{\partial n} = k_3^2 \frac{\partial \varphi_{31,3}}{\partial n}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial \varphi_{21,3}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{31,2}}{\partial n}, \tag{30}$$

$$k_2^3 \frac{\partial \varphi_{22,2}}{\partial n} = k_3^3 \frac{\partial \varphi_{32,3}}{\partial n}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial \varphi_{22,3}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{32,33}}{\partial n}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \varphi_{22,23}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{32,2}}{\partial n}, \tag{33}$$

. . . . . .

Calea de urmat este acum clară. Din (8) urmează că trebuie să găsim mișcarea în jurul suprafeței S, socotită, pentru aproximația de ordin zero, ca impermeabilă. φ_{10} introdus în (14) ne dă pe φ_{20} pe S, iar legătura dintre φ_{20} și φ_{30} pe S' este indicată de (20) și (26). Pentru φ_{20} și φ_{30} avem de rezolvat deci următoarea problemă:

Să se determine două funcții armonice φ_{20} și φ_{30}, prima definită în domeniul D_2, limitat de suprafețele S și S', iar a doua în domeniul D_3, mărginit de suprafața S', cunoscînd valoarea lui φ_{20} pe S, precum și două condiții pe S', prima care leagă valorile lui φ_{20} și φ_{30}, iar a doua valorile derivatelor lor normale.

Din (9) urmează că $\varphi_{11,2}$ se află rezolvînd o problemă Neumann exterioară, relativă la domeniul D_1. Relația (10), împreună cu condiția în punctul de la infinit, dă

$$\varphi_{11,3} = \text{const.} \tag{34}$$

Observăm că și (12) conduce la

$$\varphi_{11,3} = \text{const.} \tag{35}$$

și cum potențialul vitezelor este determinat cu aproximația unei constante reale

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + k_2 \varphi_{11,2} + k_2^2 \varphi_{12,2} + k_2 k_3 \varphi_{11,23} + \cdots \tag{36}$$

Rezultatul este explicabil fizic. Dacă în expresia lui φ_1 ar exista termeni neconstanți care să fie înmulțiți cu k_3, ar urma că dacă am face $k_2 = 0$ în D_1, ar exista în expresia vitezei termeni care să depindă de k_3, concluzie absurdă, căci dacă am $k_2 = 0$, vitezele în D_1 trebuie să egaleze vitezele corespunzătoare corpului impermeabil de suprafață S, oricare ar fi k_3.

Condițiile (16), (18) și (19) se simplifică,

$$\varphi_{21,3} = 0, \tag{37}$$

$$\varphi_{22,3} = 0, \tag{38}$$

$$\text{grad } \varphi_{12,23} \cdot \text{grad } \varphi_{10} = g \varphi_{22,23}. \tag{39}$$

Înainte de a trece la găsirea celorlalte funcții, să observăm că (6) poate fi satisfăcută prin relații de genul lui (26), (27) și (28), și am avea, în afară de (20), care rămîne neschimbat

$$k_2 \varphi_{21,2} + k_3 \varphi_{21,3} = k_3 \varphi_{31,3} + k_2 \varphi_{31,2}, \tag{40}$$

$$k_2^2 \varphi_{22,2} + k_3^2 \varphi_{22,3} + k_2 k_3 \varphi_{22,23} = k_3^2 \varphi_{32,3} + k_2^2 \varphi_{32,2} + k_2 k_3 \varphi_{32,23}\ ; \tag{41}$$

rațiunea de a folosi însă relațiile (21), (22,) (23), (24), (25) și (29), (30), (31), (32), și (33), în loc de (35), (36), (27) și (28), va apărea clar din cele expuse în paragraful 29.

Problema pentru funcțiile $\varphi_{21,2}$, $\varphi_{21,3}$, $\varphi_{31,3}$ și $\varphi_{31,2}$ se poate acum formula astfel:

Să se găsească 4 funcții armonice, $\varphi_{21,2}$, $\varphi_{21,3}$, $\varphi_{31,3}$ și $\varphi_{31,2}$, primele două definite în domeniul D_2, limitat de suprafețele S și S', iar celelalte în domeniul D_3, limitat de S', știind că pe S

$$\operatorname{grad} \varphi_{10} \operatorname{grad} \varphi_{11,2} = g \varphi_{21,2}, \tag{15}$$

$$0 = \varphi_{21,3}, \tag{37}$$

iar pe S'

$$\varphi_{21,2} = \varphi_{31,2}, \tag{21}$$

$$\varphi_{21,3} = \varphi_{31,3}, \tag{22}$$

$$k_2^2 \frac{\partial \varphi_{21,2}}{\partial n} = k_3^2 \frac{\partial \varphi_{31,3}}{\partial n}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial \varphi_{21,3}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{31,2}}{\partial n}. \tag{30}$$

Cu ajutorul lui $\varphi_{21,2}$ și $\varphi_{21,3}$ și a condițiilor (11) și (13) găsim, după rezolvarea problemelor la limită, pe $\varphi_{12,2}$ și $\varphi_{12,23}$, $\varphi_{12,3}$ fiind nul, în virtutea celor arătate. Problema găsirii, în mediul poros, a grupului de funcții ce corespunde aproximației de ordinul doi, se formulează astfel:

Să se determine 6 funcții armonice, $\varphi_{22,2}$, $\varphi_{22,3}$, $\varphi_{22,23}$, $\varphi_{32,3}$, $\varphi_{32,2}$, $\varphi_{32,23}$, primele 3 definite în domeniul D_2, limitat de suprafețele S și S', iar celelalte 3 în domeniul D_3 limitat de S', știind că pe S

$$(\operatorname{grad} \varphi_{11,2}) + 2 \operatorname{grad} \varphi_{12,2} \operatorname{grad} \varphi_{10} = 2 g \varphi_{22,2} \tag{17}$$

$$0 = \varphi_{22,3} \tag{37}$$

$$\operatorname{grad} \varphi_{12,23} \cdot \operatorname{grad} \varphi_{10} + \operatorname{grad} \varphi_{11,2} \operatorname{grad} \varphi_{11,3} = g \varphi_{22,23}, \tag{19}$$

$$\varphi_{22,2} = \varphi_{32,3}, \tag{23}$$

$$\varphi_{22,3} = \varphi_{32,2}, \tag{24}$$

$$\varphi_{22,23} = \varphi_{32,23}, \tag{25}$$

$$k_2^3 \frac{\partial \varphi_{22,2}}{\partial n} = k_3^3 \frac{\partial \varphi_{32,2}}{\partial n}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial \varphi_{22,3}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{32,23}}{\partial n}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \varphi_{22,23}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{32,2}}{\partial n}, \tag{33}$$

După cum se vede, pentru cele 6 funcţii necunoscute, avem 9 condiţii la limită. În procesul de aproximare va trebui să avem pentru cele $2(n+1)$ funcţii ce corespund aproximaţiei de ordinul n, un număr de $3(n+1)$ condiţii la limită dintre care $n+1$ pe S, iar restul de $2(n+1)$ pe S'.

Problema B. Fie acum un corp format tot din două medii diferite, unul se ocupă un domeniu D_2, limitat către fluidul liber de suprafaţa S_2, iar către celălalt mediu, din D_3, de suprafaţa S_4, mediul din D_3 fiind limitat către fluidul liber de suprafaţa S_3.

Vom porni tot cu dezvoltările (1), (2) şi (3), domeniul D_1 fiind acum domeniul exterior suprafeţei S_2+S_3, iar φ_2 şi φ_3 fiind definite în domeniile limitate, respectiv, de S_2+S_4 şi S_3+S_4. Scriind condiţiile la limită pe S_2, S_3, şi S_4, şi servindu-ne de observaţia de mai sus asupra consecinţelor ce trebuie deduse din (6), sîntem conduşi la condiţiile de mai jos.

Pe S_2 vom avea

$$\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial n} = 0, \tag{42}$$

$$\frac{\partial \varphi_{11,2}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial n}, \tag{43}$$

$$\frac{\partial \varphi_{11,3}}{\partial n} = 0, \tag{44}$$

$$\frac{\partial \varphi_{12,2}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{21,2}}{\partial n}, \tag{45}$$

$$\frac{\partial \varphi_{12,23}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{21,3}}{\partial n}, \tag{46}$$

$$\frac{\partial \varphi_{12,3}}{\partial n} = 0, \tag{47}$$

$$p_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2 - \frac{\rho}{2} (\operatorname{grad} \varphi_{10})^2 = -\rho g \varphi_{20}, \tag{48}$$

$$\operatorname{grad} \varphi_{10} \operatorname{grad} \varphi_{11,2} = g \varphi_{21,2}, \tag{49}$$

$$\operatorname{grad} \varphi_{10} \operatorname{grad} \varphi_{11,3} = g \varphi_{21,3}, \tag{50}$$

$$(\operatorname{grad} \varphi_{11,2})^2 + 2 \operatorname{grad} \varphi_{12,2} \cdot \operatorname{grad} \varphi_{10} = 2g \varphi_{22,2}, \tag{51}$$

$$(\operatorname{grad} \varphi_{11,3})^2 + 2 \operatorname{grad} \varphi_{12,3} \operatorname{grad} \varphi_{10} = 2g \varphi_{22,3}, \tag{52}$$

$$\operatorname{grad} \varphi_{12,23} \operatorname{grad} \varphi_{10} + \operatorname{grad} \varphi_{11,2} \operatorname{grad} \varphi_{11,3} = g \varphi_{22,23}, \tag{53}$$

.....

Pe S_3 vom avea

$$\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial n} = 0, \tag{54}$$

$$\frac{\partial \varphi_{11,2}}{\partial n} = 0, \tag{55}$$

$$\frac{\partial \varphi_{11,2}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{30}}{\partial n}, \tag{56}$$

$$\frac{\partial \varphi_{12,2}}{\partial n} = 0, \tag{57}$$

$$\frac{\partial \varphi_{12,3}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{31,3}}{\partial n}, \tag{58}$$

$$\frac{\partial \varphi_{12,23}}{\partial n} = 0, \tag{59}$$

. . . . . .

$$p_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2 - \frac{\rho}{2} (\text{grad } \varphi_{10})^2 = -\rho g \varphi_{30}, \tag{60}$$

$$\text{grad } \varphi_{10} \text{ grad } \varphi_{11,3} = g \varphi_{31,3}, \tag{61}$$

$$\text{grad } \varphi_{10} \text{ grad } \varphi_{11,2} = g \varphi_{31,2}, \tag{62}$$

$$(\text{grad } \varphi_{11,2})^2 + 2 \text{ grad } \varphi_{12,2} \cdot \text{ grad } \varphi_{10} = 2g \varphi_{32,2}, \tag{63}$$

$$(\text{grad } \varphi_{11,3})^2 + 2 \text{ grad } \varphi_{12,3} \text{ grad } \varphi_{10} = 2g \varphi_{32,3}, \tag{64}$$

$$\text{grad } \varphi_{12,23} \cdot \text{ grad } \varphi_{10} + \text{grad } \varphi_{11,2} \text{ grad } \varphi_{11,3} = g \varphi_{32,23} \tag{65}$$

. . . . . .

În sfîrșit, pe S_4 rezultă condițiile identice cu (20), (21), (22), (23), (24), (25) și (29), (30), (31), (32), (33),

$$\varphi_{20} = \varphi_{30}, \tag{66}$$

$$\varphi_{21,2} = \varphi_{31,2}, \tag{67}$$

$$\varphi_{21,3} = \varphi_{31,3}, \tag{68}$$

$$\varphi_{22,2} = \varphi_{32,2}, \tag{69}$$

$$\varphi_{22,3} = \varphi_{32,2}, \tag{70}$$

$$\varphi_{22,23} = \varphi_{32,23}, \tag{71}$$

. . . . . .

$$k_2 \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial n} = k_3 \frac{\partial \varphi_{30}}{\partial n}, \tag{72}$$

$$k_2^2 \frac{\partial \varphi_{21,2}}{\partial n} = k_3^2 \frac{\partial \varphi_{31,3}}{\partial n}, \tag{73}$$

$$\frac{\partial \varphi_{21,3}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{31,2}}{\partial n}, \tag{74}$$

$$k_2^3 \frac{\partial \varphi_{22,2}}{\partial n} = k_3^3 \frac{\partial \varphi_{32,2}}{\partial n}, \tag{75}$$

$$\frac{\partial \varphi_{22,3}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{32,23}}{\partial n}, \tag{76}$$

$$\frac{\partial \varphi_{22,23}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{32,2}}{\partial n}. \tag{77}$$

. . . . . .

După determinarea lui φ_{10}, urmează găsirea lui φ_{20} și φ_{30}, pentru care problema se formulează astfel :

Să se găsească două funcții armonice φ_{20} și φ_{30}, definite fiecare într-un domeniu simplu conex, D_2, respectiv D_3, primul mărginit de suprafața $S_2 + S_4$, iar al doilea de suprafața $S_3 + S_4$, știind că avem condițiile

$$p_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2 - \frac{\rho}{2} (\text{grad } \varphi_{10})^2 = - \rho g \varphi_{20} \quad \text{pe} \quad S_2 , \tag{48}$$

$$p_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2 - \frac{\rho}{2} (\text{grad } \varphi_{10})^2 = - \rho g \varphi_{30} \quad \text{pe} \quad S_3 , \tag{60}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{20} &= \varphi_{30} , \\ k_2 \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial n} &= k_3 \frac{\partial \varphi_{30}}{\partial n} \end{aligned}\right\} \text{ pe } S_4 , \tag{66}$$

(72)

Cum se constată din examinarea condițiilor (43), 44), (55) și (56), funcțiile $\varphi_{11,2}$ și $\varphi_{11,3}$ se află prin rezolvarea a două probleme Neumann relative la exteriorul suprafeței $S_2 + S_3$.

Pentru $\varphi_{21,2}$, $\varphi_{21,3}$, $\varphi_{31,3}$ și $\varphi_{31,2}$ avem 8 condiții : (49), (50), (61), (62), (67), (68), (73) și (74) ; $\varphi_{12,2}$, $\varphi_{12,3}$ și $\varphi_{12,23}$ se află tot în urma rezolvării unor probleme Neumann, cum rezultă din condițiile (45), (46), (47), (57), (58) și (59) ; pentru $\varphi_{22,2}$, $\varphi_{22,3}$, $\varphi_{22,23}$, $\varphi_{32,2}$, $\varphi_{32,3}$ și $\varphi_{32,23}$ avem 12 condiții la limită și anume : (51), (52), (53), (63), (64), (65), (69), (70), (71), (75), (76) și (77).

În general, vom avea, pentru aproximația de ordin n în mediul poros, de determinat $2(n+1)$ funcții prin $4(n+1)$ condiții la limită : $n+1$ pe S_2, $n+1$ pe S_3 și $2(n+1)$ pe S_4.

Cazul unui corp poros oarecare, cu neomogenitate de tipul II, se reduce la o combinație de problema A și B, potențialele vitezelor pentru n medii poroase diferite având expresiile

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \sum_{i=2}^{n+1} k_i \varphi_{11,i} + \sum_{i=2}^{n+1} \sum_{j=2}^{n+1} k_i k_j \varphi_{12,ij} + \dots \tag{78}$$

$$\varphi_l = k_l \left(\varphi_{l0} + \sum_{i=2}^{n+1} k_i \varphi_{l1,i} + \sum_{i=2}^{n+1} \sum_{j=2}^{n+1} k_i k_j \varphi_{l2,ij} + \dots \right) \tag{79}$$

$$(l = 2, 3, \dots, n+1).$$

Dacă un mediu oarecare conține toate celelalte medii poroase, și suprafața sa în contact cu fluidul este identică cu suprafața întregului corp ce este mărginit de fluidul liber, atunci în loc de (68) avem

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + k_g \varphi_{11,g} + k_g \sum_{i=2}^{n+1} k_i \varphi_{12,gi} + \dots , \tag{80}$$

presupunînd că mediul considerat a primit indicele g.

În calculele de mai sus am luat, pentru a simplifica scrierea

$$\varphi_{12,22} \equiv \varphi_{12,2} , \quad \varphi_{12,33} \equiv \varphi_{12,3} .$$

La fel se pot scrie condițiile la limită pentru fluidele compresibile, bazîndu-ne pe schema dezvoltată la sfîrșitul capitolului I; aici însă trebuie să scriem explicit și ecuațiile pe care le satisfac

$$\varphi_{10},\ \varphi_{11,i},\ \varphi_{12,ij},\ \ldots,\ P_0,\ P_{1,i},\ P_{2,ij},\ \ldots,\ (i,j=1,2,\ldots n).$$

Pentru problema în cazul fluidelor reale, se pornește cu dezvoltările, la fluidele incompresibile,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{10} + \sum_{i=2}^{n+1} k_i \vec{v}_{11,i} + \sum_{i=2}^{n+1}\sum_{j=2}^{n+1} k_i k_j \vec{v}_{12,ij} + \ldots, \tag{81}$$

$$p_1 = p_{10} + \sum_{i=2}^{n+1} k_i p_{11,i} + \sum_{i=2}^{n+1}\sum_{j=2}^{n+1} k_i k_j p_{12,ij} + \ldots, \tag{82}$$

$$p_l = p_{l0} + \sum_{i=2}^{n+1} k_i p_{l1,i} + \sum_{i=2}^{n+1}\sum_{j=2}^{n+1} k_i k_j p_{l2,ij} + \ldots, \tag{83}$$

$$l = 2, 3, \ldots, n+1);$$

expresiile $\vec{V}_1$ și p_1 se introduc în ecuațiile Navier-Stokes, ecuația continuității și ecuația de stare, iar $\vec{v}_1$, p_1 și p_l, în condițiile la limită (7), (8) și (9) pe suprafața S a corpului — care poate fi formată din mai multe porțiuni corespunzătoare la medii poroase diferite — și în sfîrșit p_l în condițiile la limită pe suprafața de separare a două medii poroase diferite; funcțiile p_{l0}, $p_{l1,i}$, $p_{l2,ij}\ldots$, $(i, j = 2, \ldots, n+1)$ sînt, bineînțeles, funcții armonice.

Ne vom limita aici să scriem, fără comentarii, ecuațiile și condițiile la limită în cazul problemei A, pînă la aproximația de ordinul 2. Grupul p_{10}, $\vec{v}_{10}$ va satisface următoarele ecuații în D_1.

$$\frac{\partial \vec{v}_{10}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{\vec{v}_{10}^2}{2} + \operatorname{rot}\vec{v}_{10}\times\vec{v}_{10} = \vec{F}_1 - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p_{10} + \frac{\nu}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}_{10} + \nu\Delta\vec{v}_{10}, \tag{84}$$

$$\operatorname{div}\vec{v}_{10} = 0, \tag{85}$$

care derivă din ecuațiile Navier-Stokes și ecuația continuității.

Pentru fluidele compresibile, în loc de (85) avem ecuația (2) de la capitolul III, unde $\vec{v}_1$ se înlocuiește prin $\vec{v}_{10}$, ρ putînd avea în acest caz o dezvoltare de forma (82); în plus, s-ar mai adăuga o ecuație, ce derivă din ecuația de stare, de forma

$$f(p_{10}, \rho) = 0. \tag{86}$$

Grupul $\vec{v}_{11,2}$, $\vec{v}_{11,3}$, $p_{11,2}$, $p_{11,3}$, satisface ecuațiile

$$\frac{\partial \vec{v}_{11,j}}{\partial t} + \operatorname{grad}\vec{v}_{10}\cdot\vec{v}_{11,j} + \operatorname{rot}\vec{v}_{10}\times\vec{v}_{11,j} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p_{11,j} + \frac{\nu}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}_{11,j} + \nu\Delta\vec{v}_{11,j} \qquad (j=2,3), \tag{87}$$

$$\operatorname{div}\vec{v}_{11,j} = 0 \qquad (j=2,3). \tag{88}$$

Pentru fluidele compresibile, făcînd o observaţie analogă relativă la (88), avem în plus o ecuaţie de forma

$$f_i(p_{11,j}\,\rho) = 0 \qquad (j = 2, 3); \tag{89}$$

condiţiile pe S vor fi

$$p_{10} = p_{20} \tag{90}$$

$$p_{11,j} = p_{21,j} \qquad (j = 2, 3), \tag{91}$$

$$\vec{\varphi}_{10} = 0, \tag{92}$$

$$\vec{\varphi}_{11,j} = \varphi_{11,j}\vec{n}, \qquad (j = 2, 3), \tag{93}$$

$$\varphi_{11,2} = \frac{k}{\rho g}\frac{\partial p_{20}}{\partial n}, \tag{94}$$

$$\varphi_{11,3} = 0, \tag{95}$$

iar pe S'

$$p_{20} = p_{30}, \tag{96}$$

$$p_{21,j} = p_{31,j} \qquad (j = 2, 3), \tag{97}$$

$$k_2\frac{\partial p_{20}}{\partial n} = k_3\frac{\partial p_{30}}{\partial n}, \tag{98}$$

$$k_2^2\frac{\partial p_{21,2}}{\partial n} = k_3^2\frac{\partial p_{31,3}}{\partial n}, \tag{99}$$

$$\frac{\partial p_{21,3}}{\partial n} = \frac{\partial p_{31,2}}{\partial n}. \tag{100}$$

Problemele A şi B ne apar deci ca cele mai simple probleme relativ la mediile poroase cu neomogenitate mijlocie. În problemele reale putem avea situaţii mult mai complicate, dar condiţiile la limită vor reieşi că sînt, în general, cele corespunzătoare unei serii de probleme A, combinate cu cele corespunzătoare unei serii de probleme B.

25. Exemplul unei probleme de tip A

Fie, în cazul bidimensional, două medii poroase, dintre care primul este caracterizat prin coeficientul de filtraţie k_2 şi ocupă domeniul $R' \leqslant r \leqslant R$, iar al doilea este caracterizat prin coeficientul de filtraţie k_3 şi ocupă domeniul $r \leqslant R'$. La mari distanţe, fluidul avînd o mişcare de translaţie cu viteza V_0, avem

$$\varphi_{10} = V_0\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta \qquad (r \geqslant R),$$

$$\varphi_{20} = -\frac{1}{\rho g}\left(p_0 - \frac{1}{2}\rho V_0^2\right) - \frac{V_0^2}{g}\cos^2\theta \quad (r = R).$$

Conform celor arătate în paragraful precedent, φ_1 va fi dat de dezvoltarea (36), φ_2 și φ_3 de (2) și (3), iar condițiile la limită care determină pe φ_{20} și φ_{30} sînt: φ_{20} cunoscut pentru $r = R$, $\varphi_{20} = \varphi_{30}$ pentru $r = R'$, iar $\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial r} = \frac{k_3}{k_2} \frac{\partial \varphi_{30}}{\partial r}$ pentru $r = R'$.

Această problemă a fost rezolvată în anexă, la paragraful 28, și vom aplica formulele găsite acolo. Valorile funcțiilor căutate vor fi

$$\varphi_{20} = -\frac{1}{\rho g}\left(p_0 - \frac{1}{2}\rho V_0^2\right) - \frac{V_0^2 R^2 (r^2 + HR'^4 r^{-2})}{g(R^4 + HR'^4)} \cos 2\theta \quad (R' \leqslant r \leqslant R) \quad (101)$$

$$\varphi_{30} = -\frac{1}{\rho g}\left(p_0 - \rho \frac{1}{2} V_0^2\right) - \frac{2V_0^2 R^2 r^2 \cos 2\theta}{g(1+K)(R^4 + HR'^4)} \quad (R' \geqslant r), \quad (102)$$

K fiind egal cu $k_3 k_2^{-1}$, iar $H = (k_2 - k_3)\cdot(k_2 + k_3)^{-1}$. Trecînd mai departe la determinarea lui $\varphi_{11,2'}$ găsim, fără dificultate,

$$\varphi_{11,2} = \frac{V_0^2 R^2}{gr^2} \frac{R^4 - HR'^4}{R^4 + HR'^4} \cos 2\theta \quad (r \geqslant R). \quad (103)$$

Este instructiv să comparăm expresiile (101) și (103) cu expresiile (56) și (57) de la capitolul II, acestea din urmă obținîndu-se din primele prin particularizarea $H = 1$, adică $k_3 = 0$; făcînd apoi $H = 0$, adică $k_2 = k_3$, obținem că φ_{20} și φ_{30} au aceeași expresie, care coincide cu relația (17) de la capitolul II, iar φ_{11}, coincide cu formula (18) de la același capitol.

Următorul pas îl constituie găsirea lui $\varphi_{21,2}$, $\varphi_{21,3'}$, $\varphi_{31,2}$, $\varphi_{31,3'}$. În cazul de față, condiția (15) se scrie

$$\varphi_{21,2} = \frac{4V_0^3}{g^2 R} \cdot \frac{R^4 - HR'^4}{R^4 + HR'^4} \sin\theta \sin 2\theta = \frac{2V_0}{g^2 R} \cdot \frac{R^4 - HR'^4}{R^4 + HR'^4} (\cos\theta - \cos 3\theta) \quad (r = R)$$

și nu avem decît să aplicăm formulele demonstrate la paragraful 28; de exemplu, pentru $\varphi_{21,3}$ se obține

$$\varphi_{21,3} = \frac{4V_0^3}{g^2 R} \cdot \frac{R^4 - HR'^4}{R^4 + HR'^4} \left\{ \left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r}\right) \left[2(1+K) + (1-K)\left((R/R')^2 + (R'/R)^2\right)\right]^{-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cos\theta - \left[\left(\frac{r}{R}\right)^3 - \left(\frac{R}{r}\right)^3\right] \left[2(1+K) + (1-K)\left((R/R')^6 + (R'/R)^6\right)\right]^{-1} \cos 3\theta \right\},$$

expresie care se anulează pentru $r = R$, așa cum cere condiția (37).

26. Problema mai multor corpuri neomogene

Fie s corpuri neomogene, fiecare fiind format dintr-un număr finit de medii omogene. Vom nota cu n_l numărul mediilor poroase care intră în compunerea corpului cu indicele l; n_l va fi, bineînțeles, un număr întreg și pozitiv, iar l va lua una din valorile 2, 3, ..., $s + 1$. Am păstrat și aici semnificația lui D_1 de mai sus.

Acum vom fi forţaţi să notăm coeficienţii de filtraţie cu doi indici, pentru a putea deosebi cărui corp îi aparţine un mediu oarecare. Convenim să însemnăm cu k_{qr} coeficientul de filtraţie pe care îl are mediul notat cu $r(r = 1, 2, \ldots, n)$ din corpul $q(q = 2, 3, \ldots, s + 1)$.

Pentru a fixa ideile, vom presupune că fluidul este ideal. Atunci potenţialul vitezelor din D_1, cît şi potenţialele vitezelor din fiecare domeniu D_{qr} vor depinde de toţi coeficienţii k_{qr}, astfel încît vom adopta, în mod natural, următoarele dezvoltări:

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \sum_{r=1}^{n_q} \sum_{g=2}^{s+1} k_{qr}\, \varphi_{11,qr} + \sum_{t=1}^{n_\nu} \sum_{\nu=2}^{s+1} \sum_{r=1}^{n_q} \sum_{q=2}^{s+1} k_{qr}\, k_{\nu t}\, \varphi_{12,qr,\nu t,} + \ldots \tag{104}$$

$$\varphi_{hl} = k_{hl} \left(\varphi_{hl,0} + \sum_{r=1}^{n_q} \sum_{q=2}^{s+1} k_{qr}\, \varphi_{hl,\,1qr} + \sum_{t=1}^{n_\nu} \sum_{\nu=2}^{s+1} \sum_{r=1}^{n_g} \sum_{q=2}^{s+1} k_{qr}\, k_{\nu t}\, \varphi_{hl2,\,qr,\nu t} + \ldots \right. \tag{105}$$

$$(h = 2, 3, \ldots s + 1;\ = 1, 2, 3, \ldots, n_h).$$

Cu (104) şi (105) va trebui să scriem condiţiile la limită atît pe suprafaţa corpurilor, cît şi pe suprafeţele de separare ale diferitelor medii dintr-un corp. Problema în felul acesta apare ca extrem de complexă, de aceea ne vom limita să facem cîteva observaţii cînd avem numai două corpuri, în 3 situaţii particulare: ambele corpuri de tip A, ambele de tip B, şi, în fine, unul de tip A, iar celălalt de tip B.

Notînd cu indicele 2 mediul din interior, care nu are nici o porţiune a suprafeţei sale în contact cu fluidul liber, avem, conform convenţiilor adoptate

$$\begin{aligned}\varphi_1 = \varphi_{10} &+ k_{21}\varphi_{11,21} + k_{22}\varphi_{11,22} + k_{32}\varphi_{11,32} + k_{33}\varphi_{11,33} + k_{21}^2\varphi_{12,21} + \\ &+ k_{22}^2\varphi_{12,22} + K_{31}^2\varphi_{12,31} + k_{32}^2\varphi_{12,32} + k_{21}k_{22}\varphi_{12,21,22} + k_{21}k_{31}\varphi_{12,21,31} + \\ &+ k_{22}k_{31}\varphi_{12,22,31} + k_{22}k_{32}\varphi_{12,22,32} + k_{31}k_{32}\varphi_{12,31,32} + \ldots\end{aligned} \tag{106}$$

unde am luat, pentru a simplifica scrierea, $\varphi_{12,ij,ij} \equiv \varphi_{12,ij}$ $(i = 2, 3;\ j = 1, 2)$. Expresiile lui φ_{21}, φ_{22}, φ_{31} şi φ_{32} se obţin înlocuind în (106) indicele 1 prin i_j şi înmulţind în dreapta cu k_{ij}.

Pentru aproximaţia de ordin zero, trebuie să aflăm 5 funcţii, pentru aproximaţia de ordin unu 20 de funcţii, pentru aproximaţia de ordin doi 50 de funcţii. În general, pentru aproximaţia de ordin n, vom avea $5\ C_{n+1}^3$ funcţii necunoscute, C_n^s fiind simbolul combinărilor cu repetiţiile a n obiecte luate către s.

Aproximaţia de ordin zero în problema A este clară; φ_{10} va fi identic cu potenţialul vitezelor în mişcarea în jurul celor două corpuri impermeabile, iar φ_{ij0} se vor obţine în urma rezolvării a două probleme de tip A, căci $\varphi_{21,0}$ şi $\varphi_{31,0}$ sînt cunoscute pe suprafaţa corpului, şi $\varphi_{21,0}$, $\varphi_{31,0}$ sînt legate cu, respectiv, $\varphi_{22,0}$ şi $\varphi_{32,0}$, prin condiţii de forma (20) şi (26)

$$p_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2 - \frac{\rho}{2} (\text{grad}\ \varphi_{10})^2 = -\rho g \varphi_{i1,0} (i = 2, 3) \text{ pe } S_1,$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{i1,0} = \varphi_{i2,0}, \\ &k_{i1} \frac{\partial \varphi_{i1,0}}{\partial n} = k_{i2} \frac{\partial \varphi_{12,0}}{\partial n} \end{aligned}\right\} \quad \text{pe } S_{ii} \tag{107}$$

notînd prin S_{ii} suprafaţa de separare între mediile poroase din corpul i.

Pentru aproximația de primul ordin, ținînd seama de condițiile pe S_i ($i = 2, 3$) și la infinit, se găsește că $\varphi_{11,22} \equiv \varphi_{11,32} \equiv 0$, ceea ce arată că, și la două corpuri, expresia potențialului vitezelor în D_1 nu trebuie să conțină termeni în k_{i2}^n ($i = 2, 3$; $n = 1, 2, \ldots$). Rezultatul se explică ușor, ca și la paragraful 24.

Cînd numai primul corp este de tip A, atunci se găsește că φ_1 nu va conține termeni în k_{22}^n ($n = 1, 2, \ldots,$). Dacă ambele corpuri sînt de tipul B, atunci în (106) avem toți termenii.

De asemenea, în toate trei cazurile, condiția ca să se anuleze fluxul hidrodinamic prin suprafața fiecărui corp în parte este satisfăcută.

ANEXĂ

27. Lucrări asupra mișcării irotaționale în jurul corpurilor permeabile foarte subțiri

Problema mișcării irotaționale a fluidelor ideale în jurul corpurilor permeabile subțiri a atras atenția unor cercetători. Din literatura consultată rezultă că s-au ocupat de această problemă: H. A. Rahmatulin, H. Ia. Baiciorov, Elie Carafoli și D. F. Șulghin. Să trecem sumar în revistă lucrările lor.

Vom începe cu lucrarea de disertație a lui H. Ia. Baiciorov [20], care a considerat problema scurgerii staționare a unui fluid ideal incompresibil în jurul unui înveliș cilindric de lungime infinită și grosime h foarte mică în raport cu raza a a cilindrului, viteza la infinit fiind perpendiculară pe axa cilindrului. Autorul a căutat să determine mișcarea fluidului în afara cilindrului și distribuția vitezelor de filtrație pe suprafața sa, presupunînd, pe lîngă alte ipoteze admise în general, că viteza normală pe cilindru este egală cu viteza de filtrație prin învelișul cilindric, iar la trecerea prin învelișul poros căderea de presiune raportată la unitatea de grosime satisface relația

$$\frac{\Delta p}{h} = f(W, \lambda),$$

unde W este viteza de filtrație — a cărei variație la trecerea prin înveliș se neglijează, h fiind foarte mic — iar λ este un parametru ce ține seama de caracteristicile fluidului și ale suprafeței, pentru o suprafață impermeabilă, λ anulîndu-se; în sfîrșit, se consideră că viteza tangențială pe suprafața interioară a învelișului este nulă, astfel încît pe suprafața externă a cilindrului avem

$$p_e = p_\infty + \frac{\rho}{2} V_0^2 - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2\right]_{r=a},$$

iar pe cea internă

$$p_i = C - \frac{\rho}{2} W^2,$$

C fiind o constantă, iar $W^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=a}^2$. Scriindu-se căderea de presiune, se ajunge la o relație de forma $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)_{r=a} = \Phi(\theta)$, și sîntem conduși la rezolvarea unei

probleme Neumann pentru exteriorul cercului de rază a. Pentru potenţialul vitezelor se obţine un termen identic cu acela din cazul mişcării în jurul unui cilindru impermeabil de rază a, plus un termen ce depinde de $\Phi(\theta)$:

$$\varphi(r,\ \theta) = V_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta + \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\alpha)\ln\left[r^2 - 2r\cos(\alpha - \theta) + a^2\right]d\alpha.$$

Scriind componenta vitezei perpendiculară pe raza vectoare şi făcînd $r \to a$, se obţine ecuaţia integrală singulară neliniară

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_{r=a} = -2aV_0\sin\theta - \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\alpha)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\alpha}{2}\,d\alpha,$$

căci $\Phi(\theta) = \Phi_1\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_{r=a},\ \lambda\right]$; ecuaţia obţinută se încadrează într-un tip căruia i se studiase existenţa şi unicitatea soluţiei [62].

Constanta C se determină din condiţia ca debitul de fluid să fie nul prin înveliş.

Ulterior, autorul a tratat numeric filtraţia liniară şi cea cuadratică [63]; în primul caz se poate scrie pentru căderea de presiune

$$\Delta p = \alpha + \beta W,$$

α şi β fiind constante, şi cu

$$\lambda = \frac{\rho}{2a^2\beta}$$

se ajunge la ecuaţia

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_{r=a} = -2aV_0 - \frac{\lambda}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial}\right)^2_{r=a}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\theta}{2}\,d\alpha.$$

Parametrul λ fiind mic, ecuaţia se poate rezolva prin aproximaţii succesive, şi se face calculul pînă în a doua aproximaţie.

Cu $a = 1$m, $V_0 = 1$ m/s, $p = 2$ kg/s^2, $\rho = 8{,}31\cdot10^{-7}$ kg's^2/cm^4, $h = 13{,}10^{-3}$ cm, avem $\lambda = 3{,}324\cdot10^{-8}$, iar variaţia lui W pe înveliş este următoarea: fluidul intră pe o porţiune de 95°10′ în partea de unde vine curentul, şi de 84°40′ în partea opusă şi iese pe porţiunea rămasă.

Studiul lui B a i c i o r o v nu este terminat. În afară de viteza normală şi cea tangenţială pe suprafaţa exterioară a învelişului, ne-ar fi interesat, din punct de vedere hidrodinamic, să ştim şi alte elemente ale problemei: presiunea şi căderea de presiune în fiecare punct de pe înveliş, liniile de curent şi liniile de egal potenţial, atît în exteriorul, cît şi în interiorul său, forţa totală ce se exercită asupra învelişului. Calculînd cu datele autorului, am găsit că $F_y \equiv 0$, iar F_x este, în primă aproximaţie, proporţional cu λ şi cu cubul vitezei la mari distanţe. Pentru a găsi potenţialul complex al mişcării în jurul cilindrului, trebuie să rezolvăm problema lui Neumann pentru exteriorul cercului, deoarece cunoaştem derivata părţii sale reale pe circumferinţa $r = a$.

Studiind lucrarea expusă, o întrebare firească se ridică în legătură cu mişcarea din interiorul învelişului: pe de o parte, mişcarea este presupusă

potențială, deci există o funcție complexă $f(z)$ ce descrie mișcarea în înveliș, pe de altă parte, se cunoaște valoarea derivatei părții reale a acestei funcții pe cercul $r = a$ — practic se poate lua raza interioară a învelișului a, căci ea este egală cu $a - h$, iar h este, cum s-a menționat, foarte mic — și, prin urmare, rezolvînd o problemă Neumann interioară putem determina pe $f(z)$, dar autorul presupune, apriori, în plus, că viteza pe suprafața interioară a învelișului este peste tot normală la acesta, ceea ce este imposibil în general. Cunoașterea lui $\left(\frac{\partial}{\partial r}\left[Re\, f(z)\right]\right)_{r=a}$ nu implică în mod necesar $\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left[Re\, f(z)\right]\right)_{r=a} = 0$; a doua mărime se calculează odată ce $f(z)$ a fost aflat cu ajutorul primei mărimi. Autorul, după ce a rezolvat problema cu ajutorul ipotezelor menționate, trebuia să ne arate justificarea ipotezei $\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left[Re\, f(z)\right]\right)_{r=a} = 0$. Eroarea nu a fost observată nici de referentul lucrării lui Baiciorov *).

Problema se poate prezenta și astfel: deoarece pentru $r = a$ se dă $\frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial r} = f(\theta)$ și $\frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial \theta} = 0$, urmează că $\varphi(r, \theta) = \text{const.}$ pentru $r = a$. Sîntem conduși la o problemă specială a teoriei potențialului, care se enunță astfel în general: fiind date două funcții armonice f_1 și f_2, continue pe frontiera C a unui domeniu D, și un punct $P \in D$, să se găsească o funcție armonică în $D - P$ continuă în $D + C - P$, identică cu f_1 pe C, și avînd derivatele normale pe C egale cu f_2 [64]. Autorul nu pare a se fi gîndit la această problemă, căci f nu mai este armonică în punctul P.

H. A. Rahmatulin a studiat mișcarea plană irotațională în jurul suprafețelor permeabile, avînd în vedere scurgerea fluidelor ideale compresibile în jurul profilelor permeabile subțiri. El a presupus că viteza normală pe suprafață și saltul de presiune sînt legate prin relația

$$\Delta p = g v_n + b v_n^2.$$

Cum viteza normală pe suprafață este continuă, iar viteza tangențială poate suferi o discontinuitate, urmează că din punct de vedere hidrodinamic suprafața permeabilă reprezintă o suprafață de discontinuitate pentru viteze și presiuni. La mișcarea subsonică și suprafețele apropiate de axa Ox — paralelă cu direcția vitezei la infinit — autorul ajunge la o ecuație integrală, ce este rezolvată explicit pentru placa plană [19].

Elie Carafoli, neștiind de lucrarea precedentă, a considerat aceeași problemă la fluide incompresibile, admițînd o legătură între viteza de trecere și saltul de presiune [65].

În sfîrșit, D. F. Șulghin consideră că legătura dintre viteza de pătrundere și saltul de presiune este dată de aceeași relație folosită de Rahmatulin [67].

Dacă se consideră suprafața permeabilă ca un mediu poros limitat de două suprafețe foarte apropiate, ipotezele comune autorilor citați, adică viteza normală este continuă cînd se traversează suprafața, iar între mărimea vitezei normale v_n și saltul de presiune Δp există o legătură, ce ar necesita o oarecare fundamentare teoretică.

*) R. E. Gaskell, Recenzie asupra lucrării [20] în Math. Rev., 1954, t. 15, nr. 1, p. 71.

28. Generalizarea problemei lui Dirichlet pentru cerc (Problema A_0)

Vom reformula problema determinării grupului de funcții φ_{20} și φ_{30}, care corespund aproximației de ordin zero, pentru problema A_0, folosind termenii teoriei funcțiilor de variabilă complexă:

Să se determine două funcții de variabilă complexă, $f_1(z)$ și $f_2(z)$, regulate, prima definită în domeniul dublu conex D_1, limitat de curbele C_1 și C_2, iar a doua definită în domeniul simplu conex D_2, cu toate punctele la distanță finită, știind că

$$Re\, f_1(z) = \varphi(s) \quad \text{pe } C_1, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} Re\, f_1(z) &= Re f_2(z) \\ \frac{\partial Re\, f_1(z)}{\partial n} &= K \frac{\partial Re f z(z)}{\partial n} \end{aligned}\right\} \text{pe } C_2. \tag{2, 3}$$

În problema de la paragraful 24, $Re f_1(z)$ se identifică cu φ_{20}, $Re f_2(z)$ cu φ_{30}, iar $K = \frac{k_3}{k_2}$.

Enunțul problemei reprezintă o generalizare a problemei lui Dirichlet, care se obține în cazul particular $K = 1$, deci cînd avem un mediu omogen; atunci f_1 se poate prelungi analitic prin C_2 în D_2, unde se identifică cu f_2, și nu mai avem de-a face decît cu o singură funcție analitică, regulată în interiorul cercului $r = R_1$. Pentru $K = 0$, deci atunci cînd mediul care nu este în contact cu fluidul este impermeabil, obținem o problemă mixtă, care se formulează obișnuit astfel: să se determine o funcție $f(z)$, în domeniul dublu conex D_1, cunoscînd partea reală a lui $f(z)$ pe C, frontiera în contact cu domeniul ce conține punctul de la infinit, și partea imaginară a lui $f(z)$ pe cealaltă frontieră C'.

Să rezolvăm problema cînd C_1 este o circumferință de rază R_1, iar C_2 o circumferință de rază R_2, concentrice.

Vom lua

$$\left.\begin{aligned} f_1(z) &= a_{01} + \sum_1^\infty a_{n1} z^n + \sum_1^\infty b_{n1} z^{-n}, \\ f_2(z) &= a_{02} + \sum_1^\infty a_{n2} z^n, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

unde

$$a_{01} = \alpha_{01} + i\beta_{01},\ a_{n1} = \alpha_{n1} + i\beta_{n1},\ b_{n1} = \gamma_{n1} + i\delta_{n1},$$

$$a_{02} = \alpha_{02} + i\beta_{02},\ a_{n2} = \alpha_{n2} + i\beta_{n2}, \quad (n = 1, 2, \ldots,),$$

și atunci

$$f_1(z) = \alpha_{01} + i\beta_{01} + \sum_1^\infty r^n (\alpha_{n1} + i\beta_{n1})(\cos n\theta + i \sin n\theta) +$$

$$+ \sum_1^\infty r^{-n} (\gamma_{n1} + i\delta_{n1})(\cos n\theta - i \sin n\theta),\ R_2 \leqslant r \leqslant R_1$$

$$f_2(z) = \alpha_{02} + i\beta_{02} + \sum_1^\infty r^n (\alpha_{n2} + i\beta_{n2})(\cos n\theta + \sin n\theta)\ r \leqslant R_2.$$

Explicitatea condițiilor (1), (2), (3) conduce la 6 ecuații cu 6 necunoscute, pentru $n \geqslant 1$, și pînă în cele din urmă obținem

$$\left.\begin{aligned} a_{n1} &= \frac{1}{\pi R_1^n \left[1+\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n}\frac{1-K}{1+K}\right]}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,e^{-in\theta}\,d\theta,\\ b_{n1} &= \frac{(1-K)\,R_2^{2n}\,R_1^n\,(1-K)}{\pi\left[(1+K)\,R_1^{2n}+(1-K)\,R_2^{2n}\right]}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,e^{-in\theta}\,d\theta,\\ a_{n2} &= \frac{2}{1+K}\,a_n, \qquad (n=1,\,2,\,\ldots),\\ \alpha_{01} &= \alpha_{02} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,d\theta, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

de unde rezultă că $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sînt dați de expresiile

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{z^n e^{-in\theta}+H R_2^{2n} z^n e^{in\theta}}{R_1^n\left[1+H\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n}\right]}\varphi(\theta)\,d\theta + i\beta_{01}, \tag{6}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,d\theta + \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_1^{\infty}\frac{z^n\,e^{-in\theta}}{R_1^n\left[(1+K)+\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n}(1-K)\right]}\varphi(\theta)\,d\theta + i\beta_{02}, \tag{7}$$

unde

$$H = (1-K)\,(1+K)^{-1}.$$

Pentru $H = 0$, adică $k_2 = k_3$ și $K = 1$, avem

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\left[\frac{1}{2}+\sum_1^{\infty}\frac{z^n\,e^{-in\theta}}{R_1^n}\right]d\theta + i\beta_{01},$$

ceea ce conduce la formula lui Schwartz-Villat (citat după [52]*)), notînd

$$\zeta = R_1\,e^{i\theta},$$

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\theta + i\beta_{01}, \tag{8}$$

iar $f_1(z)$ coincide cu $f_2(z)$, cu aproximația unei constante pur imaginară.

Pentru $H = 1$, adică $k_3 = 0$ și $K = 0$, putem scrie

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_1^{\infty}\frac{z^n\,e^{-in\theta}+R_2\,z^{-n}\,e^{in\theta}}{R_1^n\left[1+\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n}\right]}\varphi(\theta)\,d\theta + i\beta_0$$

și punînd $R_1 = 1$, $R_2 = q\ (<1)$ și $\beta_0 = 0$, avem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,\frac{z^n\,e^{-in\theta}+q^{2n}\,z^{-n}\,e^{in\theta}}{1+q^{2n}}\,d\theta$$

*) p. 9.

ceea ce conduce la formula [57], [67],

$$f(z)=\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\theta\,|\,\omega_1,2\omega_3\right)-\right.$$
$$\left.-\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\theta\,|\,\omega_1,2\omega_3\right)\right]d\theta. \tag{9}$$

care rezolvă problema determinării lui $f(z)$ cînd $Re\, f(z)=\varphi(\theta)$ pentru $r=1$ şi $Im\, f(z)=0$ pentru $r=q$. În acest caz, funcţia $f_2(z)$ nu mai are vreo semnificaţie fizică; părţii reale i s-ar putea atribui una, considerînd-o ca proporţională cu presiunea ce s-ar crea în cercul $r'\leqslant R_2$ presiune care însă n-ar provoca vreo mişcare, datorită coeficientului nul de proporţionalitate între viteza şi gradientul presiunii.

Menţionăm că o problemă din teoria potenţialului în spaţiu, care se poate uşor identifica cu problema A_0, a fost considerată din punctul de vedere al teoriei ecuaţiilor integrale de A. I. Guseinov [69].

29. Problema A_1 pentru două cercuri concentrice

Această problemă se poate enunţa astfel:

Să se găsească 4 funcţii de variabilă complexă f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}, primele două regulate în domeniul $R_2<r<R_1$, iar celelalte în $r<R_2$, ştiind că părţile reale ale acestor funcţii satisfac condiţiile

$$\left.\begin{aligned}&Re\, f_{11}(z)=\varphi_1(\theta),\\&Re\, f_{12}(z)=\varphi_2(\theta),\end{aligned}\right\}\quad \text{pe}\quad r=R_1,$$

$$\left.\begin{aligned}&Re\, f_{11}(z)=Re\, f_{21}(z),\\&Re\, f_{12}(z)=Re\, f_{22}(z),\\&\frac{\partial Re\, f_{11}(z)}{\partial n}=K\frac{\partial Re\, f_{22}(z)}{\partial n},\\&\frac{\partial Re\, f_{12}(z)}{\partial n}=\frac{\partial Re\, f_{21}(z)}{\partial n},\end{aligned}\right\}$$

$\varphi_j(\theta)$, $(j=1,2)$ fiind două funcţii date, iar K, o constantă pozitivă. În problema de la paragraful 24, K se identifică cu $k_3^2k_z^2$.

Vom satisface condiţiile enunţate, punînd

$$f_{1j}(z)=a_{1j0}+\sum_1^\infty a_{1jn}z^n+\sum_1^\infty b_{1jn}z^{-n},\ f_{2j}(z)=a_{2j0}+\sum_1^\infty a_{2jn}z^n$$
$$a_{1j0}=\alpha_{1j0}+i\beta_{1j0},\ a_{1jn}=\alpha_{1jn}+i\beta_{1jn},\ b_{1jn}=\gamma_{1jn}+i\delta_{1jn},$$
$$a_{2j0}=\alpha_{2j0}+i\beta_{2j0},\ a_{2jn}=\alpha_{2jn}+i\beta_{2jn},\ j=1,\ 2. \tag{10}$$

Pentru un n oarecare $(n\geqslant 1)$, avem de determinat 12 constante reale; cu expresiile scrise, separînd părţile reale şi introducîndu-le în condiţiile de mai

sus, vom căpăta, din egalarea coeficienților lui cos $n\,\theta$ și sin $n\,\theta$, 12 ecuații pentru cele 12 necunoscute. Vom scrie ecuațiile sub forma complexă

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_{1jn} + R_1^{-2n} b_{1jn} = \Phi_{jn} && (j = 1, 2),\\
&a_{1jn} + R_2^{-2n} \bar{b}_{1jn} = a_{2jn} && (n = 1, 2, 3),\\
&a_{12n} - R_2^{-2n} \bar{b}_{12n} = a_{2in},\\
&a_{11n} - R_2^{-2n} b_{11n} = K a_{22n},
\end{aligned}$$

unde am notat

$$\Phi_{jn} = \frac{1}{\pi R_1^n} \int_0^{2\pi} \varphi_j(\theta)\, e^{in\theta}\, d\theta. \tag{11}$$

Rezolvarea acestor ecuații conduce la următoarele valori ale coeficienților căutați

$$\gamma_{12n} = \pi^{-1} R_1^{-n} \left[2(1+K) + (1-K)\left((R_1/R_2)^{2n} + (R_2/R_1)^{2n}\right)\right]^{-1} \Big\{ \left[(1+K)R_1^{2n} + \right.$$

$$\left. + (1+K) R_2^{2n}\right] \int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta) \cos n\theta\, d\theta - 2R_1^{2n} \int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) \cos n\theta\, d\theta \Big\}, \tag{12}$$

$$\delta_{12n} = \pi^{-1} \Big\{ (1-K)\left[(R_1/R_2)^{2n} - (R_2/R_1)^{2n}\right] \Big\}^{-1} \Big\{ \left[(1+K)R_1^n + (K-1)R_2^n R_1^{-n}\right]$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta) \cos n\theta\, d\theta - 2 R_1^n \int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) \sin n\theta\, d\theta \Big\}, \tag{13}$$

$$a_{12n} = \bar{\varphi}_{2n} - R_1^{-2n} b_{12n}, \tag{14}$$

$$a_{11n} = \frac{1}{2}\left[(1+K)\, a_{12n} + (K-1)\, R_2^{-2n} b_{12n} \right], \tag{15}$$

$$b_{11n} = \frac{R_2^{2n}}{2}\left[(1-K)\, a_{12n} - (1+K)\, R_2^{-2n} \bar{b}_{12n} \right], \tag{16}$$

$$a_{21n} = a_{12n} - R_2^{-2n} \bar{b}_{12n}, \tag{17}$$

$$a_{22n} = a_{12n} + R_2^{-2n} b_{12n}, \tag{18}$$

$$\alpha_{110} = \alpha_{210} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta)\, d\theta, \tag{19}$$

$$\alpha_{120} = \alpha_{220} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta)\, d\theta, \tag{20}$$

în formulele (14), (15), (16), (17), (18) trebuind să înlocuim pe $\bar{b}_{2n}$ sau b_{2n} prin expresiile care rezultă din (12) și (13), iar pe Φ_2 sau $\bar{\Phi}_2$ prin (11).

Toți coeficienții depind, cum era natural, de funcțiile $\varphi_1(\theta)$ și $\varphi_2(\theta)$, iar cînd acestea sînt nule, $a_{1jn} = b_{1jn} = a_{2jn} = 0$ $(j = 1, 2;\ n = 1, 2, \ldots)$. β_{1j0} și β_{2j0} $(j = 1, 2)$ rămîn nedeterminați; așadar funcțiile căutate sînt definite cu aproximația unei constante imaginare, ca și în problema A_0.

Putem justifica acum alegerea condițiilor (21), (22), (23), (24), (25) și (29), (30), (31), (32), (33) de la capitolul IV, în locul altor condiții care

aparent, ar fi satisfăcut procesul de aproximații succesive: numărul ecuațiilor, care rezultă din condițiile (21), (22), (23), (24), (25) și (29), (30), (31), (32), (33) este egal cu numărul coeficienților ce urmează a fi determinați.

Este ușor de văzut ce se întîmplă în aproximațiile următoare, în general; pentru problema A_s vor trebui, pentru găsirea celor 2 $(s+1)$ funcții necunoscute, 3 $(s+1)$ condiții la limită, care ne vor da pentru grupul coeficienților de rang n $(n \geqslant 1)$, în număr de 6 $(s+1)$, tot 6 $(s+1)$ ecuații.

Introducerea valorilor (11), (12), (13) (14), (15), (16), (17), (18), (19), (20) în (10) ne furnizează expresiile căutate, ce vor depinde de φ_1, φ_2, R_1, R_2 și K; în cazul întîlnit la capitolul IV $\varphi_2 = 0$, astfel că

$$\alpha_{120} = \alpha_{220} = 0, \tag{21}$$

$$\gamma_{12n} = -2R_1^n \pi^{-1}\{2(1+K) + (1-K)[(R_1/R_2)^{2n} + (R_2/R_1)^{2n}]\}^{-1}$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \tag{22}$$

$$\delta_{12n} = -2R_1^n \pi^{-1}[1-K)^{-1}[(R_1/R_2)^{2n} - (R_2/R_1)^{2n}]^{-1} \int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \tag{23}$$

$$a_{12n} = -R^{-2n} \bar{b}_{12n}, \tag{24}$$

celelalte expresii (6), (7), (8), (9), (10) rămînînd, formal, neschimbate.

Dacă φ_1 este o funcție pară de θ, atunci $\delta_{12n} \equiv 0$.

30. Asupra unor probleme plane de tip B

Să presupunem că domeniile D_2 și D_3, ocupate de medii poroase, au, în plan, frontiere care se reprezintă prin 3 arce de cerc cu aceleași extremități. Vom indica o metodă de rezolvare prin coordonate bipolare, a căror utilizare se impune în cazul de față.

Se știe că prin transformarea conformă

$$\zeta = \log \frac{a+z}{a-z}, \quad \zeta = \alpha + i\beta, \quad z = x + iy,$$

facem ca liniile $\beta = \text{const.}$ $(-\pi < \beta < \pi)$ din planul ζ să corespundă unor arce de cerc care trec prin punctele $(-a, 0)$ și $(a, 0)$, în planul z. Fie domeniul D_2 limitat de $\beta = \beta_2$ și $\beta = \beta_4$, iar D_3 de $\beta = \beta_3$ și $\beta = \beta_4$; soluția ecuației lui Laplace $\Delta\varphi_j(\alpha, \beta) = 0$ în D_j $(j = 2, 3)$ se caută sub forma unei integrale Fourier [58],

$$\varphi_j(\alpha, \beta) = A_{j0} + \int_0^\infty \left\{ \left[A_j(m) \operatorname{ch} m\beta + B_j(m) \operatorname{sh} m\beta \cos m\alpha + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left[C_j(m) \operatorname{ch} m\beta + D_j(m) \operatorname{sh} m\beta \right] \sin m\alpha \right\} dm.$$

Vom nota cu φ_{j0} $(j = 2, 3)$ datele pe frontierele $\beta = \beta_2$ și $\beta = \beta_3$, și le vom pune sub forma

$$\varphi_{j0} = P_{j0} + \int_0^\infty (P_j \cos m\alpha + Q_j \sin m\alpha) \, dm,$$

presupunînd că φ_{j0} îndeplinește condițiile ce-i permit să fie reprezentată sub forma de mai sus [70], [71].

Condițiile la limită se vor scrie acum

$$\varphi_j(\alpha, \beta) = \varphi_{j0}(\alpha), \quad \text{pentru} \quad \beta = \beta_j \quad (j = 2, 3),$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_2(\alpha, \beta) = \varphi_3(\alpha, \beta), \\ &\frac{\partial \varphi_2(\alpha, \beta)}{\partial n} = K \frac{\partial \varphi_3(\alpha, \beta)}{\partial n} \end{aligned}\right\} \quad \text{pentru } \beta = \beta_4$$

și obținem astfel 8 ecuații pentru cele 8 funcții necunoscute care figurează în φ_2 și φ_3

$$A_j \operatorname{ch} m\beta_j + B_j \operatorname{sh} m\beta_j = P_j,$$

$$C_j \operatorname{ch} m\beta_j + D_j \operatorname{sh} m\beta_j = Q_j \quad (j = 2, 3),$$

$$A_2 \operatorname{ch} m\beta_4 + B_2 \operatorname{sh} m\beta_4 = A_3 \operatorname{ch} m\beta_4 + B_3 \operatorname{sh} m\beta_4,$$

$$C_2 \operatorname{ch} m\beta_4 + D_2 \operatorname{sh} m\beta_4 = C_3 \operatorname{ch} m\beta_4 + D_3 \operatorname{ch} m\beta_4,$$

$$A_2 \operatorname{sh} m\beta_4 + B_2 \operatorname{ch} m\beta_4 = K(A_3 \operatorname{sh} m\beta_4 + B_3 \operatorname{ch} m\beta_4,$$

$$C_2 \operatorname{sh} m\beta_4 + D_2 \operatorname{ch} m\beta_4 = K(C_3 \operatorname{sh} m\beta_4 + D_3 \operatorname{ch} m\beta_4);$$

pentru B_3 se obține, de exemplu, expresia

$$B_3 = \left[\operatorname{sh} m\beta_4 \left(\frac{KP_3}{\operatorname{ch} m\beta_3} - \frac{P_2}{\operatorname{ch} m\beta_2}\right) + \operatorname{ch} m\beta_4 \left(\frac{P_2}{\operatorname{ch} m\beta_2} - \frac{P_3}{\operatorname{ch} m\beta_3}\right) \frac{\operatorname{th} m\beta_2 \operatorname{sh} m\beta_4}{\operatorname{th} m\beta_2 \operatorname{ch} m\beta_4} - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{ch} m\beta_4}{\operatorname{sh} m\beta_4}\right] \times \left(K + \frac{\operatorname{th} m\beta_2 \operatorname{sh} m\beta_4 - \operatorname{ch} m\beta_4}{\operatorname{th} m\beta_2 \operatorname{ch} m\beta_4 \operatorname{sh} m\beta_4}\right)^{-1} (\operatorname{th} m\beta_3 \operatorname{ch} m\beta_2 - \operatorname{sh} m\beta_4)^{-1};$$

iar pentru celelalte necunoscute obținem

$$B_2 = \left[B_3 (\operatorname{th} m\beta_3 \operatorname{ch} m\beta_4 - \operatorname{sh} m\beta_4) + \operatorname{ch} m\beta_4 \frac{P_2}{\operatorname{ch} m\beta_2} - \frac{P_3}{\operatorname{ch} m\beta_3}\right)\Big]$$

$$(\operatorname{th} m\beta_2 \operatorname{ch} m\beta_4 - \operatorname{sh} m\beta_4)^{-1},$$

$$A_2 = \frac{P_2}{\operatorname{ch} m\beta_2} - B_2 \operatorname{th} m\beta_2,$$

$$A = \frac{P_3}{\operatorname{ch} m\beta_3} - B_3 \operatorname{th} m\beta_3,$$

C_j și D_j obținîndu-se respectiv, din înlocuirea în expresiile lui A_j și B_j pe P_j cu Q_j.

Pentru problema B_1 notînd cu φ_{21} şi φ_{22} funcţiile din D_3, iar cu φ_{31} şi φ_{32} funcţiile din D_3, condiţiile la limită se vor scrie

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{21} &= \Phi_1(\alpha),\\ \varphi_{22} &= \Phi_2(\alpha),\end{aligned}\right\} \text{ pe } \beta = \beta_2,$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{31} &= \Phi_3(\alpha),\\ \varphi_{32} &= \Phi_4(\alpha),\end{aligned}\right\} \text{ pe } \beta = \beta_3,$$

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_{21} = \varphi_{31},\\ &\varphi_{22} = \varphi_{32},\\ &\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial\beta} \frac{\partial\varphi_{31}}{\partial\beta},\\ &\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial\beta} = K\frac{\partial\varphi_{32}}{\partial\beta},\end{aligned}\right\} \text{ pe } \beta = \beta_4$$

şi cu reprezentări, sub forma unei integrale Fourier, căpătăm 16 ecuaţii pentru cei 16 coeficienţi care apar în funcţiile necunoscute.

31. Problemele A_0 şi A_1 pentru două sfere concentrice

Fie S_1 sfera de rază R_1 care reprezintă frontiera dintre fluidul liber şi un corp format din două medii poroase, unul care ocupă domeniul D_1 dintre S_1 şi S_2. S_2 fiind o sferă de rază R_2 R_1, iar celălalt care ocupă domeniul D_2, interiorul sferei de rază R_2. Notăm cu u_1 şi u_2 funcţiile armonice definite în D_1 şi D_2. Condiţiile la limită ce vor determina pe u_1 şi u_2 în problema A_0 se pot scrie

$$\begin{aligned}&u_1(r, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \qquad \text{pentru } R = R_1,\\ &u_1(r, \theta, \varphi) = u_2(r, \theta, \varphi),\\ &\frac{\partial u_1(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = K\frac{\partial u_2(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \text{ pentru } R - R_2,\end{aligned}$$

unde r, θ şi φ reprezintă obişnuitele coordonate sferice. Funcţiile u_1 şi u_2 se pot reprezenta sub forma

$$u_1(r, \theta, \varphi) = a_{01}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ a_{01}^{(n)} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}(a_{m1}^{(n)}\cos m\varphi + b_{m1}^{(n)}\sin m\varphi) P_{nm}(\cos\theta)\right\} r^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ c_{01}^{(n)} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}\left[(c_{m1}^{(n)}\cos m\varphi + d_{m1}^{(n)}\sin m\varphi) P_{nm}(\cos\theta)\right]\right\} r^{-(n+1)}, \tag{25}$$

$$u_2(r, \theta, \varphi) = a_{02}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ a_{02}^{(n)} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}(a_{m2}^{(n)}\cos m\varphi + b_{m2}^{(n)}\sin m\varphi) P_{nm}(\cos\theta)\right\} r^{-n}, \tag{26}$$

unde P_n și P_{nm} sînt polinoamele lui Legendre, respectiv funcțiile Legendre asociate. Pe $f(\theta, \varphi)$ o vom pune sub aceeași formă

$$f(\theta, \varphi) = a_0^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a^{(n)} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} (a_m^{(n)} \cos m\varphi + b_m^{(n)} \sin m\varphi) \right.$$

$$\left. P_{nm}(\cos\theta) \right\},$$

unde coeficienții dezvoltării sînt dați de formulele [72]

$$a_m^{(n)} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_S f(\theta, \varphi) P_{n,m}(\cos\theta) \cos m\varphi \, d\sigma,$$

$$b_m^{(n)} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_S f(\theta, \varphi) P_{n,m}(\cos\theta) \sin m\varphi \, d\sigma, \tag{27}$$

$\delta_m = 2$ pentru $m = 0$, $\delta_m = 1$ pentru $m \geqslant 1$, $P_{n0}(x) = P_n(x)$.

Punem condițiile pentru $r = R$, și $r = R_2$ și găsim ecuațiile care determină coeficienții dezvoltărilor din (25) și (26); la $r = R_1$ avem

$$a_{01}^{(0)} = a_0^{(0)},$$

$$a_{01}^{n} R_1^n + c_{01}^{(n)} R_1^{-(n+1)} = a_0^n,$$

$$a_{m1}^{(n)} R_1^n + c_{ml}^{(n)} R_1^{-(n+1)} = a_m^{(n)}$$

$$b_{m1}^{(n)} R_1^n + d_{m1}^{(n)} R_1^{-(n+1)} = b_m^{(n)},$$

iar la $r = R_2$ prima condiție dă

$$a_{01}^{(0)} = a_{02}^{(0)}$$

$$a_{01}^{(n)} R_2^n + c_{01}^{(n)} R_2^{-(n+1)} = a_{02}^{(n)} R_2^n,$$

plus încă două ecuații în care $a_{01}^{(n)}$, $c_{01}^{(n)}$ și $a_{02}^{(n)}$ vin înlocuiți odată, prin respectiv, $a_{m1}^{(n)}$, $c_{n1}^{(n)}$, $a_{m2}^{(n)}$, iar altă dată prin $b_{m1}^{(n)}$, $d_{m1}^{(n)}$, $b_{m2}^{(n)}$; a doua condiție la $r = R_2$

$$nR_2^{n-1} a_{01}^{(n)} - c_{01}^{(n)} R_2^{(-n+2)} (n+1) = nKR_2^{n-1} a_{02}^{(n)},$$

plus încă două ecuații, $a_{01}^{(n)}$, $c_{01}^{(n)}$ și $a_{02}^{(n)}$ înlocuindu-se prin $a_{m1}^{(n)}$, $c_{m1}^{(n)}$, $a_{m2}^{(n)}$, și apoi prin $b_{m1}^{(n)}$, $d_{m1}^{(n)}$ și $b_{m2}^{(n)}$. Se găsește ușor că

$$a_{01}^{(0)} = a_2^{(0)} = a_0^{(0)}, \tag{28}$$

$$a_{01}^{(n)} = a_0^{(n)} \left[R_1^n + R_1^{-(n+1)} R_2^{(2n+1)} \frac{n(1-K)}{1+n(1+K)} \right]^{-1}, \tag{29}$$

$$c_{01}^{(n)} = a_0^{(n)} \left[R_1^{-(n+1)} + R_1^n R_2^{-(2n+1)} \frac{1+n(1+K)}{n(1-K)} \right]^{-1}, \tag{30}$$

$$a_{02}^{(n)} = a_{01}^{(n)} + c_{01}^{(n)} R_2^{-(2n+1)}. \tag{31}$$

Pentru a obține coeficienții, înlocuim în (29) pe $a_{01}^{(n)}$ cu $a_{m1}^{(n)}$, iar pe $a_0^{(n)}$ prin $a_m^{(n)}$etc., și procedînd la fel cu (30) și (31), avem explicit valorile tuturor coeficienților.

Să observăm că pentru $K = 1$, avem

$$a_{01}^{(n)} = a_{02}^{(n)} = a_{01}^{(n)} R_1^{-n},$$
$$c_{01}^{(n)} = 0,$$

căpătînd astfel o singură funcție armonică în întreaga sferă. $K = 1$ corespunde problemei lui Dirichlet pentru interiorul sferei de rază R_1, iar $K = 0$ corespunde sferei $r = R_2$ impermeabilă cînd avem

$$a_{01}^{(n)} = a_0^{(n)} \left(R_1^n + R_1^{-(n+1)} R_2^{(2n+1)} \frac{n}{1+n} \right)^{-1}, \tag{32}$$

$$c_{01}^{(n)} = a_0^{(n)} \left(R_1^{-(n+1)} + R_1^n R_2^{-(2n+1)} \frac{n+1}{n} \right)^{-1}. \tag{33}$$

Fie acum u_{11} și u_{12} cele două funcții armonice definite în $R_2 \leqslant r \leqslant R_1$, și u_{21} și u_{22}cele două funcții armonice din $r \leqslant R_2$. Condițiile la limită se vor scrie atunci pentru problema A_1

$$\left.\begin{aligned} u_{11}(r, \theta, \varphi) &= f_1(\theta, \varphi), \\ u_{12}(r, \theta, \varphi) &= f_2(\theta, \varphi), \end{aligned}\right\} \text{ pentru } r = R_1,$$

$$\left.\begin{aligned} u_{11}(r, \theta, \varphi) &= u_{21}(r, \theta, \varphi), \\ u_{12}(r, \theta, \varphi) &= u_{22}(r, \theta, \varphi), \\ \frac{\partial u_{12}(r, \theta, \varphi)}{\partial r} &= \frac{\partial u_{21}(r, \theta, \varphi)}{\partial r}, \\ \frac{\partial u_{11}(r, \theta, \varphi)}{\partial r} &= k \frac{\partial u_{22}(r, \theta, \varphi)}{\partial r}, \end{aligned}\right\} \text{ pentru } r = R_2.$$

Cu dezvoltări de forma (25) pentru u_{11} și u_{12} și de forma (26) pentru u_{21} și u_{22}, punînd pe f_1 și f_2 sub forma,

$$f_i(\theta, \varphi) = a_{0i}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{0i}^{(n)} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} (a_{mi}^{(n)} \cos m\varphi + b_{mi}^{(n)} \sin m\varphi \, P_{nm}(\cos\theta)) \right\}$$

ajungem la următoarele ecuații tip pentru determinarea necunoscutelor

$$\left.\begin{aligned} a_{011}^{(n)} + c_{011}^{(n)} R_1^{-(2n+1)} &= a_{01}^{(n)} R_1^{-n}, \\ a_{012}^{(n)} + c_{012}^{(n)} R_1^{-(2n+1)} &= a_{02}^{(n)} R_1^{-n}, \\ a_{011}^{(n)} + c_{011}^{(n)} R_2^{-(2n+1)} &= a_{021}^{(n)}, \\ a_{012}^{(n)} + c_{012}^{(n)} R_2^{-(2n+1)} &= a_{022}^{(n)}, \\ a_{012}^{(n)} - \frac{n+1}{n} c_{012}^{n} R_2^{-(2n+1)} &= a_{021}^{(n)}, \\ a_{011}^{(n)} - \frac{n+1}{n} c_{011}^{(n)} R_2^{-(2n+1)} &= K a_{022}^{(n)}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Rezolvînd sistemul (25), se găsește

$$c_{011}^{(n)} = R_1^{-n}\left\{a_{01}^{(n)}\left[n(K+1)+1+n(1-K)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n+1}\right]-\right.$$

$$\left.-a_{02}^{(n)}(2n+1)K\right\}\times\left\{2\left[n(K+k)+1\right]R_1^{-(2n+1)}+\right. \tag{35}$$

$$\left.+n\left[(1-K)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n+1}-\left(K-\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right)R_2^{-(2n+1)}\right]\right\}^{-1}$$

$$a_{011}^{(n)} = a_{01}^{(n)} R_1^{-n} - c_{011}^{(n)} R_1^{-(2n+1)}, \tag{36}$$

$$a_{012}^{(n)} = \frac{n}{(2n+1)K}\left[a_{011}^{(n)}\left(K+\frac{n+1}{n}\right)+c_{011}^{(n)}R_2^{-(2n+1)}\left(K-\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right)\right], \tag{37}$$

$$c_{012}^{(n)} = \frac{nR_2^{2n+1}}{(2n+1)K}\left[a_{011}^{(n)}(1-K)-c_{011}^{(n)}R_2^{-(2n+1)}\left(K+\frac{n+1}{n}\right)\right], \tag{38}$$

$$a_{021}^{(n)} = a_{011}^{(n)} + c_{011}^{(n)} R_2^{-(2n+1)}, \tag{39}$$

$$a_{022}^{(n)} = a_{012}^{(n)} + c_{012}^{(n)} R_2^{-(2n+1)}, \tag{40}$$

ceilalți coeficienți găsindu-se prin înlocuiri evidente.

Folosind diferite sisteme de coordonate curbilinii, putem rezolva problemele de tip A și B pentru diverse domenii.

Pentru problemele A și B, în general, întrevedem aplicații și în alte domenii ale fizicii matematice.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Большинство теоретических задач, относящихся к движению жидкостей в пористых средах, вылилось в определенную форму в так называемой подземной гидрогазодинамике. Используя некоторые понятия этой дисциплины, автор исследует в настоящей работе некоторые задачи стационарного движения жидкостей в присутствии пористых тел. Эти задачи являются новыми и трудно разрешимыми, так как в настоящее время приходится учитывать не только движение вне тела, но и внутри его, а также и их согласованность. Когда коэффициенты фильтрации тел стремятся к нулю, необходимо найти выводы классической гидродинамики, относящиеся к движению жидкостей в присутствии таких же, но непроницаемых тел.

В разделе I, одновременно с определением некоторых характеристик пористой среды, напоминаются общие условия исследования задач подземной гидрогазодинамики, из которых наиболее важными являются: сохранение жидкостью своей первоначальной фазы; существование между жидкостью и средой лишь чисто механической взаимосвязи-однородность и изотропность среды. Далее автор рассматривает закон Дарси и указывает факторы, влиявшие на пределы его применимости.

предлагая классификацию движений в пористых средах на основе различных уравнений, устанавливающих связь между скоростью и градиентом давления. Работа посвящена лишь движениям, подчиняющимся закону Дарси.

Далее приводятся рабочие гипотезы, в корне отличающиеся от рабочих гипотез подземной гидрогазодинамики: *а)* тела ограничены или простираются до бесконечности, по меньшей мере в одном направлении; *в)* учитывается движение жидкости вокруг пористого тела, в то время как при движении подземных вод считается, вообще, что жидкость в контакте с пористой средой находится почти в состоянии покоя.

Как и в других задачах механики жидкостей и в настоящем случае пренебрегается влиянием тяжести.

Предполагается, что поверхности тел удовлетворяют в каждой своей точке условиям Ляпунова.

В § 5 приводятся формулы для расчета гидродинамического действия на пористые тела, учитывая лишь силы фильтрации. Это действие дано в (15) и (17), где $\bar{\Phi}_n$ есть вектор натяжений, соответствующих внешней нормали в какой-либо точке S поверхности тела. Для случая однородных тел имеются формулы (16) и (18), а для идеальных жидкостей выводятся формулы (19) и (20). Для плоского движения формулы Блазиуса-Чаплыгина обобщаются в силу (21) и (22), где α' дана в (23). В § 6 показывается, что парадокс Аламбера теряет силу для движения идеальных жидкостей в присутствии пористых тел.

В разделе II автор ставит сначала задачу для одного пористого тела и идеальной жидкости. Записывая непрерывность давления и нормальной скорости при прохождении через поверхность тела, а также и условие в точке ∞ и, полагая, сперва, что жидкость обладает на больших расстояниях поступательным движением со скоростью V_0, при условии, чтобы гидродинамический поток уничтожался поверхностью тела, автор выводит (1), (2), (3), (4). Исходя из того, что значения коэффициента фильтрации k являются вообще весьма малыми, автор пытается решить задачу при помощи (5) и (6), причем члены $k\varphi_{11}$, $k^2\varphi_{12}$,... и $k\varphi_{21}$, $k^2\varphi_{22}$, ... рассматриваются как небольшие поправки относительно φ_{10} соответственно φ_{20}. Функции φ_{ij} $(i = l, 1, 2;\ j\ \ 0, 1, 2, 3, \ldots)$ являются гармоническими в областях их определения. Вместо мерного параметра k можно всегда взять немерный параметр k, определенный посредством $k = \frac{kV_0}{Lg}$, где L есть характеристическая величина тела, как например у циркулярного цилиндра с радиусом R, $L = R$. При введении (5), (6) в (1), (2) получаются условия, которые необходимо удовлетворить на S при помощи φ_{ij}; автор показывает, что нахождение этих функций следует за последовательным и чередующимся решением двух основных задач теории потенциала: φ_{10} выводится из решения внешней задачи Неймана также как и φ_{11}, φ_{12} и т.д., а φ_{20}, φ_{21}, φ_{22} и т.д. из решения внутренней задачи Дирихле.

Обсуждается выполнение условия (15) и единственность полученного решения.

В § 9 показывается применение к циркулярному цилиндру, причем комплексный потенциал, находящийся вне его, дан (23) или (32), а находящйся внутри его дан (24) и (33).

Автор рассматривает затем случай циркулярного цилиндра с такой циркуляцией, при которой потенциал скорости на площади цилиндра дан (34) и затем переходит к движению с постоянным вихрем, при котором на больших расстояниях проекции скорости даны (42).

Далее автор рассматривает также и случаи: *a)* непроницаемой среды, окруженной пористой средой, и *b)* непроницаемой среды, продолженной пористой средой.

В § 14 рассматривается задача n-тел конечных размеров, а в конце раздела даются некоторые указания о движении сжимаемой жидкости в присутствии пористого тела, причем для внутреннего движения используется функция P_2, естественно появляющаяся при исследовании движений сжимаемых жидкостей в пористых средах.

В начале следующего раздела автор формулирует задачу одного тела и вязких жидкостей, пытаясь найти решение уравнений и удовлетворить предельные условия, развивая (10), (11) и (12). Задачу при малых числах Рейнольда можно сформулировать так: определяются две скалярные функции P_1 и P_2 и векторная функция $\vec{V}_1$, так как известно, что они удовлетворяют системе уравнений с частными производными (16), (17), (18), причем P_1 и $\vec{V}_1$ определены в области D_1, содержащей точку бесконечности, а P_2 в односвязной области D_2, дополняющей D_1 на общей границе D_1 и D_2, с условиями (8), (7), (19), (20), а в бесконечности (21). Пользуясь классическим методом исследования задачи сферы автор приходит к обобщению закона Стокса посредством формулы (46).

При помощи уравнений Осина, вычисляются также и вихри и показывается, что они меньше в случае пористой, чем в случае непроницаемой сферы.

В конце раздела автор указывает возможность распространения вышеизложенного на аналогичные случаи, рассматриваемые в разделе II.

В начале раздела IV производится классификация неоднородных пористых тел, принимая во внимание, что в этом разделе исследуются движения в тех случаях, когда неоднородность тел принадлежит к типу II, то есть тел разделенных на конечное число, причем среда каждой области обладает постоянным коэффициентом фильтрации.

Далее автор доказывает, что гидродинамический поток уничтожается поверхностью рассматриваемых тел.

Автор различает два основных наиболее простых вида тел: тела типа А, в которых две среды, из которых одна, обозначенная индексом 3, совершенно окружена другой, обозначенной индексом 2, и тела типа Б, образуемые двумя различными пористыми средами, из которых каждая имеет помимо общей части поверхности также и одну собственную часть, находящуюся в контакте со свободной жидкостью. В этом случае используются развитые формы (1), (2) и (3), и показывается, что в задаче А члены в k_3 из (1) выпадают.

Внутренняя задача A_0 формулируется так: определяются две гармонические функции φ_{20} и φ_{30}, первая в области D, ограниченной поверхностями S и S', вторая же в области D_3, ограниченной S', при известном значении φ_{20} на S и при наличии на S' условий (20) и (26).

Внутренняя задача A_1 формулируется следующим образом: находятся 4 гармонические функции $\varphi_{21,2}$, $\varphi_{21,3}$, $\varphi_{31,3}$ и $\varphi_{31,2}$, первые две определенные в области D_2, а другие две в D_3 при известном значении $\varphi_{21,2}$ и $\varphi_{21,3}$ на S и при наличии на S условий (21), (22), (29) и (30).

Формулируется и внутренняя задача A_2, причем показывается, что вообще для $2(n+1)$ функций, соответствующих приближению порядка n, имеется $3(n+1)$ предельных условия, из которых $n+1$ на S, а остальные $2(n+1$ на S'.

По аналогии рассматривается и задача B, в которой необходимо определить $2(n+1)$ функций при помощи $4(n+1)$ предельных условий, из которых $2(n+1)$ на общей поверхности вышеуказанных двух пористых сред, а остальные на поверхностях, находящихся в контакте со свободным потоком.

После нескольких замечаний, касающихся задачи, относящейся к вязким жидкостям, автор переходит к изложению примера одной из задач типа A.

Раздел заканчивается некоторыми соображениями в связи с задачами нескольких неоднородных тел.

В приложении приведены некоторые важные вопросы, не вошедшие в текст работы. В § 27 обсуждается одна работа, в которой приведены две вообще несовместимые гипотезы.

Далее рассматривается задача A_0, относящаяся к двум концентрическим кругам, причем указывается, что ее решение приводит в частных случаях либо к формуле Шварц-Вилла, дающей решение задачи окружности Дирихле, либо к формуле Вилла, дающей смешанное решение для круглого кольца.

В § 29 полностью решается задача A_1 также для кругового кольца.

В § 30 указывается метод решения плоской задачи B, когда три границы представлены тремя различными дугами окружности с одинаковыми концами.

Последний параграф посвящен задачам A_0 и A_1, относящимся к двум концентрическим сферам.

Автор считает необходимым привести два более важных вывода. В первую очередь, возможность, вследствие обобщенности предложенного метода поправок, применять его как к одному телу, так и к системе однородных тел или тел с неоднородностью типа II, причем жидкость может быть несжимаемой или сжимаемой, идеальной или вещественной. Во вторую очередь автор отмечает значительную сложность предельных задач, которые приходится рассматривать, что обосновывает, по крайней мере, в настоящей работе допущенные предположения и упрощения.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES MOUVEMENTS DANS DES MILIEUX POREUX

(RÉSUMÉ)

La plupart des problèmes théoriques se rapportant au mouvement des fluides dans les milieux poreux concernent l'hydrogazodynamique souterraine. Le présent travail, employant quelques notions de cette discipline, étudie certains problèmes rattachés au mouvement stationnaire des fluides en pré-

sence des corps poreux. Le problème est nouveau et difficile, étant donné la nécessité de tenir compte du mouvement tant à l'extérieur du corps, qu'à son intérieur, ainsi que du raccord entre les deux. Quand les coefficients de filtration des corps tendent vers zéro, il faudra retrouver les résultats de l'hydrodynamique classique pour le mouvement en présence des mêmes corps, considérés imperméables.

Dans le Ier chapitre, l'Auteur, tout en précisant la définition de quelques caractéristiques du milieu poreux, rappelle les conditions générales de l'étude des problèmes de l'hydrogazodynamique souterraine, parmi lesquels les plus importants sont: le fluide garde son état d'agrégation initial; il n'existe pas d'autre interaction entre le fluide et le milieu, que purement mécanique; le milieu est homogène et isotrope. L'Auteur s'occupe ensuite de la loi de Darcy, indiquant les facteurs qui influencent ses limites de valabilité, et propose une classification des mouvements dans les milieux poreux, se basant sur les diverses équations qui établissent une liaison entre la vitesses et le gradient de la pression. Le travail sera consacré uniquement aux mouvements obéissant à la loi de Darcy.

On indique ensuite les hypothèses de travail qui se différencient d'une manière fondamentale de celles de l'hydrogazodynamique souterraine: *a)* les corps sont limités ou s'étendent à l'infini tout au plus dans une seule direction; *b)* on tient compte du mouvement fluide autour du corps poreux, tandis que, dans l'étude du mouvement des eaux souterraines, on considère, en général, que le fluide en contact avec les milieux poreux est, approximativement, au repos.

Comme dans d'autres problèmes de mécanique des fluides, on néglige également ici l'influence de la pesanteur.

En ce qui concerne les surfaces des corps, on suppose qu'elles satisfont aux conditions de Liapounov en chacun de leurs points.

Dans le § 5 on donne les formules pour l'action hydrodynamique sur les corps poreux, en ne tenant compte que des forces de filtration. En général, cette action est donnée par (15) et (17), où $\vec{\Phi}$ est le vecteur des tensions correspondant à la normale extérieure en un point quelconque de la surface S du corps. Dans le cas des corps homogènes, on obtient les formules (16) et (18) et, pour les fluides parfaits, les formules (19) et (20). Par les mouvements plans, les formules (21) et (22), où α' est donné par (23), généralisent celles de Blasius-Tchaplyguine. Dans le § 6, on indique que le paradoxe de d'Alembert ne subsiste plus pour le mouvement des fluides parfaits en présence des corps poreux.

Le chapitre II commence par poser le problème pour un seul corps poreux en présence d'un fluide idéal. Inscrivant la continuité de la pression et de la vitesse normale quand on traverse la surface du corps, ainsi que la condition exprimant que le courant soit uniforme et animé par la vitesse V_0 à l'infini, et en plus celle que le flux hydrodynamique à travers la surface du corps s'annule, on obtient les relations (1), (2), (3), (4). On part de l'observation que les valeurs du coefficient de filtration k sont en général très petites et l'on essaye de résoudre le problème par les développements (5) et (6), les termes $k\varphi_{11}$, $k^2\varphi_{12}, \ldots$ et $k\varphi_{21}$, $k^2\varphi_{22} \ldots$ étant considérés comme de petites corrections par rapport à φ_{10}, respectivement φ_{20}. Les fonctions $\varphi_{ij} (i = 1, 2; j = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ sont harmoniques dans leur domaine de définition. Au lieu du paramètre dimensionnel k, on peut toujours prendre un paramètre dimensionnel

K, défini par $K = \frac{kV_0}{Lg}$, où L est une dimension caractéristique du corps, par exemple pour le cylindre circulaire de rayon R, $L = R$. Introduisant (5) et (6) dans (1), (2), on obtient les conditions qui doivent être satisfaites par φ_{ij}, sur S, et l'on montre que la détermination de ces fonctions se ramène à la solution successive et alternative de deux problèmes fondamentaux de la théorie du potentiel; φ_{10} s'obtient par la solution d'un problème de Neumann extérieur, de même que φ_{11}, φ_{12}, etc. et φ_{20}, φ_{21}, φ_{22} etc., par la solution de quelques problèmes de Dirichlet intérieurs.

On examine ensuite si la condition (4) est satisfaite et l'on étudie l'unicité de la solution obtenue.

Dans le § 9, on fait une application au cylindre circulaire, le potentiel complexe dans son intérieur étant donné par (23) ou par (32) et à son intérieur par (24) ou (33).

On considère ensuite le cas d'un cylindre circulaire à circulation, tel que le potentiel des vitesses sur la surface du cylindre soit donné par (34), et l'on passe ensuite au mouvement à tourbillon constant, quand à de grandes distances on aurait la distribution des vitesses donnée par (42).

L'Auteur s'occupe ensuite des cas: *a)* milieu imperméable, entouré d'un milieux poreux, et *b)* milieu imperméable, continué par un milieu poreux.

Dans le § 14 on considère le problème de n corps de dimensions finies et, à la fin du chapitre, on donne quelques indications sur le mouvement d'un fluide compressible en présence d'un seul corps poreux utilisant, pour le mouvement intérieur, la fonction P_2 qui se présente naturellement dans l'étude des mouvements des fluides compressibles dans les milieux poreux.

Le chapitre suivant commence par l'énoncé du problème pour un seul corps, en présence d'un fluide visqueux; on cherche la solution des équations et la satisfaction des conditions aux limites, par les développements (10), (11), (12). Le problème pour les petits nombres de Reynolds peut s'énoncer comme suit: il faut qu'on détermine deux fonctions scalaires p_1 et p_2 et une fonction vectorielle $\vec{v_1}$, sachant qu'elles satisfont au système d'équations aux dérivées partielles (16) ,(17), (18), p_1 et v_1 étant définies dans le domaine D_1 qui contient le point de l'infini et p_2, dans le domaine simplement connexe D_2, le complément de D_1 sur la frontière commune de D_1 et D_2, ayant les conditions (8), (7), (19), (20) et à l'infini, (21). Utilisant une méthode classique, on arrive à une généralisation de la loi de Stokes par la formule (46).

On calcule également les tourbillons, au moyen des équations d'Oseen, démontrant qu'ils sont plus petits dans le cas de la sphère poreuse que dans le cas de la sphère imperméable.

A la fin du chapitre, on indique les extensions dans les cas analogues à ceux considérés au chapitre II.

Au début du chapitre IV, on fait une classification des corps poreux non homogènes — le sujet du présent chapitre étant l'étude du mouvement dans le cas des corps à non homogénéité, du type II, — c'est-à-dire des corps qui se trouvent divisés en un nombre fini de régions, le milieu de chaque région possédant un coefficient de filtration constant.

On démontre ensuite que le flux hydrodynamique à travers la surface des corps considérés s'annule.

L'Auteur distingue deux cas fondamentaux — les plus simples — des corps: corps de type A, dans lequel on a 2 milieux, dont l'un — noté par l'indice 3 — est complètement entouré par l'autre — auquel on a donné l'indice 2— et corps de type B, formés de 2 milieux poreux différents, ayant chacun, outre une surface commune, une portion en contact avec le fluide libre. On utilise ensuite des développements de la forme (1), (2) et (3), indiquant que pour le problème A, les termes qui contiennent k, de (1) disparaissent.

Le problème A_0 intérieur s'énonce: déterminer 2 fonctions harmoniques φ_{20} et φ_{30}, la première définie dans le domaine D_2 limité par les surfaces S et S', et la deuxième dans le domaine D_3, limité par S', connaissant la valeur de φ_{20} sur S, et sachant que sur S' nous avons les conditions (20) et (26).

Le problème A_1 intérieur peut être formulé ainsi: trouver 4 fonctions harmoniques, φ_{212}, φ_{213}, φ_{313} et φ_{312}, les deux premières définies dans D_2 et les autres, dans D_3, sachant la valeur de φ_{212} et φ_{213} sur S, et que, sur S', on a les conditions (21), (22), (29) et (30).

On énonce également le problème A_2 intérieur, indiquant que, en général, pour les 2 $(n+1)$ fonctions qui correspondent à l'approximation d'ordre n, nous avons 3 $(n+1)$ conditions aux limites, dont $n+1$ sur S, et le reste sur S'.

D'une manière analogue, on traite également le problème P, où l'on doit déterminer les 2 $(n+1)$ fonctions par 4 $(n+1)$ conditions aux limites, dont 2 $(n+1)$ sur la surface commune des 2 milieux poreux et, le reste, sur les surfaces en contact avec le fluide libre.

Après quelques observations sur le problème des fluides visqueux, on considère comme exemple un problème de type A.

Le chapitre se termine sur quelques considérations sur le problème de plusieurs corps non homogènes.

A l'annexe, on examine quelques questions, lesquelles — bien qu'importantes — ne trouvent pas leur place dans les chapitres précédents.

Au § 27, on analyse un ouvrage qui contient 2 hypothèses, en général incompatibles entre elles.

On étudie ensuite le problème A_0 pour 2 cercles concentriques, indiquant que sa solution conduit, dans des cas particuliers, soit à la formule de Schwarz-Villat, qui résout le problème de Dirichlet pour le cercle, soit à la formule de Villat, qui résout un problème mixte pour la couronne circulaire.

Dans le § 29, on résout jusqu'au bout le problème A_1, également pour la couronne circulaire.

Dans le § 30, on indique une méthode de résolution du problème B plan, quand les 3 frontières sont représentées par 3 arcs de cercle différents, aux mêmes extrémités.

Le dernier paragraphe est dédié aux problèmes A_0 et A_1 pour 2 sphères concentriques.

L'Auteur signale 2 conclusions qui lui paraissent plus importantes. D'abord, la généralité de la méthode de correction proposée, qui peut être appliquée tant à un seul corps qu'à un système de corps homogènes, ou à non homogénéité de type II, le fluide pouvant être incompressible ou compressible, parfait ou visqueux. Il faut encore remarquer la grande complexité des problèmes aux limites auxquels nous sommes conduits, ce qui justifie, au moins pour le présent travail, les hypothèses et les simplifications admises.

BIBLIOGRAFIE

1. Henri Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Paris, 1856.
2. Jules Dupuit, *Mémoire sur le mouvement de l'eau à travers les terrains perméables*. C. R. 1857, t. 45, p. 92; 1861, t. 52, p. 1121.
3. N. E. Jukovski, *Lucrări științifice alese*. București, 1952, p. 158.
4. J. Boussinesq, *Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol*. J. de Math. pures et appliquées, 1904, seria II, t. 10, p. 5.
5. N. N. Pavlovski, *Teoria dvijenia gruntovîh vod pod ghidrotehniceskimi soorujeniami i eio osnovnîe prilojenia*. Petrograd, 1922.
6. — *Neravnomernoe dvijenie gruntovîh vod*. Dalneișee razvitie voprosa, Leningrad, 1932.
7. B. K. Rizenkampf, *Ghidravlika gruntovîh vod*. Ucenie zap. Saratovskogo gos. univ., 1938, partea I-a, t. I, nr. 1; 1938, partea a II-a, t. I, nr. 2; 1940, partea a III-a, t. XV, nr. 5.
8. G. Hamel, *Über Grundwasserströmung*. Zts. für ang. Math. und Mech., 1934, t. 14, caet 3, p. 129.
9. V. V. Wedernikov, *Teoria filtrații i eio primenenie v oblasti irigații i drenaja*. Moscova, 1939.
10. L. S. Leibenzon, *Sobranie trudov*. Moscova, 1953, vol. II.
11. V. N. Scelkacev, V. V. Lapuk, *Hidraulica subterană*. Ed. tehnică, București, 1953.
12. M. Muskat, *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*. New-York, 1937.
13. — *Physical Principles of Oil Production*. New-York, 1949.
14. P. I. Polubarinova-Kocina, *Teoria dvijenia gruntovîh vod*. Moscova, 1952.
15. A. Ciarnîi, *Podzemnaia ghidromehanica*. Moscova, 1948.
16. F. B. Nelson-Skorniakov, *Filtrația v odnorodnoi srede*. Moscova, 1949, ed. II.
17. V. I. Aravini. S. N. Numerov, *Teoria dvijenia jidcostei i gazov v nedeformiruemoi poristoi srede*. Moscova, 1953.
18. A. Anzelius, *Über Erwarmung vermittels durchströmender Medien*. Zeits. f. Math. u. Mech., 1926, vol. VI, nr. 4, p. 291.
19. H. A. Rahmatulin, *Obtekanie proriţaemogo tela*. Vest. Mos. Univ., 1950, nr. 3, p. 41.
20. H. Ia. Baiciorov, *Obșcie polojenia ob obtekanii poristogo kruglogo țilindra ploskoparalelnim potokom idealnoi nesjimaemoi jidkosti* Vest. Mos. Univ., 1951, nr. 10, p. 23.
21. S. Vasilache, *Asupra mișcării unui fluid incompresibil într-un cilindru poros semifinit*. Comunicările Acad. R.P.R., t. I, nr. 4, aprilie 1951, p. 331.
22. — *Asupra mișcării unui fluid incompresibil într-un cilindru poros de lungime finită*. Comunicările Acad. R.P.R., t. I, nr. 7, iulie 1954, p. 551.
23. I. Filimon. *Mișcări bidimensionale într-un mediu poros*. Comunicările Acad. R.P.R. t. II, nr. 5—6, mai-iunie 1952, p. 325.
24. Șt. I. Gheorghiță, *Câteva mișcări în medii poroase neomogene*. Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe matematice și fizice, t. VI, nr. 4, octombrie-decembrie 1954, p. 823.
25. — *Asupra unor mișcări în medii poroase neomogene*. Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 3, martie 1955, p. 509.
26. — *Acțiunea hidrodinamică exercitată asupra corpurilor poroase*. Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe matematice și fizice, t. VII, nr. 1, ianuarie-martie 1955, p. 149.
27. N. Patraulea, *O soluție de tip Oseen pentru curgerile în jurul suprafețelor permeabile*. Comunicările Acad. R.P.R., t. II, nr. 11—12, noiembrie-decembrie 1952, p. 737.
28. — *Aerodinamica suprafețelor permeabile*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1955 (sub tipar).
29. Amar Nath Puri, Balwant Rai, *Physical Characteristics of Soils*. VIII: *State of Aggregation*. Soil Sci, 1944, vol. 57, nr. 5, p. 391.
30. H. L. Ritter a. L. C. Drake, *Pore-size Distribution in Porous Materials*. Ind. and Eng. Chem, Analytical Ed., 1945, vol. 17, nr. 12, p. 782.
31. A. F. Lebedev, *The Movement of Ground and Soil Waters*. Abstracts of the Proc. of the First Int. Congress of Soil Science, 12—23 iunie 1927, comisiile I, II, p. 40.

32. Dimitri P. Krynine, *Soil mechanics*. New-York, 1947, p. 55.
33. — *Engineering hydraulics, Flow of ground water*. New-York, 1950.
34. *** Proceedings of the Second int. conf. on Soils Mechanics, 21—30 iunie 1948, Rotterdam, vol. VI, p. 148.
35. A. M. Agadjanov, *Ghidrogheologhia i ghidravlika podzemnîh vod i nefti*. Moscova, 1950, p. 161.
36. I. V. Gramonov i A. V. Lebedev, *Osnovnîe zadaci po dinamike podzemnih vod*. Moscova, 1952, p. 8.
37. John C. Henniker, *Retardation of Flow in Narrow Capillaries*. J. of colloid Sci., 1952, t. 7, nr. 4, p. 413.
38. Emil Liteanu, *Hidrogeologie aplicată*. București, 1952, p. 50.
39. A. Mayer, *Les terrains perméables*. Paris, 1947, p. 24.
40. Harvey D. Erickson, Henry Schmith, Ross Aiken Gartner, *The Permeability of Woods to Liquids and Factors Affecting the Rate of Flow*. Techn. Bull. 122, Univ. Minnesota, Agric. Exp. Station, iulie 1929.
41. Sigezo Iwanami, *On the Resistance of Layer of Small Balls to the Flow of Viscous Fluids*, Transof the soc. of mechanical eng. of Japan. 1938, vol. 4, nr. 16, p. 244.
42. P. Bremond, *Contribution à l'étude de la perméabilité des produits céramiques*. L'industrie céramique, 1950, nr. 413, p. 272.
43. Gr. M. Lomize, *Filtratia v trești novatih porodah*. Moscova, 1951.
44. E. Duclaux, *Recherches sur les lois des mouvements des liquides dans les espaces capillaires*. Annales de Chimie et de Physique, 1872, seria 4, t. 25, p. 442.
45. Charles S. Slichter, *Theoretical Investigation of the Motion of Ground Waters*. 19-th Ann. Report of the U. S. Geol. Survey, p. II, 1897—1898.
46. Jean Ferrandon, *Les lois de l'écoulement de filtration*. Le génie civil, vol. CXXV, nr. 2, 1948, p. 24.
47. V. N. Condriatev, *K voprosu teorii filtratii gruntov*. Ghidrotehnika i melioraţia, 1951, nr. 9, p. 27.
48. Shigeo Uchida, *Slow Viscous Flow Past Closely spaced Spherical Particles*. Rep. Inst. Sci. Technol., Tokyo, 1949, nr. 3, p. 97.
49. F. Durand, *Aerodynamic Theory*. Berlin, 1935, vol. II, p. 105.
50. N. M. Günther, *Teoria potenţiala i eio primenenie k osnovnîm zadaciam matematiceskoi fiziki*. Moscova, 1953, p. 11.
51. Traian Lalescu, *Curs de geometrie analitică. Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal*. București, 1927, fasc. IV, p. 157.
52. Caius Iacob, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*. București, 1952.
53. L. G. Loiţianski, *Mehanika jidkosti i gaza*. Moscova, 1950, p. 440.
54. M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*. Napoli, 1940, p. 274.
55. S. Verblunsky, *Inequalities for the derivatives of a bounded harmonic function*. Proc. of the Com. Phil. Soc., 1948, t. 44, p. 155.
56. V. Vâlcovici, *Asupra unei teorii a aluviunilor*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, t. IV, nr. 4, octombrie-decembrie 1952, p. 653.
57. H. Villat, *Sur un problème mixte de la théorie des fonctions harmoniques dans une aire annulaire*. C. R. 1911, t. 153, p. 518.
58. Ia. S. Ufliand, *Bipoliarnie koordinati v teorii uprugosti*. Moscova, 1950.
59. Șt. I. Gheorghiţă, *Două aplicaţii ale coordonatelor bipolare în hidrodinamica fluidelor viscoase*. Gaz. Mat. şi Fiz., 1954, seria A, nr. 4, p. 149.
60. I. Imai, *On the Flow of an Incompressibile Fluid Past a Circular Cylinder*. Proc. of the Phy.-Math. Soc. of. Jap., 1938, t. 20, p. 636.
61. N. E. Kocin, I. A. Kibel i. N. V. Rozé, *Teoreticeskaia ghidromehanika*. Moscova, 1948, ed. a III-a, vol. II.
62. A. I. Guseinov, *Teoremî suscestvovania i edinstvenosti reşenia dlia nelineinih integralnih uravnenii*. Matemat. Sborn., 1947, t. 20 (62), nr. 2, p. 293.
63. H. A. Baicionov, *Obtekanie poristogo kruglogo ţilindra ploskoparalelnîm potokom idealnoi nesjimaemoi jidkosti pri lineinom i kvadraticinom zakone filtraţii*. Vest. Mos. Univ., 1952, nr. 8, p. 73.
64. G. E. Ryanor, *On the Dirichlet-Neumann Problem*. Ann. of Math., 1931, seria II, t. 32, p. 17.
65. E. Carafoli, *Asupra unei teorii a suprafeţelor portante permeabile*, în *Lucrările Sesiunii generale ştiinţifice din 2—12 iunie* 1950. Ed. Acad. R.P.R., București, 1951, p. 836.

66. D. F. Şulghin, *Obtekanie sostavnogo profilia razlicinoi proniţaemosti*. Prikl. Mat. i Meh., 1953, t. XVII, nr. 3, p. 285.
67. H. Villat, *Sur la résolution de certaines équations intégrales et sur quelques problèmes qui s'y rattachent*. Acta Mathematica, 1916, t. 40, p. 101.
68. A. I. Guseinov, *Ob odnoi zadace teorii potenţiala*. Prikl. Mat. i Meh., 1948, t. XII, p. 103.
69. V. I. Smirnov, *Kurs vîşei matematiki*. Moscova, 1952, ed. a 11-a, t. II, p. 463.
70. G. P. Tolstov, *Riadî Fourier*. Moscova, 1951, p. 241.
71. V. I. Smirnov, *Kurs vîşei matematiki*. Moscova, 1951, ed. a 5-a, t. III, partea a II-a, p. 493.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

OPERATORUL-PRODUS ÎN SPAŢIILE LINIARE SEMIORDONATE ŞI APLICAŢIILE SALE *)

DE

ROMULUS CRISTESCU

INTRODUCERE

Teoria spaţiilor liniare semiordonate apărută în 1935—1936 prin lucrările lui L. V. Kantorovici şi H. Freudenthal, a deschis o serie de noi probleme în Analiza funcţională. O mare atenţie a fost acordată, în cadrul acestei teorii, studiului diferitelor clase de operaţii liniare care aplică un spaţiu liniar semiordonat în altul. În particular, s-au făcut diverse consideraţii asupra operaţiilor regulate. S-a dezvoltat de asemenea o teorie a ecuaţiilor funcţionale în K-spaţii. Teoria spaţiilor liniare semiordonate a scos în evidenţă şi necesitatea considerării funcţiilor cu valori în astfel de spaţii şi extinderea teoriei integrării şi a derivării pentru astfel de spaţii. Amintim, în sfîrşit, rolul pe care îl joacă în unele probleme existenţa produsului într-un anumit spaţiu liniar semiordonat.

Operaţiile biliniare studiate de numeroşi autori în spaţiile Banach au fost puţin considerate pînă în prezent în spaţiile semiordonate.

Noţiunea de operator-produs (P-operator) pe care o vom introduce în această lucrare, va reprezenta un anumit tip de operaţii de două argumente, cuprinzînd drept caz particular operaţiile biliniare-pozitive (ordinare). Acest operator, avînd unele proprietăţi ale produsului, are diverse utilizări în unele probleme ale teoriei spaţiilor semiordonate.

Obiectul lucrării este studiul operatorilor-produs şi al unor tipuri speciale de astfel de operatori, indicarea aplicaţiilor lor şi utilizarea operatorului-produs în două mari probleme ale analizei funcţionale în spaţiile semiordonate: ecuaţiile funcţionale şi integrarea abstractă.

Lucrarea este împărţită în patru capitole, capitolele I şi II formînd partea întîi, iar capitolele III şi IV, partea a doua a lucrării.

Capitolul I are ca obiect studiul operatorului-produs. Ne vom mărgini însă numai la unele proprietăţi generale şi la unele proprietăţi speciale bazate pe ipoteze suplimentare. O clasă mai particulară de operatori-produs va reprezenta o generalizare directă a produsului lui Vulih. Unele aplicaţii pe care le indicăm, sau care ar rezulta mai mult sau mai puţin direct din consideraţiile capitolului I, nu le vom trata în această lucrare.

---

*) Lucrare prezentată Institutului de matematică în şedinţa din 25 martie 1955.

Studiul ecuațiilor funcționale bazat pe noțiunea de operator- produs (ecuații P-operatoriale) face obiectul capitolului II, încadrîndu-se în partea I-a a lucrării, deoarece folosește direct considerațiile în legătură cu acești operatori. Se vor discuta diverse cazuri de ecuații într-un mod asemănător celui din teoria clasică a ecuațiilor integrale.

Partea a doua a lucrării se va referi la teoria integrării și aplicațiile sale. În această parte operatorul-produs va juca un rol secundar, acela de produs între elemente. În capitolul III, care se ocupă cu teoria generală a integrării, se fac mai întîi cîteva considerații relativ la funcțiile cu valori într-un spațiu liniar semiordonat (funcții semiordonate) și măsură de același tip (măsură semiordonată). Utilizînd în rolul de produs între elemente un operator-produs, se poate construi o integrală tip Lebesgue destul de generală — extindere a integralei lui Bochner — cuprinzînd diverse cazuri particulare însemnate de integrale, după natura P-operatorului. În acest capitol se va mai trata pe scurt diverse probleme din teoria integrării și se va indica alte moduri de a introduce o integrală. Dăm unele dintre numeroasele aplicații ale teoriei integrării în capitolul IV, ca reprezentarea operațiilor liniare, ecuații funcționale integrale și ecuații reductibile la cele P-operatoriale și altele.

Noțiunea de operator-produs (cu tipurile sale speciale), poate avea și diverse alte aplicații. Ea permite a se pune și studia noi probleme și a generaliza unele construcții și probleme cunoscute.

Preliminarii

Vom folosi în lucrarea de față noțiunea de spațiu liniar semiordonat (latice vectorială) sau K-lineal — cum i se mai spune [1], prin care se înțelege o mulțime liniară $\mathfrak{X}$ în raport cu corpul numerelor reale, în care este definită o relație $x > \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ fiind elementul nul al grupului $\mathfrak{X}$) satisfăcînd la *)

I. $x > \mathbf{0}$ exclude $x = \mathbf{0}$;

II. $x > \mathbf{0}$, $y > \mathbf{0}$ implică $x + y > \mathbf{0}$;

III. $x > \mathbf{0}$ și $\alpha > \mathbf{0}$ (α real) implică $\alpha x > \mathbf{0}$;

IV. Pentru orice elemente $x, y \in \mathfrak{X}$ există sup (x, y).

Din axioma IV rezultă că pentru orice număr finit de elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ există sup $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. În baza formulei

$$\inf (x_1, x_2, \ldots, x_n) = - \sup (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n),$$

orice mulțime finită de elemente are o margine inferioară.

Se utilizează notațiile

$$x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \text{ sau } \bigvee_i x_i \text{ pentru sup } (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \text{ sau } \bigwedge_i x_i \text{ pentru inf } (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Prin partea pozitivă a elementului x se înțelege elementul

$$x_+ = x \vee \mathbf{0}.$$

Prin partea negativă a lui x se înțelege elementul

$$x_- = (-x) \vee \mathbf{0}.$$

*) Se definește $x > y$ prin condiția $x - y > 0$. Prin sup. și inf. se va înțelege supremum și infimum (definite în modul obișnuit).

Modulul unui element este elementul

$$|x| = (-x) \vee x.$$

Se arată că

$$x = x_+ - x_- \qquad \text{și} \qquad |x| = x_+ + x_- .$$

Două elemente $x, y \in \mathfrak{X}$ se zic disjuncte dacă

$$|x| \wedge |y| = 0$$

Vom utiliza, în acest caz, notația: $x \perp y$. Se arată că $x_+ \perp x_-$.

Un K-lineal se zice că este arhimedian, dacă pentru orice element al său $x > 0$, avem: $0 = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x$.

Într-un K-lineal arhimedian prezintă interes noțiunea de (ρ)—convergență (convergență cu regulator). Fie $\{x_n\}$ un șir de elemente din $\mathfrak{X}$ și $x \in \mathfrak{X}$. Șirul (ρ)-converge către x, în notație

$$x_n \xrightarrow{\rho} x \qquad \text{sau} \qquad (\rho)\text{-}\lim x_n = x,$$

dacă există $r \in \mathfrak{X}$ (regulatorul de convergență al șirului), astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$ (ε real) să existe n_ε cu proprietatea

$$|x_n - x| \leqslant \varepsilon r \qquad \text{dacă} \qquad n \geqslant n_\varepsilon .$$

Această convergență (considerată de Moore și Kantorovici) are următoarele proprietăți:

i) $x_n \xrightarrow{\rho} x$ și $y_n \xrightarrow{\rho} y$ implică $x_n + y_n \xrightarrow{\rho} x + y$.

ii) $\alpha_n \to \alpha$ (numere reale) și $x_n \xrightarrow{\rho} x$ implică $\alpha_n x_n \xrightarrow{\rho} \alpha x$.

iii) $x_n \xrightarrow{\rho} x$ și $y_n \xrightarrow{\rho} y$ implică $x_n \vee y_n \xrightarrow{\rho} x \vee y$ și $x_n \wedge y_n \xrightarrow{\rho} x \wedge y$.

Ultima rezultă din inegalitățile

$$|x_n \vee y_n - x \vee y| \leqslant |x_n \vee y_n - x_n \vee y| + |x_n \vee y - x \vee y| \leqslant$$
$$\leqslant |y_n - y| + |x_n - x|$$

și egalitatea $a \wedge b = [(-a) \vee (-b)]$ care este valabilă pentru orice $a, b, \in \mathfrak{X}$.

În toată lucrarea vom înțelege prin spațiu liniar σ-semiordonat (prescurtat spațiu $l.\sigma$-$s.$) un spațiu liniar semiordonat $\mathfrak{X}$, care satisface în plus axioma.

V. orice mulțime numerabilă majorată are o margine superioară.

Spațiile $l\sigma$-s sînt numite uneori latici vectoriale σ-complete, sau K^- spații. Orice spațiu $l.\sigma$-$s.$ este arhimedian.

Într-un spațiu liniar σ-semiordonat se poate vorbi de limita superioară și limita inferioară a unui șir de elemente, care sînt finite *) dacă șirul este mărginit. Fie $\{x_n\} \subset \mathfrak{X}$. Se definește

$$\overline{\lim_n} x_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} x_i$$

*) Unui spațiu liniar semiordonat i se adaugă 2 elemente ideale, $+\infty$ și $-\infty$ cu proprietățile cunoscute.

și

$$\varlimsup_n x_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n}^{\infty} x_i .$$

Dacă $\varlimsup_n x_n = \varliminf_n x_n = x$ se spune că șirul este (o)-convergent și se notează

$$x_n \xrightarrow{o} x \quad \text{sau} \quad (o)\text{-}\lim_n x_n = x.$$

Se arată că (o)-convergența are următoarele proprietăți:

i) dacă $x_n \xrightarrow{o} x$ și $y_n \xrightarrow{o} y$ atunci $x_n + y_n \xrightarrow{o} x + y$;

ii) dacă $x_n \xrightarrow{o} x$ și $\alpha_n \to \alpha$ (reale) atunci $\alpha_n x_n \xrightarrow{o} \alpha x$;

iii) dacă $x_n \xrightarrow{o} x$ și $y_n \xrightarrow{o} y$ atunci $x_n \vee y_n \xrightarrow{o} x \vee y$ și $x_n \wedge y_n \xrightarrow{o} x \wedge y$;

iv) pentru ca $x_n \xrightarrow{o} x$ este necesar și suficient să existe un șir $u_n \searrow 0$ (adică $u_n \geqslant u_{n+1}$ și (o)-lim $u_n = 0$) pentru care

$$| x_n - x | \leqslant u_n ;$$

v) spațiul este (o)-complet relativ la această (o)-convergență, adică: pentru ca șirul $\{x_n\}$ să aibă o limită finită este necesar și suficient ca

$$(o)\text{-}\lim_k \left[\sup_{i,j \geqslant k} | x_i - y_j | \right] = 0.$$

Într-un spațiu liniar σ-semiordonat se mai poate vorbi și de (t)-convergență. Șirul $\{x_n\}$ (t)-converge către x dacă din orice subșir $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ se poate extrage un altul $\{x_{n_{i_j}}\}$ care (o)-converge către x. Se notează: $x_n \xrightarrow{t} x$ sau (t)-$\lim_n x_n = x$. Această convergență posedă unele proprietăți analoge (o)-convergenței.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se zice (o)-convergentă, dacă există (o)-$\lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i$. Seria se zice absolut (o)-convergentă dacă $\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |$ este (o)-convergentă. Dacă șirul $\{x_n\}$ este mărginit și este format din elemente disjuncte două cîte două, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut (o)-convergentă.

Prin K-spațiu (sau latice vectorială relativ completă) se înțelege un K-lineal care satisface în plus axioma:

V*. orice mulțime majorată are o margine superioară.

Aceste spații au fost studiate în special de L. V. Kantorovici.

Un subspațiu liniar $\mathfrak{X}_1$ al K-linealului $\mathfrak{X}$ se zice un subspațiu normal dacă $x_1 \in \mathfrak{X}_1$ și $| x | \leqslant | x_1 |$ implică $x \in \mathfrak{X}_1$. Un subspațiu liniar $\mathfrak{X}_1$ al K-linealului $\mathfrak{X}$ îl vom numi K-lineal exact în $\mathfrak{X}$, dacă $x, y \in \mathfrak{X}_1$ implică $x \vee y \in \mathfrak{X}_1$. Un subspațiu liniar $\mathfrak{X}_1$ al K-spațiului $\mathfrak{X}$ este un K-subspațiu exact, dacă $E \subset \mathfrak{X}_1$ implică sup $E \in \mathfrak{X}_1$. Un subspațiu liniar $\mathfrak{X}_1$ al K-spațiului $\mathfrak{X}$ care este simultan un subspațiu normal și exact se numește de obicei o componentă a sa.

Un K-lineal $\mathfrak{X}$ se zice că posedă un element unitate (unitate în sensul lui Freudenthal), dacă există un element $1 \in \mathfrak{X}$ cu proprietatea că $x > 0$ implică

$x \wedge \mathbf{1} > \mathbf{0}$. Deoarece într-un K-lineal cu unitate există o infinitate de elemente care pot fi considerate ca unități, se presupune că unul dintre aceste elemente este fixat și considerat ca unitate. Un element $e \in \mathfrak{X}$ se zice unitar (sau cvasi-unitate), dacă

$$e \wedge (\mathbf{1} - e) = \mathbf{0}.$$

Un element x al unui spațiu cu unitate se zice că este mărginit dacă există α real, așa ca $|x| \leqslant \alpha \mathbf{1}$. Mulțimea elementelor unitare ale unui K-spațiu cu unitate formează o algebră booleană completă, numită baza spațiului. Mulțimea elementelor mărginite ale unui K-spațiu cu unitate formează un subspațiu normal (K-spațiu). Un K-spațiu $\mathfrak{X}$ se zice că este lărgit, dacă orice mulțime de elemente disjuncte două cîte două ale sale e mărginită. Un K-spațiu lărgit este un K-spațiu cu unitate.

Într-un K-spațiu cu unitate se poate defini produsul dintre anumite elemente. Aceasta a fost arătată de B. Z. Vulih (chiar și pentru anumite K-lineale cu unitate [2]). Dacă spațiul este lărgit sau de elemente mărginite, produsul are sens pentru orice două elemente. Produsul elementelor poate fi introdus în mai multe feluri. Vom da definiția din [3].

Fie $\mathfrak{X}$ un K-spațiu cu unitate, $\mathfrak{X}_u$ baza sa și fie pentru $x > \mathbf{0}$, $S(x) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha\ e_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \sigma_i e_i \leqslant x,\ e_i \in \mathfrak{X}_u,\ \sigma_i \geqslant 0 \right\}$, ($\sigma_i$ reale). După cum se arată, $\sup S(x) = x$. Fie $x,\ y \geqslant \mathbf{0}$ și

$$x' = \sum_i \sigma_i e_i \in S(x), \quad y' = \sum_j \beta_j e'_j \in S(y).$$

Se definește

$$p(x'\ y') = \sum_{ij} \sigma_i \beta_j e_i \wedge e_j .$$

Dacă mulțimea $\{p(x', y')\}$ este mărginită, se pune

$$x \cdot y = \sup_{\substack{x' \in S(x) \\ y' \in S(y)}} p(x',\ y').$$

Acest produs are următoarele proprietăți fundamentale:

i) dacă xy există, atunci $(\alpha x)\, y$ și $x\,(\alpha y)$ există (pentru α real) și sînt egale cu $\alpha\,(x\,y)$;

ii) dacă xy și xz există, atunci $x\,(y + z)$ există și: $x\,(y + z) = xy + xz$;

iii) dacă xy există, atunci există și yx, și $yx = xy$;

iv) dacă xy există și $|x_1| \leqslant |x|$, $|y_1| \leqslant |y|$, atunci și $x_1\, y_1$ există;

v) $x\mathbf{1}$ și $x\mathbf{0}$ există totdeauna, și $x\mathbf{1} = x$, $x\mathbf{0} = \mathbf{0}$;

vi) dacă xy, yz și $(xy)z$ există atunci și $x\,(yz)$ există și $x(yz) = (xy)\,z$;

vii) dacă $x_n \xrightarrow{o} x$, $y_n \xrightarrow{o} y$ și $x_n\, y_n$ există pentru orice n și formează un șir mărginit, atunci $x_n\, y_n \xrightarrow{o} xy$.

Vom spune că un spațiu liniar σ-semiordonat este de tip (R), dacă în el (o)-convergența și (ρ)-convergența sînt echivalente. Pentru ca $\mathfrak{X}$ să fie de tip (R), este necesar și suficient ca (o)-convergența să fie stabilă, adică: dacă $x_n \xrightarrow{o} \mathbf{0}$, există șirul de numere reale $\lambda_n \to \infty$, astfel încît $\lambda_n\, x \xrightarrow{o} \mathbf{0}$.

Vom spune că un spațiu liniar σ-semiordonat $\mathfrak{X}$ este de tip (R^*), dacă are loc pentru elementele sale următoarea propoziție «asupra șirului diagonal»: dacă $x_i^k \searrow 0$ pentru $k \to \infty$ și orice i, atunci există un șir crescător de indici $\{k_i\}$, astfel încît $x_i^{k_i} \xrightarrow{o} 0$ cînd $k \to \infty$.

Se arată că pentru ca un spațiu l. σ-s. $\mathfrak{X}$ să fie de tip (R^*) este necesar și suficient ca să fie de tip (R), și ca să aibă loc proprietate «de anulare a unui șir»: pentru orice șir $\{x_n\}$ de elemente există un șir $\{\lambda_n\}$ de numere reale, așa ca $\lambda_n x_n \xrightarrow{o} 0$.

Pentru ca $\mathfrak{X}$ să fie de tip (R^*) este de asemenea necesar și suficient ca $\mathfrak{X}$ să fie de tip (R) și ca pentru orice mulțime numerabilă de șiruri convergente să existe un regulator comun de convergență.

Un K-spațiu $\mathfrak{X}$ se zice că este de *tip numerabil*, dacă orice mulțime mărginită de elemente disjuncte două cîte două ale sale este cel mult numerabilă.

Un K-spațiu, $\mathfrak{X}$ se zice că este *regulat* dacă este simultan de tip (R^*) și de tip numerabil (postulînd ipoteza continuumului, a doua condiție rezultă din prima). Spațiile regulate, care constituie clasa cea mai importantă de K-spații, au fost introduse de L. V. Kantorovici.

Prin *K-spațiu de elemente mărginite* se înțelege un K-spațiu cu unitate în care toate elementele sînt mărginite.

Prin KB-spațiu se înțelege un K-spațiu care este normat și care satisface condițiile:

i) $|x| \leqslant |y|$ implică $\|x\| \leqslant \|y\|$;

ii) $x_i \searrow 0$ implică $\lim_i \|x_i\| = 0$.

iii) $|x_i| \nearrow \infty$ implică $\lim_i \|x_i\| = \infty$.

Orice KB-spațiu este un K-spațiu regulat.

În orice K-lineal are sens noțiunea de operație aditivă și omogenă cu valori într-un K-lineal. O operație $y = U(x)$ de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{Y}$ ($\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ fiind K-lineale) se zice pozitivă dacă $x \geqslant 0$ implică $U(x) \geqslant 0$. Orice operație U aditivă și pozitivă e monotonă, adică $x_1 \leqslant x_2$ implică $U(x_1) \leqslant U(x_2)$ și satisface relației $|U(x)| \leqslant U(|x|)$. Dacă $\mathfrak{Y}$ este arhimedian, o operație aditivă și pozitivă e omogenă. O operație U se zice regulată dacă este diferența a două operații pozitive și aditive.

Mulțimea $\mathfrak{M}_r$ a operațiilor regulate care aplică un K-lineal $\mathfrak{X}$ într-un K-spațiu $\mathfrak{Y}$ formează un K-spațiu.

Pentru ca o operație aditivă să fie regulată este necesar și suficient ca să aplice mulțimi mărginite în mulțimi mărginite.

O operație $y = U(x)$, care aplică un spațiu l. σ-s. $\mathfrak{X}$ într-un spațiu l. σ-s. $\mathfrak{Y}$, este (oo)-continuă dacă

$$x_n \xrightarrow{o} x \quad \text{implică} \quad U(x_n) \xrightarrow{o} U(x).$$

O operație aditivă și (oo)-continuă se zice (oo)-liniară. O operație (oo)-liniară este omogenă.

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu *l.* σ-*s.* de tip (R), atunci o operație $y = U(x)$ definită pe $\mathfrak{X}$ cu valori într-un spațiu *l.* σ-*s.* $\mathfrak{Y}$ care este regulată, este și (oo)-liniară.

O operație $y = U(x)$ de la un K-spațiu $\mathfrak{X}$ cu unitate la un K-spațiu $\mathfrak{Y}$ cu unitate se zice multiplicativă, dacă pentru orice pereche x_1, x_2 de elemente

din $\mathfrak{X}$ pentru care $x_1 \cdot x_2$ există, produsul $U(x_1) \cdot U(x_2)$ există de asemenea și

$$U(x_1 \cdot x_2) = U(x_1) \cdot U(x_2).$$

Orice operație multiplicativă este pozitivă.

O operație $y = U(x)$ de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{Y}$ ($\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ fiind K-lineale) se zice disjunctivă, dacă $x_1 \perp x_2$ implică

$$U(x_1) \perp U(x_2),$$

O operație aditivă și multiplicativă este disjunctivă.

O operație (oo)-liniară și multiplicativă se zice liniar-multiplicativă. Condiția necesară și suficientă ca o operație (oo)-liniară de la K-spațiul $\mathfrak{X}$ cu unitate la K-spațiul $\mathfrak{Y}$ cu unitate să fie liniar-multiplicativă este ca pentru orice element unitar $e \in \mathfrak{X}$, $U(e)$ să fie unitar în $\mathfrak{Y}$.

Operațiile multiplicative au fost introduse și studiate de B. Z. Vulih.

PARTEA ÎNTÎIA

CAPITOLUL I

OPERATORI-PRODUS (*P*-OPERATORI)

În spațiile liniare, în particular în spațiile Banach sau în spațiile liniare semiordonate, după cum se știe, în general nu are sens noțiunea de produs între elemente. Axiomele acestor spații impun existența unei singure operații între elemente-adunarea. Diversele cercetări ale analizei funcționale nu puteau fi avansate însă, fără folosirea noțiunii de produs între elementele anumitor spații. Aceasta a făcut să capete o mare dezvoltare și teoria spațiilor liniare în care, în afară de adunare, este postulată și operația de înmulțire între elemente, așa-zisele algebre. Printre acestea, algebrele normate studiate mai întîi de M. Nagumo (în anul 1936), au căpătat o mare importanță, multe rezultate asupra lor aparținînd lui I. M. Gelfand, A. Taylor, N. Dunford etc.

În spațiile liniare semiordonate a fost de asemenea postulată, în unele cazuri, operația de înmulțire între elemente. Ne referim la spațiile liniare care sînt concomitent inele semiordonate studiate de diferiți autori (S. W. P. Steen, F. Riesz, B. Z. Vulih etc.). Printre acestea amintim încă inelele *F*-ordonate introduse și studiate de Al. Ghika [4], [5].

Dacă operația de înmulțire este uneori postulată (pentru orice pereche de elemente) cum face de exemplu S. W. P. Steen [6], în unele cazuri, această operație poate fi introdusă într-un spațiu liniar semiordonat fără lărgirea sistemului de axiome. Într-un caz particular acest lucru a fost făcut de F. Riesz [7]. B. Z. Vulih arată [8], mai general, că produsul poate fi introdus într-o clasă largă de spații, și anume în *K*-spațiile ce posedă o unitate în sensul lui Freudenthal. Ulterior, F. Riesz a dat o altă metodă de introducere a produsului în spațiile cu unitate [9]. Produsul definit de Vulih, care are sens numai pentru anumite perechi de elemente, posedă toate proprietățile fundamentale algebrice și topologice ale produsului numerelor reale. *K*-spațiile cu unitate care sînt spații lărgite sau spații de elemente mărginite devin, față de cele două operații algebrice, inele. Dacă spațiul este numai un *K*-lineal cu unitate ce satisface în plus anumitor condiții [2], operația de înmulțire, arată Vulih, poate fi de asemenea introdusă (avînd sens numai pentru unele perechi de elemente). Se obține așa-numitul inel semiordonat generalizat, apropiat prin proprietățile sale de inelele semiordonate absolute.

Dintre proprietățile pe care trebuie să le posede înmulțirea, în multe cazuri joacă un rol mai important distributivitatea, pozitivitatea și diferitele moduri de continuitate — continuitatea fiind uneori o consecință a primelor două proprietăți. Mărginindu-ne la aceste trei proprietăți ale înmulțirii, putem vorbi și de produsul între elementele a două spații care sînt distincte. Astfel de produse intervin sub diverse aspecte; este suficient să amintim aici produsul de compoziție între funcții de natură diferită.

Dacă produsul între elementele a două spații liniare semiordonate este definit pentru orice pereche de elemente, atunci el e un caz particular de operație biliniară. Operațiile biliniare studiate de diferiți autori în spațiile normate sau local convexe (M. Frechet, R. Schatten etc.*) au diverse

*) A se vedea și „Bibliografie"

aplicații și în spațiile liniare semiordonate. Dacă ele sînt pozitive, atunci joacă un rol de produs în multe construcții, cum ar fi de exemplu în teoria integrării. Extinzînd în mod natural definiția operației biliniare pozitive pentru ca ea să nu fie definită neapărat pentru orice pereche de elemente, vom obține un operator care va continua să joace rolul de produs. Acest « operator-produs » cum îl vom numi mai departe, va face obiectul de studiu al acestui capitol. Ne vom mărgini însă mai mult la proprietățile sale generale și vom indica unele proprietăți speciale bazate pe ipoteze suplimentare, care ar prezenta interes în diverse alte considerații asupra acestui operator. Noțiunea de operator-produs va fi folosită în celelalte capitole.

§ 1. OPERATORII-PRODUS ȘI PROPRIETĂȚILE LOR GENERALE

Vom considera K-linealele arbitrare $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ și vom nota prin $0'$, $0''$, 0 elementele lor nule respective.

1. Definiții și proprietăți generale

D e f i n i ț i a 1.1.1. O operație $z = \langle x, y\rangle$ definită pentru anumite perechi de elemente (x, y) $(x \in \mathfrak{X}, y \in \mathfrak{Y})$ cu valori în $\mathfrak{Z}$ va fi numită un *operator-produs* (pe scurt un *P-operator*), dacă satisface următoarele condiții):

1) Operația este (condiționat) *biaditivă*, adică: dacă $\langle x_1, y\rangle$ și $\langle x_2, y\rangle$ sînt definite, atunci și $\langle x_1 + x_2, y\rangle$ este definit și

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1 y\rangle + \langle x_2, y\rangle;$$

dacă $\langle x, y_1\rangle$ și $\langle x, y_2\rangle$ sînt definite, atunci și $\langle x, y_1 + y_2\rangle$ este definit și

$$\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle.$$

2) Operația este *pozitivă*, adică: dacă $\langle x, y\rangle$ este definit, atunci

$$x \geqslant 0', y \geqslant 0'' \text{ implică } \langle x, y\rangle \geqslant 0.$$

3) Operația este *definită normal*, adică: dacă $|x_1| \leqslant |x|$, $|y_1| \leqslant |y|$ și $\langle x, y\rangle$ este definit, atunci și $\langle x_1, y_1\rangle$ este definit; în plus $\langle 0', y\rangle$ și $\langle x, 0''\rangle$ sînt definite pentru orice x și y.

Mulțimea $\mathcal{S} = \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ va fi numită *suportul* operatorului-produs. Mulțimea $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, astfel ca pentru orice $(x, y) \in \mathcal{D}$, $\langle x, y\rangle$ să fie definit, va fi numită *domeniul de definiție* al operatorului-produs. Dacă $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, vom spune că $\langle x, y\rangle$ este *definit în* $\mathfrak{X}$, iar dacă în plus $\mathcal{D} = \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, vom spune că $\langle x, y\rangle$ este un operator-produs *definit pe* $\mathfrak{X}$.

Observație. Pentru orice $y \in \mathfrak{Y}$ să notăm cu $\mathcal{D}_y$ mulțimea elementelor $x \in \mathfrak{X}$, pentru care $\langle x, y\rangle$ este definit. Ea nu este vidă, deoarece conține în orice caz elementul $0'$. Dacă notăm prin $U_y(x) = \langle x, y\rangle$, U_y va fi o operație regulată definită pe $\mathcal{D}_y$, care reprezintă un subspațiu normal al lui $\mathfrak{X}$. Același lucru se poate spune despre operația $V_x(y) = \langle x, y\rangle$.

D e f i n i ț i a 1.1.2. Vom spune că domeniul de definiție $\mathcal{D}$ al unui P-operator este *rectangular*, dacă atunci cînd $\langle x_1, y_1\rangle$ și $\langle x_2, y_2\rangle$ sînt definite, sînt definite și $\langle x_1, y_2\rangle$, $\langle x_2, y_1\rangle$.

Definiţia 1.1.3. Un P-operator definit în $\mathfrak{X}$ va fi numit *simetric*, dacă atunci cînd $\langle x, y\rangle$ este definit, şi $\langle y, x\rangle$ este definit şi

$$\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Definiţia 1.1.4. Un P-operator definit în $\mathfrak{X}$ cu valori în $\mathfrak{X}$ va fi numit *asociativ*, dacă atunci cînd $\langle x_1, x_2\rangle$, $\langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle$ şi $\langle x_2, x_3\rangle$ sînt definite, este definit şi $\langle x_1, \langle x_2, x_3\rangle\rangle$ şi

$$\langle x_1, \langle x_2, x_3\rangle\rangle = \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle.$$

Definiţia 1.1.5. Un P-operator definit în $\mathfrak{X}$ cu valori în $\mathfrak{X}$ vom spune că posedă un element neutru, dacă există $u \in \mathfrak{X}$, astfel ca $\langle x, u\rangle$ şi $\langle u, x\rangle$ să fie definite pentru orice x şi

$$\langle x, u\rangle = \langle u, x\rangle = x$$

pentru orice x.

Vom utiliza în exemplele pe care le vom da următoarele notaţii:

R, mulţimea numerelor reale;

$F[a, b]$, K-spaţiul funcţiilor reale pe segmentul $[a, b]$;

$C[a, b]$, K-linealul funcţiilor continue pe segmentul $[a, b]$;

$M[a, b]$, K-spaţiul funcţiilor măsurabile şi mărginite aproape peste tot pe segmentul $[a, b]$;

$L[a, b]$, K-spaţiul funcţiilor sumabile pe segmentul $[a, b]$;

$L^p[a, b]$, K-spaţiul funcţiilor p-sumabile pe segmentul $[a, b]$;

$VM[a, b]$, K-spaţiul funcţiilor cu variaţie mărginită pe $[a, b]$;

$AC[a, b]$, K-spaţiul funcţiilor absolut continue pe $[a, b]$.

Cînd vom înlocui $[a, b]$ prin $[a, b]^2$, vom înţelege aceleaşi spaţii, funcţiile fiind însă definite pe patratul $[a, b] \times [a, b]$.

Prin $\mathcal{H}_r(\mathcal{Y})$ vom nota K-spaţiul operaţiilor regulate definite pe K-spaţiul $\mathcal{Y}$, cu valori în $\mathcal{Y}$. Prin $\mathcal{H}_r$ vom înţelege acelaşi spaţiu, fără precizarea domeniului de definiţie al operaţiilor. În sfîrşit, prin $\mathcal{H}_o^o(\mathcal{Y})$ vom nota mulţimea operaţiilor (oo)-liniare definite pe K-spaţiul $\mathcal{Y}$, cu valori în acelaşi spaţiu.

Exemple 1.1.1. Vom da aici cîteva exemple de operatori-produs. Alte exemple vor fi date mai departe.

1° Egalitatea

$$z(\tau) = \int_0^\tau x(\xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

ne dă un operator-produs $z = \langle x, y\rangle$ pe K-linealul $C[0, 1]$ cu valori în acelaşi spaţiu. El este simetric şi are ca element neutru funcţia $u(\mathfrak{T}) \equiv 1$. Vom nota acest operator-produs prin

$$z = \int x\, y.$$

2° Pe K-linealul $C[0, 1]^2$ pot fi consideraţi următorii operatori-produs cu valori în acelaşi spaţiu.

a) Produsul de compoziţie de prima speţă al lui Volterra [11]

$$z(\sigma, \tau) = \int_{\sigma\wedge\tau}^{\sigma\vee\tau} x(\sigma, \xi)\, y(\xi, \tau)\, d\xi$$

care reprezintă un P-operator asociativ, nesimetric și fără element neutru. Îl vom nota, utilizînd notația lui Volterra, prin

$$z = \overset{*}{x}\,\overset{*}{y}.$$

b) Produsul de compoziție de a doua speță al lui Volterra [11]

$$z(\sigma, \tau) = \int_0^1 x(\sigma, \xi)\, y(\xi, \tau)\, d\xi,$$

care reprezintă de asemenea un P-operator asociativ, nesimetric și fără element neutru. Il vom nota, utilizînd iarăși notația lui Volterra, prin

$$z = \overset{0}{x}\,\overset{0}{y}.$$

c) Produsul definit de G. C. Evans [12] în modul următor: se pune

$$x(\sigma, \tau) = \varphi(\sigma) + \psi(\sigma, \tau),$$

unde $\varphi(\sigma) = x(\sigma, \sigma)$ iar $\psi(\sigma, \sigma) = 0$, φ și ψ fiind astfel unic definite. Dacă

$$y(\sigma, \tau) = \varphi'(\sigma) + \psi'(\sigma, \tau),$$

atunci se definește

$$z(\sigma, \tau) = \varphi(\sigma)\varphi'(\sigma) + \varphi(\sigma)\psi'(\sigma, \tau) + \varphi'(\sigma)\psi(\sigma, \tau) + (\overset{*}{\psi}\,\overset{*}{\psi'})(\sigma, \tau)$$

Această egalitate poate fi considerată ca definind un P-operator $z = \langle x, y \rangle$ — care este neasociativ, nesimetric, dar posedînd un element neutru, funcția $u(\sigma, \tau) \equiv 1$.

3° Un caz particular dar important al produsului de compoziție este dat de egalitatea

$$z(\tau) = \int_0^\tau x(\xi)\, y(\tau - \xi) d\xi. \tag{1.1.1.}$$

Aceasta ne dă un operator-produs $z = \langle x, y \rangle$, care poate avea următoarele domenii de definiție $\mathfrak{D}_i$ și spații $\mathfrak{Z}_i$, care conțin valorile (rezultatele aparțin lui J. G. Mikusinski și Cz. Ryll-Nardzewski [13]

$$\mathfrak{D}_1 = L \times L,\ Z_1 = L \qquad \mathfrak{D}_3 = L^p \times L^q, \qquad Z_3 = C \quad (1/p + 1/q = 1)$$

$$\mathfrak{D}_2 = L \times M,\ Z_2 = C \qquad \mathfrak{D}_4 = VM \times C\ ,\ Z_4 = AC$$

$$\mathfrak{D}_5 = L \times AC\ ,\ Z_5 = AC,$$

toate spațiile fiind considerate pe segmentul $[0, 1]$.

4° Pe mulțimea $L^p \times L^q$ poate fi considerat următorul operator-produs

$$z(\tau) = x(\tau)\, y(\tau) \qquad (x \in L^p,\ y \in L^q),$$

avînd valori în L^r, dacă $1/p + 1/q = 1/r$.

Acest P-operator, în cazul $p = q = 2$, este asociativ, simetric, iar dacă spațiile conțin funcții definite pe un segment $[a, b]$, el posedă și element neutru — funcția $u(\tau) \equiv 1$.

5° Egalitatea

$$\zeta = \int_a^b x(\xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

ne dă un P-operator simetric avînd ca suport spațiul S al funcțiilor măsurabile pe $[a, b]$, și cu valori reale.

Vom trece acum la stabilirea proprietăților generale ale operatorilor-produs. Vom presupune că $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sînt K-lineale oarecari, iar $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ este suportul unui anumit operator-produs cu valori în $\mathfrak{Z}$.

T e o r e m a 1.1.1. Operatorul-produs are următoarele proprietăți generale:

1) oricare ar fi elementele $x \in \mathfrak{X}$ și $y \in \mathfrak{Y}$

$$\langle x, 0'' \rangle = \langle 0', y \rangle = 0;$$

2) dacă $\langle x, y \rangle$ este definit, atunci inegalitățile

$$0' \leqslant x_1 \leqslant x\,, \quad 0'' \leqslant y_1 \leqslant y$$

implică existența lui $\langle x_1, y_1 \rangle$ și

$$\langle x_1, y_1 \rangle \leqslant \langle x, y \rangle.$$

În particular pentru orice $y > 0$

$$\langle x_1, y \rangle \leqslant \langle x_2, y \rangle$$

oricare ar fi $x_1 \leqslant x_2$, pentru care elementele precedente există;

3) operatorul-produs este complet definit de valorile sale pentru argumente pozitive;

4) dacă $\langle x, y \rangle$ este definit, atunci, oricare ar fi λ real, $\langle \lambda x, y \rangle$ și $\langle x, \lambda y \rangle$ sînt definite și dacă $\mathfrak{Z}$ este arhimedian, atunci

$$\langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle;$$

5) dacă $\langle x, y \rangle$ este definit, atunci și $\langle |x|, |y| \rangle$ este definit și

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \langle |x|, |y| \rangle;$$

6) fie pentru anumite perechi de elemente pozitive x, y cu $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathfrak{Y}$ definită o operație $B(x, y)$ cu valori pozitive aparținînd lui $\mathfrak{Z}$ și care este (condiționat) biadițivă și satisface condiției următoare: dacă $B(x, y)$ este definit și $0' \leqslant x_1 \leqslant x$, $0'' \leqslant y_1 \leqslant y$, atunci și $B(x_1, y_1)$ este definit, iar $B(x, 0'')$, $B(0', y)$ sînt definite pentru orice x și y pozitive. Atunci $B(x, y)$ poate fi prelungit pînă la un operator-produs.

D e m o n s t r a ț i e. 1) Pentru orice $x \in \mathfrak{X}$, în baza biadivității

$$\langle x, 0'' \rangle = \langle x, 0'' + 0'' \rangle = \langle x, 0'' \rangle + \langle x, 0'' \rangle = 2 \langle x, 0'' \rangle$$

ceea ce implică

$$\langle x, 0'' \rangle = 0.$$

Se verifică la fel că $\langle 0', y \rangle = 0$.

2) Existența lui $\langle x_1, y_1 \rangle$ rezultă din definiția P-operatorului. Fie acum $x_2 = x - x_1$ și $y_2 = y - y_1$. Atunci $x_2 \geqslant 0'$, $y_2 \geqslant 0''$ și avem

$$\langle x, y \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_1, y_2 \rangle +$$

$$+ \langle x_2, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle.$$

Deoarece

$$\langle x_1, y_2 \rangle \geqslant 0, \langle x_2, y_1 \rangle \geqslant 0 \text{ și } \langle x_2, y_2 \rangle \geqslant 0,$$

rezultă

$$\langle x, y \rangle - \langle x_1, y_1 \rangle \geqslant 0,$$

ceea ce stabilește 2.

3) Vom observa mai întîi că din egalitățile

$$0 = \langle 0', y \rangle = \langle x - x, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle -x, y \rangle$$

în care am ținut seama că din $|-x| = |x|$, rezultă existența lui $\langle -x, y \rangle$, obținem

$$\langle -x, y \rangle = -\langle x, y \rangle.$$

În mod analog, $\langle x, -y \rangle$ există și

$$\langle x, -y \rangle = -\langle x, y \rangle.$$

Din definiția operatorului-produs rezultă că odată cu $\langle x, y \rangle$ sînt definite și elementele $\langle x_+, y_+ \rangle$, $\langle x_-, y_- \rangle$, $\langle x_+, y_- \rangle$, $\langle x_-, y_+ \rangle$ și reciproc. Propoziția 3) rezultă atunci din egalitatea

$$\langle x, y \rangle = \langle x_+ - x_-, y_+ - y_- \rangle = \langle x_+, y_+ \rangle + \langle x_-, y_- \rangle -$$

$$- \langle x_+, y_- \rangle - \langle x_-, y_+ \rangle.$$

4) Fie mai întîi ν natural. Atunci $\langle \nu x, y \rangle$ este definit. Într-adevăr pentru $\nu = 2$ rezultă din biadivitate, iar pentru ν oarecare rezultă prin inducție.

Dacă λ este real, există ν natural, așa ca $|\lambda| \leqslant \nu$. Atunci $|\lambda x| \leqslant |\nu x|$, ceea ce implică că $\langle \lambda x, y \rangle$ este definit pentru orice λ real. În mod analog $\langle x, \lambda y \rangle$ este definit pentru orice λ.

Fie acum $\mathfrak{S}$ arch median. Să considerăm mulțimea $\{x' = \lambda x_+\}_{\lambda \in R}$. Ea este evident un K-lineal *).

Operația

$$U_{y_+}(x') = \langle x', y_+ \rangle = \langle \lambda x_+, y_+ \rangle$$

este aditivă și pozitivă pe $\{x'\}$, de unde

$$U_{y_+}(\lambda x_+) = \lambda U_{y_+}(x_+)$$

adică

$$\langle \lambda x_+, y_+ \rangle = \lambda \langle x_+, y_+ \rangle.$$

În mod analog stabilim egalitățile

$$\langle \lambda x_-, y_- \rangle = \lambda \langle x_-, y_- \rangle, \langle \lambda x_+, y_- \rangle =$$

$$= \lambda \langle x_+, y_- \rangle, \langle \lambda x_-, y_+ \rangle = \lambda \langle x_-, y_+ \rangle.$$

*) Presupunem $x_+ \neq 0$. În caz contrar considerăm x_-. Presupunem evident $x \neq 0$, deoarece pentru $x = 0$, propoziția este evidentă.

Dacă presupunem $\lambda > 0$, atunci

$$\langle \lambda x, y \rangle = \langle \lambda x_+ - \lambda x_-, y_+ - y_- \rangle = \langle \lambda x_+, y_+ \rangle + \langle \lambda x_-, y_- \rangle -$$
$$- \langle \lambda x_+, y_- \rangle - \langle \lambda x_-, y_+ \rangle = \lambda \langle x_+, y_+ \rangle + \lambda \langle x_-, y_- \rangle -$$
$$- \lambda \langle x_+, y_- \rangle - \lambda \langle x_-, y_+ \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.$$

Dacă $\lambda < 0$, atunci $-\lambda > 0$ și

$$\langle \lambda x, y \rangle = \langle (-\lambda)(-x), y \rangle = (-\lambda) \langle -x, y \rangle =$$
$$= (-\lambda)(-1) \langle x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

ceea ce ne dă

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

pentru orice λ real. În mod analog stabilim egalitatea

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.$$

5) Faptul că $\langle |x|, |y| \rangle$ este definit, rezultă din definiția 1.1.1.

Avem

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x_+, y_+ \rangle + \langle x_-, y_- \rangle - \langle x_+, y_- \rangle - \langle x_-, y_+ \rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \langle x_+, y_+ \rangle + \langle x_-, y_- \rangle + \langle x_+, y_- \rangle + \langle x_-, y_+ \rangle = \langle |x|, |y| \rangle.$$

6) Prelungirea operației $B(x, y)$ pînă la un P-operator se face după formula

$$\langle x, y \rangle = B(x_+, y_+) + B(x_-, y_-) - B(x_+, y_-) - B(x_-, y_+)$$

dacă x și y sînt astfel încît termenii din membrul al doilea sînt definiți.

Vom arăta că operația definită de această egalitate satisface proprietățile 1), 2), 3) din definiția 1.1.1.

Proprietatea 2) este evidentă, deoarece pentru $x \geqslant 0'$, $y \geqslant 0''$,

$$B(x, 0'') = B(0', y) = 0$$

Pentru stabilirea condiției 3), vom observa mai întîi că dacă $\langle x, y \rangle$ este definit, atunci prin ipoteză sînt definite $B(x_+, y_+)$, $B(x_-, y_-)$, $B(x_+, y_-)$, $B(x_-, y_+)$ și datorită biaditivității lui B, este definit și $B(|x|, |y|)$. Fie $|x'| \leqslant |x|$ și $|y'| \leqslant |y|$. Atunci $B(|x'|, |y'|)$ este definit și cum $0' \leqslant x'_+$, $x'_- \leqslant |x'|$ și $0'' \leqslant y'_+$, $y'_- \leqslant |y'|$, sînt difinite și $B(x'_+, y'_+)$ $B(x'_-, y'_-)$, $B(x'_+, y'_-)$, $B(x'_-, y'_+)$. Există deci $\langle x', y' \rangle$.

Pentru orice x, sînt definite $B(x_+, 0'')$ și $B(x_-, 0'')$ și deci este definit $\langle x, 0'' \rangle$. Analog pentru orice y este definit $\langle 0', y \rangle$.

Vom trece, în sfîrșit, la stabilirea condiției 2. Fie x', x'', y arbitrare ($x', x'' \in \mathfrak{X}$; $y \in \mathfrak{Y}$), așa ca $\langle x', y \rangle$ și $\langle x'', y \rangle$ să fie definite. Prin urmare $B(x'_+, y_+)$, $B(x''_+, y_+)$ etc. există prin ipoteză. Există atunci și $B(x'_+ + x''_+, y_+)$ $B(x'_- + x''_-, y_-)$. Deoarece

$$(x' + x'')_+ \leqslant x'_+ + x''_+ \text{ și } (x' + x'')_- \leqslant x'_- + x''_-$$

sînt definite și $B((x' + x'')_+, y_+)$, $B((x' + x'')_-, y_-)$, $B((x' + x'')_-, y_+)$, $B((x' + x'')_+, y_-)$ și deci $\langle x' + x'', y \rangle$ există. Ținînd seama că putem scrie $(x' + x'')_+ = x'_+ + x''_+ - x_1$, $(x' + x'')_- = x'_- + x''_- - x_1$,
unde $x_1 \geqslant 0'$ și că $\langle x_1, y_+ \rangle$ și $\langle x_1, y_- \rangle$ sînt definite se verifică că

$$\langle x' + x'', y \rangle = \langle x', y \rangle + \langle x'', y \rangle$$

și propoziția 6) este demonstrată.

Vom trece acum la definirea diferitelor tipuri de continuitate ale P-operatorilor.

Vom presupune în definițiile următoare că $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, sînt subspații l. s. ale spațiilor *l.* σ-*s* $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, (o)-convergența din $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ fiind cea din $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$ respectiv. $\mathfrak{Z}$ va fi un spațiu *l*, σ-*s*.

D e f i n i ț i a 1.1.6. Un P-operator va fi numit *(o)-continuu în primul argument*, dacă

$$x_n \xrightarrow{o} x \text{ implică } \langle x_n, y \rangle \xrightarrow{o} \langle x, y \rangle,$$

pentru orice y pentru care $\langle x_n, y \rangle$ și $\langle x, y \rangle$ sînt definite (pentru $n = 1, 2, \ldots$).

În mod analog definim *(o)-continuitatea în al doilea argument.* Un P-operator (o)-continuu în ambele argumente va fi numit parțial *(o)-continuu.*

Un P-operator va fi numit *(o)-bicontinuu*, dacă

$$x_n \xrightarrow{o} x,\ y_n \xrightarrow{o} y \text{ implică } \langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow{o} \langle x, y \rangle,$$

ori de cîte ori $\langle x, y \rangle$ și $\langle x_n, y_n \rangle$ sînt definite (pentru $n = 1, 2, \ldots$). Definim în mod asemănător tipurile analoge de *(ρ)-continuitate*, înlocuind *(o)*-convergențe prin ( )-convergență. (În acest caz $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ pot fi considerate numai K-lineale archimediene).

D e f i n i ț i a 1.1.7. Vom spune despre un P-operator că este *(mo)-continuu*, dacă sînt îndeplinite condițiile: $x_n \xrightarrow{o} x$, $y_n \to y$ și $\langle x_n, y_n \rangle$ este definit pentru $n = 1, 2, \ldots$ și formează un șir mărginit, implică că $\langle x, y \rangle$ este definit și

$$\langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow{o} \langle x, y \rangle.$$

E x e m p l e 1.1.2. Vom da aici o serie de alte exemple de P-operatori, însă de formă generală și ne vom referi și la continuitatea lor.

1° Dacă $\mathfrak{X}$ este un K-spațiu cu unitate arbitrar (sau un K-lineal archimedian cu unitate ce satisface în plus anumitor condiții [2], el poate fi considerat ca suportul unui P-operator ce prezintă o mare importanță și anume produsul introdus de V u l i h. El este asociativ, simetric, *(mo)*-continuu și cu element neutru-unitatea spațiului. Domeniul de definiție nu coincide în general cu $\mathfrak{X}^2$. Dacă spațiul $\mathfrak{X}$ este lăgit sau de elemente mărginite, avem un P-operator definit pe $\mathfrak{X}$ cu valori în $\mathfrak{X}$, care este (o)-bicontinuu.

Vom utiliza pentru acest P-operator, notația

$$z = x \cdot y.$$

Dacă $\mathfrak{X}$ este un K-spațiu cu unitate arbitrar și dacă $\tilde{\mathfrak{X}}$ este lărgirea sa maximală [1], atunci, după cum se știe, $\tilde{\mathfrak{X}}$ este lărgit și deci în el are sens produsul

lui Vulih pentru orice pereche de elemente. Să notăm prin $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ elementele din $\tilde{\mathfrak{X}}$ corespunzătoare elementelor x, $y \in \mathfrak{X}$. Atunci egalitatea

$$\langle x, y \rangle = \tilde{x} \cdot \tilde{y}$$

ne va da un operator-produs pe $\mathfrak{X}$ cu valori în $\tilde{\mathfrak{X}}$ care este simetric, are element neutru și este (o)-bicontinuu.

2° Fie $\tilde{\mathfrak{Z}}$ un K-spațiu cu unitate iar $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ K-lineale arbitrare. Fie U și V operații aditive, pozitive și disjuncte definite respectiv pe $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ și cu valori în $\tilde{\mathfrak{Z}}$.

Dacă definim

$$\langle x, y \rangle = U(x) \cdot V(y) \tag{1.1.2}$$

(în partea dreaptă a egalității fiind produsul lui Vulih) obținem un operator-produs având ca suport mulțimea $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. Într-adevăr, biaditivitatea rezultă din faptul că dacă $U(x_1)\ V(y)$ și $U(x_2)\ V(y)$ există, atunci, datorită proprietății produsului lui Vulih, există

$$[U(x_1) + U(x_2)]\ V(y) = U(x_1 + x_2) \cdot V(y) = \langle x_1 + x_2, y \rangle$$

și în plus

$$[U(x_1) + U(x_2)]\ V(y) = U(x_1) \cdot V(y) + U(x_2) \cdot V(y) = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2\ y \rangle$$

Pozitivitatea operatorului (1.1.2) este evidentă.

Fie acum $|x_1| \leqslant |x|$, $|y_1| \leqslant |y|$ și fie că $U(x) \cdot V(y)$ există. Operațiile fiind disjunctive, $U(|x|) = |U(x)|$ și $V(|y|) = |V(y)|$ și deci $U(|x|) \cdot V(|y|)$ există. Operațiile fiind pozitive

$$U(|x_1|) \leqslant U(|x|) \quad , \quad V(|y_1|) \leqslant V(|y|)$$

de unde rezultă că $U(|x_1|) \cdot V(|y_1|)$ există și deci există și

$$U(x_1) \cdot V(y_1) = \langle x_1, y_1 \rangle.$$

Prin aceasta este demonstrată și condiția de normalitate a operatorului (1.1.2).

Dacă U și V sînt în plus (oo)-liniare, acest P-operator este și (mo)-continuu.

În cazul $\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{Y}$, P-operatorul acesta este simetric dacă și $U \equiv V$.

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu lărgit sau de elemente mărginite, egalitatea (1.1.2) ne dă un operator-produs definit pe $\mathfrak{D} = \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, cu condiția mai slabă ca U și V să fie numai aditive și pozitive. Acest operator-produs este (o)-continuu în primul sau în al doilea argument, după cum U sau V este (oo)-continuă. Dacă U și V sînt ambele (oo)-continui, P-operatorul este (oo)-bicontinuu.

3° Fie $\mathfrak{X}$ un K-spațiu cu unitate și U o operație aditivă și pozitivă definită pe $\mathfrak{X}$ și cu valori în K-linealul $\tilde{\mathfrak{Z}}$. Dacă punem

$$\langle x, y \rangle = U(x.\ y) \tag{1.1.3}$$

obținem un operator-produs având $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ ca suport și cu valori în $\tilde{\mathfrak{Z}}$. Într-adevăr, pozitivitatea este evidentă, iar biaditivitatea rezultă din faptul că dacă $x_1 y$ și $x_2 y$ există, atunci există și $(x_1 + x_2) \cdot y = x_1 y + x_2 y$ și

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = U[(x_1 + x_2) \cdot y] = U(x_1\, y + x_2\, y) =$$
$$= U(x_1\, y) + U(x_2 y) = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

În sfîrșit, dacă $|x_1| \leqslant |x|$ și $|y_1| \leqslant |y|$, atunci dacă xy există, $x_1 y_1$ există de asemenea și deci $\langle x_1, y_1 \rangle = U(x_1 y_1)$ există.

Acest P-operator este simetric.

Dacă U este în plus (oo)-continuă și posedă o inversă pozitivă (cînd $\mathcal{Y}$ este σ-complet), atunci P-operatorul este (mo)-continuu.

Dacă U este o operație aditivă și multiplicativă, atunci P-operatorul (1.1.3) se poate pune sub forma (1.1.2) pentru cazul $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ și $U \equiv V$, avînd însă în general un domeniu de definiție mai restrîns decît P-operatorul (1.1.2).

În cazul cînd $\mathcal{X}$ este un K-spațiu lărgit sau de elemente mărginite, formula (1.1.3) ne dă un operator-produs definit pe $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, care este (o)-bicontinuu dacă U este (oo)-continuă.

4° Fie $\mathcal{X}$ un K-spațiu cu unitate și $\mathcal{X}_0$ subspațiul elementelor sale mărginite. Să presupunem că pe $\mathcal{X}$ este definită o operație $U_0(x) = x_0$ cu valori în $\mathcal{X}_0$. Să punem

$$\langle x, y \rangle = x_0 y_0 \quad , \quad (x, y \in \mathcal{X}), \tag{1.1.4}$$

unde în partea dreaptă am notat ca de obicei, produsul lui Vulih. Deoarece în $\mathcal{X}_0$ produsul are totdeauna sens, egalitatea (1.1.4) ne dă un operator-produs definit pe $\mathcal{X}$, care este simetric. Dacă operația U_0 este (oo)-continuă, acest P-operator devine (o)-bicontinuu.

Dacă $\mathcal{X} = L[0,1]$ atunci $\mathcal{X}_0 = M[0,1]$ și un exemplu de operație U_0 este dat de egalitatea

$$x_0(\tau) = \int_0^\tau k(\tau - \xi)\, x(\xi)\, d\xi \qquad (x \in L,\ k \in M).$$

Această operație este și (oo)-continuă.

5° Fie $\mathcal{X}$ un KB-spațiu cu unitate și cu normă aditivă pentru termeni pozitivi, iar $\mathcal{X}^*$ spațiul său adjunct. După cum se știe $\mathcal{X}^*$ este izomorf cu subspațiul $\mathcal{X}_0$ al elementelor mărginite din $\mathcal{X}$.

Dacă definim

$$\langle x, y \rangle = y^*(x) \qquad (x \in \mathcal{X},\ y \in \mathcal{X}_0,\ y^* \in \mathcal{X}^*),$$

unde $y^* \longleftrightarrow y$, obținem un operator-produs pe $\mathcal{X} \times \mathcal{X}_0$ cu valori reale, care este (o)-bicontinuu. Ultima rezultă din faptul că dacă $y_n \xrightarrow{o} y$ atunci $y_n^* \xrightarrow{o} y^*$ și deci $y_n^*(x) \xrightarrow{o} y^*(x)$ pentru orice $x \in \mathcal{X}$, de unde, datorită proprietăților funcționalelor (o)-liniare [1], dacă $x_n \xrightarrow{o} x$, atunci $y_n^*(x_n) \to y^*(x)$, adică $\langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow{o} \langle x, y \rangle$.

6° Fie $\mathcal{X}$ un K-lineal, $\mathcal{Y}$ un K-spațiu și $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_r(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, K-spațiul operațiilor regulate de la $\mathcal{X}$ la $\mathcal{Y}$. Egalitatea

$$z = U(x) \tag{1.1.5}$$

poate fi considerată ca definind un operator-produs

$$z = \langle U, x \rangle, \tag{1.1.6}$$

avînd ca domeniu de definiție $\mathcal{D} = \mathcal{H}_r \times \mathcal{X}$ și cu valori în $\mathcal{Y}$. El este (o)-continuu în primul argument.

Dacă $\mathcal{X}$ este un K-spațiu, egalitățile (1.1.5) și (1.1.6) ne dau de asemenea un P-operator definit pe $(\mathcal{H}_r \cap \mathcal{H}_o^o) \times \mathcal{X}$ cu valorile în $\mathcal{Y}$, $\mathcal{H}_o^o$ fiind mulțimea

operațiilor (oo)-liniare de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{Z}$. El este parțial (o)-continuu, iar dacă $\mathfrak{Z} = R$, el este chiar (o)-bicontinuu.

7° Dacă $\mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_r(\mathfrak{X})$ este K-spațiul operațiilor regulate de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{X}$, se poate defini un operator produs pe $\mathfrak{H}_r$ prin egalitatea

$$W = \langle U, V \rangle, \qquad (U, V \in \mathfrak{H}_r)$$

unde W este compunerea operațiilor U și V, adică

$$W(x) = U[V(x)]$$

pentru orice $x \in \mathfrak{X}$.

În teoremele următoare vom da proprietățile ce privesc continuitatea operatorului-produs.

Vom presupune că $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt subspații *l. s.* ale spațiilor liniare σ-semiordonate $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{Y}_1$ respectiv, iar $\mathfrak{Z}$ este de asemenea un spațiu liniar σ-semiordonat. (o)-convergența în $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ va fi aceea din $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{Y}_1$ respectiv.

Vom presupune că $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ este suportul unui anumit P-operator pentru care vom utiliza, ca și mai înainte, notația $\langle x, y \rangle$.

Teorema 1.1.2. Dacă $x_n \xrightarrow{o} 0'$ implică $\langle x_n, y \rangle \xrightarrow{o} 0$ pentru orice y pentru care $\langle x_n, y \rangle$ este definit, atunci P-operatorul este (o)-continuu în primul argument.

O propoziție analogă are loc cu privire la al doilea argument.

Demonstrație. Rezultă din faptul că dacă $\langle x_n, y \rangle$ și $\langle x, y \rangle$ sînt definite, atunci $\langle x_n - x, y \rangle$ este definit și

$$\langle x_n - x, y \rangle = \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle.$$

Teorema 1.1.3. Un P-operator parțial-continuu definit pe un domeniu rectangular este (o)-bicontinuu, dacă $x_n \xrightarrow{o} 0'$ și $y_n \xrightarrow{o} 0''$ implică $\langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow{o} 0$, ori de cîte ori $\langle x_n, y_n \rangle$ sînt definite $(n = 1, 2, \ldots)$.

Demonstrație. Fie $x_n \xrightarrow{o} x$, $y_n \xrightarrow{o} y$ iar $\langle x_n, y_n \rangle$ și $\langle x, y \rangle$ definite. Domeniul P-operatorului fiind rectangular,

$$\langle x_n, y \rangle, \quad \langle x, y_n \rangle$$

sînt definite și avem

$$\langle x_n - x, y_n - y \rangle = \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle - \langle x, y_n \rangle + \langle x, y \rangle.$$

Deoarece

$$x_n - x \xrightarrow{o} 0', \quad y_n - y \xrightarrow{o} 0'',$$

rezultă, în baza ipotezei, că

$$\langle x_n - x, y_n - y \rangle \xrightarrow{o} 0.$$

Dar

$$\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle = \langle x_n - x, y_n - y \rangle + \langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle$$

și ținînd seamă că

$$\langle x, y_n \rangle \xrightarrow{o} \langle x, y \rangle$$

vom obține

$$(o) - \lim_n [\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle] = 0.$$

Pe de altă parte

$$(o) - \lim_n \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle,$$

ceea ce ne conduce la

$$(o) - \lim_n \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$$

și teorema este demonstrată.

În următoarele două teoreme vom folosi următoarea observație. O operație regulată U definită pe o submulțime liniară $\mathfrak{X}$ a unui spațiu liniar σ-semiordonat de tip (R) $\mathfrak{X}_1$, astfel ca $\mathfrak{X}$ să majoreze $\mathfrak{X}_1$, este (oo)-continuă pe $\mathfrak{X}$, adică $x_n \xrightarrow{o} 0'$ în $\mathfrak{X}_1$ și $x_n \in \mathfrak{X}$ implică $U(x_n) \xrightarrow{o} 0$.

În [1] se demonstrează această propoziție pentru cazul $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}$ fiind presupus un K-spațiu regulat).

Amintim că $\mathfrak{X}$ se zice că majorează $\mathfrak{X}_1$, dacă pentru orice $x \in \mathfrak{X}_1$, există $x' \in \mathfrak{X}$, așa ca $|x| \leqslant x'$.

Teorema 1.1.4. Dacă $\mathfrak{X}_1$ este un spațiu $l.\sigma$-s de tip (R) iar $\mathfrak{X}$ majorează $\mathfrak{X}_1$, atunci, dacă P-operatorul este definit pe $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, el este (o)-continuu în primul argument.

O propoziție analogă are loc cu privire la al doilea argument.

Demonstrație. Rezultă din faptul că

$$U_y(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, y_+\rangle - \langle x, y_-\rangle$$

este (pentru y fix) o operație regulată, ca diferență a două operații aditive și pozitive în $\mathfrak{X}$.

În mod analog

$$V_x(y) = \langle x, y\rangle = \langle x_+, y\rangle - \langle x_-, y\rangle$$

este o operație regulată în $\mathfrak{Y}$.

Teorema 1.1.5. Dacă $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{Y}_1$ sînt spații de tip (R) iar $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ le majorează respectiv, atunci, dacă P-operatorul este definit pe $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, el este (o)-bicontinuu.

Demonstrație. În baza teoremei 1.1.4 operatorul $\langle x, y\rangle$ este parțial (o)-continuu. Datorită teoremei 1.1.3 este deci suficient să arătăm că

$$(o) - \lim_n x_n = 0', \quad (o) - \lim_n y_n = 0'' \tag{1.1.7}$$

implică

$$(o) - \lim_n \langle x_n, y_n\rangle = 0. \tag{1.1.8}$$

Fie deci (1.1.7) satisfăcute. (o)-convergența în spațiile $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{Y}_1$ fiind stabile, există șirurile de numere reale $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ așa ca

$$\lambda_n \to \infty, \quad \lambda_n x_n \xrightarrow{o} 0',$$
$$\mu_n \to \infty, \quad \mu_n y_n \xrightarrow{o} 0''.$$

Mulțimile $\{\lambda_n x_n\}$ și $\{\mu_n y_n\}$ sînt atunci mărginite în $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$ respectiv. Aceste mulțimi sînt mărginite și în $\mathfrak{X}$ respectiv $\mathfrak{Y}$, deoarece aceste spații majorează spațiile $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$. Există deci $q \in \mathfrak{X}$, $s \in \mathfrak{Y}$ așa ca

$$|\lambda_n x_n| \leqslant q, \quad |\mu_n y_n| \leqslant s.$$

Din aceste inegalități deducem

$$|\langle \lambda_n x_n, \mu_n y_n \rangle| \leqslant |\langle |\lambda_n x_n|, |\mu_n y_n| \rangle \leqslant \langle q, s \rangle,$$

deci șirul

$$\{\langle \lambda_n x_n, \mu_n y_n \rangle\}$$

este mărginit în $\mathfrak{Z}$ și deci este (o)-anulabil. Avem

$$\langle x_n, y_n \rangle = \frac{1}{\lambda_n \mu_n} \langle \lambda_n x_n, \mu_n y_n \rangle \xrightarrow{o} 0,$$

ceea ce stabilește egalitatea (1.1.8).

Propozițiile analoge teoremelor 1.1.2 și 1.1.3 au loc și pentru (ρ)-continuitate. ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ fiind numai K-lineale archimediene). În plus are loc

Teorema 1.1.6. Orice P-operator $\langle x, y \rangle$ definit pe $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ este (ρ)-bicontinuu.

Demonstrație. Fie

$$|x_n - x| \leqslant \varepsilon r, |y_n - y| \leqslant \varepsilon q \qquad (n \geqslant n_\varepsilon).$$

Avem

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle| = |\langle x_n - x, y_n \rangle| = |\langle x_n - x, y \rangle +$$

$$+ \langle x_n - x, y_n - y \rangle| \leqslant \langle |x_n - x|, |y| \rangle + \langle |x_n - x|, |y_n - y| \rangle \leqslant \varepsilon v,$$

unde am notat

$$v = \langle r, |y| \rangle + \langle r, q \rangle$$

(presupunînd $\varepsilon < 1$).

De asemenea

$$|\langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x, y_n - y \rangle| \leqslant \langle |x|, |y_n - y| \rangle \leqslant \varepsilon \langle |x|, q \rangle = \varepsilon w$$

notînd

$$w = \langle |x|, q \rangle.$$

Folosind aceste rezultate, deducem

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leqslant |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leqslant \varepsilon z$$

unde am notat

$$z = v + w,$$

cu condiția ca $n \geqslant n_\varepsilon$.

Propoziția este astfel demonstrată.

Observație. Teoremele 1.1.4, 1.1.5 pot fi obținute și drept consecințe ale teoremei 1.1.6.

Teorema 1.1.7. Orice P-operator definit pe $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{Y}_1$ și satisfăcînd condiția: $y \rangle 0''$ și $x_n \searrow 0'$ implică $\langle x_n, y \rangle \searrow 0$, este (o)-continuu în primul argument.

O propoziție analogă are loc cu privire la al doilea argument.

Demonstrație. Dacă

$$x_n \xrightarrow{o} x$$

există un șir de elemente pozitive $\{u_n\}$ cu $u_n \searrow 0$, așa ca

$$|x_n - x| \leqslant u_n$$

oricare ar fi n. (o)-continuitatea P-operatorului va rezulta atunci din inegalitățile

$$|\langle x_n - x,\ y\rangle| \leqslant \langle |x_n - x|,\ |y|\rangle \leqslant \langle u_n,\ |y|\rangle. \tag{1.1.9}$$

Teorema 1.1.8. Orice P-operator definit pe $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{Y}_1$ care satisface condiția

$$x_n \xrightarrow{t} x \quad \text{implică} \quad \langle x,\ y\rangle \xrightarrow{t} \langle x,\ y\rangle.$$

pentru orice $y \in \mathfrak{Y}_1$ este (o)-continuu în primul argument. O propoziție analogă are loc cu privire la al doilea argument.

Demonstrație. Propoziția se bazează tot pe inegalitățile (1.1.9), ținînd seama că pentru șiruri monotone, (t)-convergența și (o)-convergența sînt echivalente.

In teorema următoare vom presupune că P-operatorul este definit pe $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$.

Teorema 1.1.9. Fie $\mathfrak{X}$ un K-lineal exact și majorant în $\mathfrak{X}_1$, iar $\mathfrak{Z}$ un spațiu de tip (R^*). Dacă

$$y > 0'' \text{ și } x_n \searrow 0' \text{ în } \mathfrak{X}_1,\ (x_n \in \mathfrak{X}), \text{ implică } \langle x_n,\ y\rangle \searrow 0,$$

atunci $\langle x,\ y\rangle$ este (o)-continuu în primul argument.

O propoziție analogă are loc cu privire la cel de al doilea argument.

Demonstrație. Teorema rezultă din faptul că ea are loc pentru operații aditive și pozitive de un singur argument [1], ținînd seama că

$$\langle x,\ y\rangle = \langle x,\ y_+\rangle - \langle x,\ y_-\rangle$$

este pentru orice y fix, o diferență de două operații de acest tip.

În următoarele două puncte vom deosebi unele clase remarcabile de P-operatori.

2. P-operatori disjunctivi

Vom introduce cîteva definiții privitor la comportarea unui P-operator față de elementele disjuncte.

Definiția 1.2.1. Un P-operator va fi numit *disjunctiv în primul argument* dacă

$$x_1 \perp x_2 \quad \text{implică} \quad \langle x_1,\ y_1\rangle \perp \langle x_2,\ y_2\rangle,$$

pentru orice y_1, y_2 pentru care $\langle x_1,\ y_1\rangle$ și $\langle x_2,\ y_2\rangle$ sînt definite.

În mod analog definim noțiunea de P-operator *disjunctiv în al doilea argument.*

Un P-operator disjunctiv în primul și al doilea argument va fi numit *bidisjunctiv.*

Exemple 1.2.1. Următorii P-operatori sînt bidisjunctivi.

1° Produsul $z(\tau) = x(\tau)\, y(\tau)$ pentru $x \in L^p$, $y \in L^q$, $z \in L^r$ $(1/p + 1/q = 1/r)$

2° Produsul lui Vulih.

3° P-operatorul dat de egalitatea (1.1.2) (pag. 16).

4° P-operatorul dat de egalitatea (1.1.3) (pag. 16) cu condiția ca U să fie disjunctivă.

Teorema 1.2.1. Pentru orice P-operator disjunctiv, în primul argument

$$\langle x, y\rangle_+ = \langle x_+, y\rangle,$$

$$\langle x, y\rangle_- = \langle x_-, y\rangle$$

oricare ar fi elementul $y \geqslant 0$ pentru care $\langle x, y\rangle$ este definit.

O propoziție analogă are loc cu privire la al doilea argument.

Demonstrație. Dacă $\langle x, y\rangle$ este definit, atunci

$$\langle x, y\rangle = \langle x_+, y\rangle - \langle x_-, y\rangle,$$

unde

$$\langle x_+, y\rangle \perp \langle x_-, y\rangle$$

în baza disjunctivității P-operatorului. Dacă $y \geqslant 0$, atunci

$$\langle x_+, y\rangle \geqslant 0, \quad \langle x_-, y\rangle \geqslant 0$$

și propoziția rezultă din proprietățile generale ale K-linealelor.

Teorema 1.2.2. Pentru orice P-operator disjunctiv în primul argument

$$\langle x_1 \vee x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle \vee \langle x_2, y\rangle$$

$$\langle x_1 \wedge x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle \wedge \langle x_2, y\rangle$$

pentru orice $y \geqslant 0''$ pentru care $\langle x_1, y\rangle$ și $\langle x_2, y\rangle$ sînt definite. O propoziție analogă are loc cu privire la al doilea argument.

Demonstrație. Dacă $\langle x_1, y\rangle$ și $\langle x_2, y\rangle$ există, atunci există și $\langle |x_1|, y\rangle$, $\langle |x_2|, y\rangle$ și deci și

$$\langle |x_1| + |x_2|, y\rangle.$$

Din inegalitățile

$$|x_1 \vee x_2| \leqslant |x_1| \vee |x_2| \leqslant |x_1| + |x_2|$$

rezultă existența lui $\langle x_1 \vee x_2, y\rangle$.

Fie acum $y \geqslant 0''$. Din egalitatea

$$x_1 \vee x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)_+$$

deducem

$$\langle x_1 \vee x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle (x_2 - x_1)_+, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2 - x_1, y\rangle_+ =$$

$$= \langle x_1, y\rangle + [\langle x_2, y\rangle - \langle x_1, y\rangle]_+ = \langle x_1, y\rangle \vee \langle x_1, y\rangle$$

și prima egalitate din enunțul teoremei este stabilită.

Pentru a doua egalitate se folosește formula

$$x_1 \wedge x_2 = -[(-x_1) \vee (-x_2)].$$

Corolar 1.2.3. Pentru orice P-operator bidisjunctiv pentru care $\langle x_i, y_j\rangle$ $(i, j = 1,2)$ sînt definite, unde $x_i \geqslant 0'$, $y_j \geqslant 0''$ avem

$$\langle x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \vee \langle x_1, y_2 \rangle \vee \langle x_2, y_1 \rangle \vee \langle x_2, y_2 \rangle$$

$$\langle x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \wedge \langle x_1, y_2 \rangle \wedge \langle x_2 y_1 \rangle \wedge \langle x_2, y_2 \rangle$$

Teorema 1.2.4. Pentru orice P-operator bidisjunctiv pentru care $\langle x, y \rangle$ este definit au loc egalitățile:

$$\langle x, y \rangle_+ = \langle x_+, y_+ \rangle + \langle x_-, y_- \rangle; \tag{1.2.1}$$

$$\langle x, y \rangle_- = \langle x_+, y_- \rangle + \langle x_-, y_+ \rangle; \tag{1.2.2}$$

$$|\langle x, y \rangle| = \langle |x|, |y| \rangle. \tag{1.2.3}$$

Demonstrație. Dacă $\langle x, y \rangle$ este definit, atunci putem scrie

$$\langle x, y \rangle = \langle x_+, y_+ \rangle + \langle x_-, y_- \rangle - (\langle x_+, y_- \rangle + \langle x_-, y_+ \rangle). \tag{1.2.4}$$

Avem

$$\langle x_+, y_+ \rangle \perp \langle x_+, y_- \rangle$$

$$\langle x_-, y_- \rangle \perp \langle x_+, y_- \rangle,$$

de unde

$$(\langle x_+, y_+ \rangle + \langle x_- y_- \rangle) \perp \langle x_+, y \rangle_-. \tag{1.2.5}$$

Pe de altă parte,

$$\langle x_+, y_+ \rangle \perp \langle x_-, y_+ \rangle$$

$$\langle x_-, y_- \rangle \perp \langle x_-, y_+ \rangle,$$

de unde

$$(\langle x_+, y_+ \rangle + \langle x_-, y_- \rangle) \perp \langle x_-, y_+ \rangle. \tag{1.2.6}$$

Din (1.2.5) și (1.2.6) deducem

$$(\langle x_+, y_+ \rangle + \langle x_-, y_- \rangle) \perp (\langle x_+, y_- \rangle + \langle x_-, y_+ \rangle)$$

și cum fiecare parte a acestei relații este un element pozitiv, egalitatea (1.2.4) ne arată că egalitățile (1.2.1) și (1.2.2) au loc.

Egalitatea (1.2.3.) se deduce în acest caz astfel:

$$|\langle x, y \rangle| = \langle x, y \rangle_+ + \langle x, y \rangle_- = \langle x_+, y_+ \rangle + \langle x_-, y_- \rangle +$$

$$+ \langle x_+, y_- \rangle + \langle x_-, y_+ \rangle = \langle x_+, y_+ + y_- \rangle + \langle x_-, y_+ + y_- \rangle = \langle x_+ +$$

$$+ x_-, y_+ + y_- \rangle = \langle |x|, |y| \rangle.$$

Teorema 1.2.5. Dacă $\langle x, y \rangle$ este disjunctiv și (o)-continuu în primul argument, atunci pentru orice $y \geqslant 0''$ pentru care $\langle x_n, y \rangle$ și $\langle \bigvee_{n=1}^{\infty} x_n, y \rangle$ sînt definite, are loc egalitatea

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle \bigvee_{n=1}^{\infty} x_n, y \rangle. \tag{1.2.7}$$

O propoziție analogă are loc cu privire la al doilea argument.

Demonstrație. Pentru orice n se deduce prin inducție din teorema 1.2.2, că

$$\bigvee_{i=1}^{n} \langle x_i, y \rangle = \langle \bigvee_{i=1}^{n} x_i, y \rangle.$$

Egalitatea (1.2.7) se deduce apoi prin trecere la limită.

Corolar 1.2.6. Dacă $\{x_n\}$ și $\{y_k\}$ sînt mulțimi numerabile de elemente pozitive astfel încît $\langle x_n, y_k \rangle$ să fie definite pentru orice n și k, atunci dacă P-operatorul este bidisjunctiv și parțial (o)-continuu,

$$\sup_{n,k} \langle x_n, y_k \rangle = \langle \bigvee_{n=1}^{\infty} x_n, \bigvee_{n=1}^{\infty} y_k \rangle,$$

dacă partea dreaptă a egalității există.

Vom presupune acum $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ și vom introduce următoarea

Definiție 1.2.2. P-operatorul $\langle x, y \rangle$ va fi numit *V-disjunctiv* dacă $x \perp y$ implică existența lui $\langle x, y \rangle$ și $\langle x, y \rangle = 0$.

P-operatorul $\langle x, y \rangle$ va fi numit *complet V-disjunctiv* dacă condiția $x \perp y$ este necesară și suficientă pentru existența lui $\langle x, y \rangle$ și egalitatea $\langle x, y \rangle = 0$.

Observația 1.2.1. Din definiția 1.2.2. rezultă că pentru un *P*-operator complet *V*-disjunctiv condiția $x \perp y$ este necesară și suficientă pentru existența elementelor $\langle |x|, |y| \rangle$, $\langle |y|, |x| \rangle$ și egalitățile

$$\langle |x|, |y| \rangle = \langle |y|, |x| \rangle = 0.$$

Într-adevăr avem*)

$$x \perp y \rightleftarrows \langle x, y \rangle = 0.$$

Dar $x \perp y \rightleftarrows |x| \perp |y| \rightleftarrows \langle |x|, |y| \rangle = 0$

și $x \perp y \rightleftarrows |y| \perp |x| \rightleftarrows \langle |y|, |x| \rangle = 0$

elementele $\langle x, y \rangle$, $\langle y, x \rangle$ fiind simultan definite, deoarece $x \perp y \rightleftarrows y \perp x$ și tot astfel și elementele $\langle |x|, |y| \rangle$, $\langle |y|, |x| \rangle$.

Teorema 1.2.7. Un *P*-operator *V*-disjunctiv este «pozitiv-definit» adică

$$\langle x, x \rangle \geqslant 0$$

pentru orice x pentru care $\langle x, x \rangle$ este definit.

Un *P*-operator complet *V*-disjunctiv este «strict pozitiv definit», adică

$$\langle x, x \rangle > 0$$

pentru orice $x \neq 0$ pentru care $\langle x, x \rangle$ este definit.

Demonstrație. Avem

$$\langle x, x \rangle = \langle x_+ - x_-, x_+ - x_- \rangle = \langle x_+, x_+ \rangle + \langle x_-, x_- \rangle -$$

$$- \langle x_+, x_- \rangle - \langle x_-, x_+ \rangle = \langle x_+, x_+ \rangle + \langle x_-, x_- \rangle,$$

deoarece $x_+ \perp x_-$. De aici rezultă că $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ deoarece $x_+, x_- \geqslant 0'$.

*) Prin «$\rightleftarrows$» înțelegem «este echivalent cu».

Se observă totodată că

$$\langle x, x \rangle = \langle |x|, |x| \rangle.$$

Dacă P-operatorul este complet V-disjunctiv atunci egalitatea

$$\langle x, x \rangle = 0$$

ar atrage după sine $x \perp x$, adică $x = 0'$.

Teorema 1.2.8. Dacă P-operatorul $\langle x, y \rangle$ este simetric și V-disjunctiv și dacă $\langle x, y \rangle, \langle x, x \rangle, \langle y, y \rangle$ există, atunci există și $\langle x \wedge y, x \vee y \rangle$ și are loc egalitatea

$$\langle x \wedge y, x \vee y \rangle = \langle x, y \rangle. \tag{1.2.8}$$

Demonstrație. Existența elementului

$$\langle x \wedge y, x \vee y \rangle$$

rezultă în modul următor. Din

$$|x \wedge y| \leqslant |x| \vee |y| \leqslant |x| + |y|$$

deducem mai întîi existența elementelor

$$\langle x \wedge y, x \rangle \quad , \quad \langle x \wedge y, y \rangle,$$

ținînd seama că $\langle |x| + |y|, x \rangle$ și $\langle |x| + |y|, y \rangle$ există. Mai departe vom ține seama că

$$\langle x \wedge y, |x| + |y| \rangle$$

există, și că

$$|x \vee y| \leqslant |x| \vee |y| \leqslant |x| + |y|.$$

Pentru a stabili egalitatea (1.2.8) ne vom folosi de următoarea relație care are loc în orice K-lineal:

$$[x - (x \wedge y)] \perp [y - (x \wedge y)].$$

P-operatorul fiind V-disjunctiv, există elementul

$$\langle x - (x \wedge y) \, , \, y - (x \wedge y) \rangle$$

și avem

$$0 = \langle x - (x \wedge y), y - (x \wedge y) \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, x \wedge y \rangle - \langle x \wedge y, y, \rangle +$$
$$+ \langle x \wedge y, x \wedge y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x + y, x \wedge y \rangle + \langle x \wedge y, x \wedge y \rangle =$$
$$= \langle x, y \rangle + \langle (x \wedge y) - (x + y), x \wedge y \rangle$$

folosind simetria. Pe de altă parte, în orice K-lineal

$$x + y = (x \vee y) + (x \wedge y)$$

oricare ar fi elementele x, y. De aici rezultă

$$(x \wedge y) - (x + y) = -(x \vee y)$$

și ținînd seama de egalitățile obținute mai sus vom avea

$$0 = \langle x, y \rangle + \langle (x \wedge y) - (y + x), x \wedge y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x \vee y, x \wedge y \rangle$$

care stabilește egalitatea (1.2.8).

Teorema *) 1.2.9. Pentru orice P-operator complet V-disjunctiv pentru care $\langle x_0, x_0 \rangle$ este definit, relația

$$\langle x_0, y \rangle \geqslant 0,$$

pentru orice $y \geqslant 0'$ pentru care $\langle x_0, y \rangle$ este definit, implică $x_0 \geqslant 0'$.

Demonstrație. Dacă $x_0 \not\geq 0'$ atunci $(x_0)_- \neq 0'$. Prin ipoteză

$$\langle (x_0)_+ - (x_0)_-, y \rangle \geqslant 0$$

pentru orice $y \geqslant 0$ pentru care membrul stîng există, de unde

$$\langle (x_0)_+, y \rangle \geqslant \langle (x_0)_-, y \rangle$$

pentru aceleași elemente y. Să luăm atunci $y = (x_0)_-$. P-operatorul fiind complet V-disjunctiv

$$0 = \langle (x_0)_+, (x_0)_- \rangle \geqslant \langle (x_0)_-, (x_0)_- \rangle > 0$$

ceea ce este absurd.

Corolar 1.2.10. Pentru orice P-operator complet V-disjunctiv, existența elementului $\langle x_0, x_0 \rangle$, relația

$$\langle x_0, y \rangle \geqslant 0 \tag{1.2.9}$$

pentru orice $y > 0'$ pentru care $\langle x_0, y \rangle$ este definit, și ipoteza că există cel puțin un astfel de y, pentru care $\langle x_0, y \rangle \neq 0$, implică $x_0 > 0'$.

Teorema 1.2.11. Pentru orice P-operator complet V-disjunctiv, existența elementului $\langle x_0, x_0 \rangle$ și egalitatea

$$\langle x_0, y \rangle = 0$$

pentru orice $y \geqslant 0'$ pentru care $\langle x_0, y \rangle$ este definit, implică $x_0 = 0'$.

Demonstrație. Fie

$$\langle (x_0)_+, y \rangle = \langle (x_0)_-, y \rangle \tag{1.2.10}$$

oricare ar fi $y \geqslant 0'$ pentru care $\langle x_0, y \rangle$ există. Dacă am avea $x_0 \neq 0'$ atunci cel puțin unul dintre elementele $(x_0)_+$, $(x_0)_-$ ar fi diferit de $0'$. Fie $(x_0)_+ > 0'$. Din (1.2.10) ar rezulta atunci

$$0 < \langle (x_0)_+, (x_0)_+ \rangle = \langle (x_0)_-, (x_0)_+ \rangle = 0,$$

ceea ce este absurd. Același lucru s-ar putea spune pentru $(x_0)_- > 0'$. Rezultă deci $x_0 = 0'$ și teorema este demonstrată.

Această teoremă se deduce dealtfel și ca o consecință directă a teoremei 1. 2. 9.

Corolar 1.2.12. Dacă domeniul de definiție al unui P-operator complet V-disjunctiv coincide cu suportul său, atunci egalitatea $\langle x_1, y \rangle = \langle x_2, y \rangle$ oricare ar fi $y \geqslant 0'$, implică $x_1 = x_2$.

Observația 1.2.2. Dacă pe spațiul $\mathfrak{X}$ este definit un P-operator complet V-disjunctiv, atunci $\mathfrak{X}$ este izomorf cu un subspațiu al spațiului $\mathcal{H}_r(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$.

Într-adevăr, operațiile

$$Y(x) = \langle x, y \rangle \qquad (x \in \mathfrak{X})$$

*) Propozițiile 1.2.9—1.2.12 pot fi enunțate și cu schimbarea rolurilor celor două argumente ale P-operatorului.

sînt evident regulate și corespondența

$$y \longleftrightarrow Y$$

este un izomorfism.

Observația 1.2.3. Dintre aplicațiile P-operatorilor complet V-disjunctivi, menționăm aici posibilitatea utilizării acestor P-operatori în studiul operațiilor regulate și în problema aproximării elementelor unui spațiu liniar semiordonat.

Dăm în sfîrșit cîteva teoreme care stabilesc unele relații dintre P-operatorii V-disjunctivi și cei bidisjunctivi.

Teorema 1.2.13. Dacă un P-operator este asociativ și complet V-disjunctiv, atunci el este bidisjunctiv.

Demonstrație. Fie $x_1 \perp x_2$ și y' așa ca $\langle x_1, y' \rangle$ să fie definit. Deoarece $\langle x_2, x_1 \rangle$ există și este egal cu $\mathbf{0}$, există și $\langle\langle x_2, x_1 \rangle, y' \rangle$ și în baza asociativității există și $\langle x_2, \langle x_1, y' \rangle\rangle$ și este egal cu $\mathbf{0}$. Rezultă atunci

$$x_2 \perp \langle x_1, y' \rangle.$$

Printr-un raționament analog, dacă $\langle x_2, y'' \rangle$ există, atunci

$$\langle x_1, y' \rangle \perp \langle x_2, y'' \rangle$$

și teorema este demonstrată.

Pentru P-operatori pentru care domeniul de definiție coincide cu suportul au loc următoarele două teoreme.

Teorema 1.2.14. Dacă un P-operator definit pe un K-lineal $\mathfrak{X}$ este simetric și bidisjunctiv, atunci el este și V-disjunctiv.

Demonstrație. Fie $x \perp y$. Atunci $\langle x, y \rangle \perp \langle y, x \rangle$. Cum $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$ rezultă $\langle x, y \rangle = \mathbf{0}$.

Teorema 1.2.15. Dacă un P-operator definit pe un K-lineal $\mathfrak{X}$ este simetric, strict-pozitiv-definit și bidisjunctiv, atunci el este și complet V-disjunctiv.

Demonstrație. Fie $\langle x, y \rangle = \mathbf{0}$.

În acest caz $\langle x_+, y \rangle = \langle x_-, y \rangle$ și
cum $\langle x_+, y \rangle \perp \langle x_-, y \rangle$ rezultă

$$\langle x_+, y \rangle = \langle x_-, y \rangle = \mathbf{0}.$$

Același raționament aplicat elementelor $\langle x_+, y \rangle$, $\langle x_-, y \rangle$
ne dă

$$\langle x_+, y_+ \rangle = \langle x_+, y_- \rangle = \langle x_-, y_+ \rangle = \langle x_-, y_- \rangle = \mathbf{0}.$$

Dacă pentru elemente pozitive egalitatea $\langle x, y \rangle = \mathbf{0}$ implică $x \perp y$, atunci pentru x, y oarecare egalitatea $\langle x, y \rangle = \mathbf{0}$ implică de asemenea $x \perp y$, în baza egalităților precedente.

Vom presupune deci $x, y \geqslant \mathbf{0}'$ și $\langle x, y \rangle = \mathbf{0}$. În baza următoarelor inegalități

$$\mathbf{0} \leqslant x \wedge y \leqslant x, \quad \mathbf{0} \leqslant x \wedge y \leqslant y$$

deducem

$$\mathbf{0} \leqslant \langle x \wedge y, x \wedge y \rangle \leqslant \langle x, y \rangle = \mathbf{0}.$$

P-operatorul fiind strict-pozitiv-definit, rezultă $x \wedge y = 0$, sau altfel scris, $x \perp y$.

Am arătat astfel că egalitatea $\langle x, y \rangle = 0$ implică $x \perp y$.

Invers, dacă $x \perp y$, atunci $\langle x, y \rangle = 0$, datorită teoremei precedente.

Alte considerații asupra P-operatorilor disjunctivi vor fi făcute în paragraful următor.

3. P-operatori regulați

Vom considera aici P-operatori având $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ ca domeniu de definiție și cu valori în $\mathfrak{Y}$. Astfel de P-operatori intervin în teoria ecuațiilor funcționale.

Definiția 1.3.1. Un P-operator $\langle x, y \rangle$ definit pe $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ cu valori în $\mathfrak{Y}$ va fi numit *pseudo-asociativ* dacă satisface condiția: pentru orice elemente $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$ există un element $x_{12} \in \mathfrak{X}$, așa ca

$$\langle x_{12}, y \rangle = \langle x_1, \langle x_2, y \rangle \rangle \tag{1.3.1}$$

oricare ar fi $y \in \mathfrak{Y}$.

P-operatorul $\langle x, y \rangle$ va fi numit *pseudo-simetric*, dacă satisface condiția următoare: pentru orice elemente $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$

$$\langle x_2, \langle x_1, y \rangle \rangle = \langle x_1, \langle x_2, y \rangle \rangle$$

oricare ar fi $y \in \mathfrak{Y}$.

Un element $u \in \mathfrak{X}$ va fi numit element *pseudo-neutru*, dacă pentru orice $y \in \mathfrak{Y}$, $\langle u, y \rangle = y$.

Dacă $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ și $\langle x, y \rangle$ este asociativ, atunci el este și pseudo-asociativ, deoarece se poate lua $x_{12} = \langle x_1, x_2 \rangle$.

Definția 1.3.2. Vom spune că $\langle x, y \rangle$ este *regulat* dacă este pseudo-asociativ și satisface condiției

a) $\langle x_0, y \rangle \geqslant 0''$ pentru orice $y \geqslant 0''$ implică $x_0 \geqslant 0'$.

Din această condiție rezultă deasemeni

b) $\langle x_0, y \rangle = 0''$ pentru orice $y \neq 0''$ implică $x_0 = 0'$.

Dacă P-operatorul $\langle x, y \rangle$ este regulat, atunci elementul x_{12} din egalitatea (1.3.1) este unic definit (datorită lui *b)*. Vom nota $x_{12} = [x_1, x_2]$.

Vom arăta că $[x_1, x_2]$ este un operator-produs definit în $\mathfrak{X}$ cu valori în $\mathfrak{X}$, care este asociativ.

Într-adevăr, aditivitatea în primul argument rezultă din egalitățile

$$\langle [x_1 + x_2, x_3], y \rangle = \langle x_1 + x_2, \langle x_3, y \rangle \rangle = \langle x_1, \langle x_3, y \rangle \rangle +$$

$$+ \langle x_2, \langle x_3, y \rangle \rangle = \langle [x_1, x_3], y \rangle + \langle [x_2, x_3], y \rangle = \langle [x_1, x_3] + [x_2, x_3], y \rangle$$

și consecinței *b)* a definiției 1.3.2.

Aditivitatea în al doilea argument rezultă într-un mod analog.

Pozitivitatea operatorului $[x_1, x_2]$ rezultă din pozitivitatea operatorului $\langle x_1, x_2 \rangle$ și condiția *a)* din definiția 1.3.2.

Asociativitatea rezultă din egalitățile

$$\langle [x_1, [x_2, x_3]], y \rangle = \langle x_1, \langle [x_2, x_3], y \rangle \rangle = \langle x_1, \langle x_2, \langle x_3, \langle y \rangle \rangle \rangle \rangle =$$

$$= \langle [x_1, x_2], \langle x_3, y \rangle \rangle = \langle [[x_1, x_2], x_3], y \rangle$$

și din consecința *b)* a definiției 1.3.2.

Vom numi $[x_1, x_2]$ *P-operatorul adjunct* lui $\langle x, y\rangle$. Dacă *P*-operatorul $\langle x, y\rangle$ posedă un element pseudo-neutru u, atunci acest element este un element neutru pentru *P*-operatorul $[x_1, x_2]$. Aceasta rezultă din egalitățile

$$\langle [x, u], y\rangle = \langle x, \langle u, y\rangle\rangle = \langle x, y\rangle$$

$$\langle [u, x], y\rangle = \langle u, \langle x, y\rangle\rangle = \langle x, y\rangle$$

și consecinței *b)* a definiției 1.3.2.

În sfîrșit, dacă $\langle x, y\rangle$ este regulat și pseudo-simetric, atunci $[x_1, x_2]$ este simetric.

Exemple 1°. Fie C spațiul funcțiilor continue pe un segment $[a, b]$ și S spațiul funcțiilor măsurabile pe același segment, liniarizate și ordonate în modul obișnuit. Produsul funcțional obișnuit dintre un element din C și un element din S este un *P*-operator regulat pe $C \times S$. *P*-operatorul adjunct este produsul funcțional din C.

2°. *P*-operatorul

$$\langle U, y\rangle = U(y)$$

este un *P*-operator regulat pe $\mathcal{H}_r \times \mathcal{Y}$. *P*-operatorul adjunct este

$$[U_1, U_2] = U_1[U_2]$$

definit pe $\mathcal{H}_r$.

Mai introducem încă următoarea definiție pe care o vom utiliza în partea a doua.

Definiția 1.3.3. Dacă $\mathfrak{X} \subset \mathcal{Y}$, un *P*-operator $\langle x, y\rangle$ definit pe $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ cu valori în $\mathcal{Y}$ va fi numit *complet regulat* dacă este regulat și dacă

$$[x_1, x_2] = \langle x_1, x_2\rangle.$$

4. O teoremă de aproximare

Înainte de încheierea acestui paragraf, vom stabili o teoremă de aproximare a elementelor unui spațiu liniar σ-semiordonat de tip (R^*) prin anumite combinații liniare de « produse » de elemente.

Ea este analogă unei propoziții privind închiderea produsului de funcții în spații Banach funcționale, aparținînd lui D. G. Bourgin [14].

Vom spune că o mulțime $E = \{e\}$ de elemente ale unui spațiu liniar σ-semiordonat $\mathcal{Z}$ este (o)-închisă în $\mathcal{Z}$, dacă pentru orice element $z \in \mathcal{Z}$, există un șir de combinații liniare de elemente ale lui E

$$z_n = \sum_{i=1}^{kn} \alpha_n e_i, \qquad (\alpha_i \text{ reale})$$

astfel încît

$$z_n \xrightarrow{a} z.$$

Fie $\mathfrak{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ spații l.σ-s. de tip (R^*) și fie definit pe $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ un *P*-operator arbitrar cu valori în $\mathcal{Z}$. Are atunci loc:

Teorema 1.4.1. Să presupunem că există șirurile mărginite $\{e_i\} \subset \mathfrak{X}$ și $\{f_i\} \subset \mathcal{Y}$, așa ca $\{\langle e_i, f_j\rangle\}$ să fie (o)-închis în $\mathcal{Z}$. În acest caz, dacă $\{g_k\}$ și

$\{h_l\}$ sînt (o)-închise în $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ respectiv, atunci mulțimea $\{\langle g_k, h_l\rangle\}$ este (o)-închisă în $\mathfrak{Z}$.

Demonstrație. Spațiile $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ fiind de tip (R^*), (o)-convergența în ele este echivalentă cu (o)-convergență. Dacă $\{\langle e_i, f_j\rangle\}$ este (o)-închis în $\mathfrak{Z}$, atunci pentru oricare $z \in \mathfrak{Z}$ există un regulator de convergență ρ și pentru fiecare număr $\varepsilon > 0$ un număr finit de coeficienți c_{ij} cu

$$\left| z - \sum_{ij} c_{ij} \langle e_i, f_j\rangle \right| \leqslant \varepsilon\rho, \tag{1.4.1}$$

elementul ρ nedepinzînd de ε.

De asemenea, $\{g_k\}$ și $\{h_l\}$ fiind (o)-închise în $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ respectiv, în baza teoremei asupra regulatorului comun de convergență, există $r \in \mathfrak{X}$ și $s \in Y$, astfel încît

$$\left| e_i - \sum_k \beta_k^i g_k \right| \leqslant \delta r, \tag{1.4.2}$$

$$\left| f_j - \sum_l \gamma_l^j h_l \right| \leqslant \delta s. \tag{1.4.3}$$

unde δ este arbitrar iar $\{\beta_k^i\}$, $\{\gamma_l^j\}$ convenabil alese.

Avem mai departe

$$z_{ij} = |\langle e_i, f_j\rangle - \sum_{kl} \beta_k^i \gamma_l^j \langle g_k, h_l\rangle| \leqslant |\langle e_i, f_j - \sum_l \gamma_l^j h_l\rangle| + |\langle e_i -$$

$$- \sum_k \beta_k^i g_k, \sum_l \gamma_l^j h_l\rangle| \leqslant \langle |e_i|, |f_j - \sum_l \gamma_l^j h_l| \rangle + \langle |e_i - \sum_k \beta_k^i g_k|, |\sum_l \gamma_l^j h_l| \rangle.$$

Pe de altă parte există f, așa ca $|f_j| \leqslant f$ și avem, folosind (1.4.3),

$$|\sum_l \gamma_l^j h_l| \leqslant |f_j| + |f_j - \sum_l \gamma_l^j h_l| \leqslant |f_j| + \delta s \leqslant f + \delta s.$$

Există de asemenea e, așa ca $|e_i| \leqslant e$. Deducem atunci

$$z_{ij} \leqslant \langle e, \delta s\rangle + \langle \delta r, f + \delta s\rangle = \delta(\langle e, s\rangle + \langle r, f\rangle + \delta\langle r, s\rangle)$$

folosind și (1.4.2). Dacă considerăm $\delta < 1$ și notăm

$$\rho^* = \langle e, s\rangle + \langle r, f\rangle + \langle r, s\rangle,$$

vom avea deci

$$z_{ij} \leqslant \delta\rho^*.$$

Să notăm acum cu

$$\delta_{kl} = \sum_{ij} c_{ij} \beta_k^i \gamma_l^j.$$

Avem

$$|z - \sum_{kl} \delta_{kl} \langle g_k, h_l\rangle| \leqslant |z - \sum_{ij} c_{ij} \langle e_i, f_j\rangle| + |\sum_{ij} c_{ij} [\langle e_i, f_j\rangle -$$

$$- \sum_{kl} \beta_k^i \gamma_l^j \langle g_k, h_l\rangle]| \leqslant \varepsilon\rho + \left(\sum_{ij} |c_{ij}|\right) \delta\rho^*.$$

Dacă alegem δ în așa fel ca

$$\delta \leqslant \min\left(1, \varepsilon / \sum_{ij} |\alpha_{ij}|\right)$$

și notăm

$$w = \varrho + \varrho^*,$$

vom obține

$$|z - \sum_{kl} \delta_{kl} \langle g_k, h_l \rangle| \leqslant \varepsilon w$$

cu ε arbitrar, iar w fix nedepinzînd de ε.

Teorema este astfel demonstrată.

§ 2. OPERATORI-PRODUS ÎN SPAȚII CU UNITATE

În acest paragraf vom da unele proprietăți ale P-operatorilor legate de existența într-un K-spațiu a unui element unitate. Vom nota baza unui K-spațiu cu unitate $\mathfrak{X}$, prin $\mathfrak{X}_u$.

1. P-operatori disjunctivi în K-spații cu unitate

Vom presupune că $\mathfrak{X}$ este un K-spațiu cu unitate $\mathbf{1}$ și că în $\mathfrak{X}$ este definit un operator-produs $\langle x, y \rangle$ cu valori într-un K-spațiu $\mathfrak{Y}$ arbitrar. Vom nota în acest punct prin $\mathbf{0}$ elementul nul al lui $\mathfrak{X}$ și prin $\overline{0}$ elementul nul al lui $\mathfrak{Y}$.

Vom presupune că pentru orice $x \in \mathfrak{X}$, $\langle x, \mathbf{1} \rangle$ este definit. În acest caz $\langle x, y \rangle$ are sens pentru orice element y mărginit. Vom nota

$$\overline{x} = \langle x, \mathbf{1} \rangle.$$

Teorema 2.1.1. Au loc următoarele propoziții *):

1) Dacă P-operatorul este V-disjunctiv, atunci pentru orice $e \in \mathfrak{X}_u$

$$\langle e, e \rangle = \overline{e}. \tag{2.1.1}$$

Dacă el este chiar complet V-disjunctiv, atunci

$$\langle f, f \rangle = \overline{f} \rightleftarrows f \in \mathfrak{X}_u.$$

2) Dacă P-operatorul este V-disjunctiv, atunci

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \overline{e_1 \wedge e_2}.$$

3) Dacă P-operatorul este complet V-disjunctiv, atunci corespondența $x \to \overline{x}$ este un izomorfism liniar și o izotonie între $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y} = (\mathfrak{X}, \mathbf{1})$ adică **)

a) corespondența este biunivocă;

b) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$;

c) $\overline{\alpha x} = \alpha \overline{x}$ (α real);

d) $x > \mathbf{0}$ implică $\overline{x} > \overline{0}$.

*) Această teoremă are loc de altfel și pentru K-lineale archimediene.

**) Am notat prin $(\mathfrak{X}, \mathbf{1})$ mulțimea $\{\langle x, \mathbf{1} \rangle \, x \in \mathfrak{X}\}$.

Demonstrație. 1) Avem

$$\mathbf{0} = \langle e, \mathbf{1} - e \rangle = \langle e, \mathbf{1} \rangle - \langle e, e \rangle = \bar{e} - \langle e, e \rangle$$

care stabilește egalitatea 2.1.1.

Dacă P-operatorul este complet V-disjunctiv, atunci dacă

$$\bar{f} = \langle f, f \rangle$$

rezultă

$$\bar{\mathbf{0}} = \bar{f} - \langle f, f \rangle = \langle f, \mathbf{1} - f \rangle,$$

ceea ce arată că $f \perp (\mathbf{1} - f)$, adică $f \in \mathfrak{X}_u$.

2) Dacă $e_1 \leqslant e_2$, atunci

$$\overline{e_1 \wedge e_2} = \langle e_1 \wedge e_2, \mathbf{1} \rangle = \langle e_1, \mathbf{1} \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_1, \mathbf{1} - e_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle,$$

deoarece $e_1 \perp (\mathbf{1} - e_2)$.

Fie e_1 și e_2 elemente unitare oarecare. Atunci

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_1 \wedge e_2 \rangle + \langle e_1, e_2 - (e_1 \wedge e_2) \rangle.$$

Al doilea termen din membrul al doilea este nul, deoarece

$$e_1 \perp [e_2 - (e_1 \wedge e_2)],$$

iar primul este egal cu $e_1 \wedge e_2$, conform celor preccedente.

3) Dacă

$$\langle x, \mathbf{1} \rangle = \langle y, \mathbf{1} \rangle,$$

atunci

$$\langle x - y, \mathbf{1} \rangle = \mathbf{0} \to (x - y) \perp \mathbf{1} \to x = y,$$

ceea ce arată că corespondența este univalentă și deci biunivocă.

Egalitățile $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$ și $\overline{\alpha x} = \alpha \bar{x}$ rezultă în baza proprietăților oricărui P-operator.

Dacă $x > \mathbf{0}$, în baza pozitivității P-operatorului, $\langle x, \mathbf{1} \rangle \geqslant \mathbf{0}$.

Semnul egal nu poate avea loc, deoarece ar rezulta $x \perp \mathbf{1}$, ceea ce este imposibil, $\mathbf{1}$ fiind elementul unitate.

Cele trei propoziții sînt astfel stabilite.

Fie $\mathfrak{X}_s$ mulțimea elementelor simple ale spațiului $\mathfrak{X}$, adică a elementelor de forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \qquad (e_i \in \mathfrak{X}_u, \lambda_i \text{ reale}).$$

Din teorema 2.1.1. rezultă că dacă $\langle x, y \rangle$ este V-disjunctiv, atunci

$$\langle x, y \rangle = \overline{\sum_{ij} \lambda_i \mu_j e_i \wedge e_j} = \overline{x \cdot y} \quad \text{pentru } x, y \in \mathfrak{X}_s,$$

cu notații evidente.

Să presupunem acum că $\langle x, y \rangle$ este un P-operator V-disjunctiv și parțial (o)- continuu. Fie x și y elemente arbitrare ale lui $\mathfrak{X}$, așa ca $\langle x, y \rangle$ să existe. Există atunci șirurile de elemente simple $\{x_n\}$, $\{y_k\}$, așa ca $x_n \xrightarrow{o} x$ și $y_k \xrightarrow{o} y$, iar, $\{x_n\, y_k\}$ formează un șir mărginit în n și k separat. După cum am văzut

$$\langle x_n, y_k \rangle = \langle x_n \cdot y_k, \mathbf{1} \rangle.$$

De aici

$$\langle x, y_k\rangle = (o) - \lim_n \langle x_n, y_k\rangle = (o) - \lim_n \langle x_n y_k, \mathbf{1}\rangle = \langle (o) - \lim_n x_n y_k, \mathbf{1}\rangle = \langle x \cdot y_k, \mathbf{1}\rangle.$$

Mai departe,

$$\langle x, y\rangle = (o) - \lim_K \langle x, y_k\rangle = \langle (o) - \lim_K x \cdot y_k, \mathbf{1}\rangle = \langle x \cdot y, \mathbf{1}\rangle$$

în cazul cînd $x \cdot y$ există. În plus, dacă $x \cdot y$ există, în baza proprietăților produsului lui Vulih $y \cdot x$ există și $xy = yx$. Deci dacă $\langle y, x\rangle$ este definit, atunci $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$.

Putem deci enunța

Teorema 2.1.2. Dacă $\langle x, y\rangle$ este un P-operator V-disjunctiv și parțial (o)-continuu astfel ca $\langle x, \mathbf{1}\rangle$ să fie definit pentru orice x, atunci ori de cîte ori $\langle x, y\rangle$ și $x \cdot y$ există

$$\langle x, y\rangle = \langle x \cdot y, \mathbf{1}\rangle. \tag{2.1.2}$$

Dacă $\langle x, y\rangle$ este definit peste tot pe $\mathfrak{X}$, atunci el este simetric și avem totodată și

$$\langle x, y\rangle = \langle \mathbf{1}, x \cdot y\rangle.$$

Să punem acum

$$U(x) = \langle x, \mathbf{1}\rangle.$$

Atunci U va fi o operație pozitivă și (oo)-liniară de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{Y}$.

Reciproc, $U(x \cdot y)$ este un P-operator V-disjunctiv și parțial (o)-continuu (a se vedea exemplele 1.1.2). Dacă $\mathfrak{X}$ este un K-spațiu lărgit sau de elemente mărginite, atunci egalitatea (2.1,2) va avea totdeauna loc. Putem deci enunța

Teorema 2.1.3. Forma generală a unui P-operator V-disjunctiv și parțial (o)-continuu definit pe un K-spațiu lărgit sau de elemente mărginite $\mathfrak{X}$ este

$$\langle x, y\rangle = U(x \cdot y),$$

unde U este o operație pozitivă și (oo)-liniară pe $\mathfrak{X}$.

Observația 2.1.1. Din teorema 2.1.3. rezultă că dacă pe un K-spațiu lărgit $\mathfrak{X}$ este definit un P-operator $\langle x, y\rangle$ cu valori în $\mathfrak{X}$ care este V-disjunctiv și parțial (o)-continuu și satisface condiția: $\langle x, \mathbf{1}\rangle = x$ pentru orice x, atunci el coincide cu produsul lui Vulih.

În [46] se indică că același lucru are loc în condiția că P-operatorul (fără a fi V-disjunctiv și parțial (o)-continuu) are $\mathbf{1}$ ca element neutru: $\langle x, \mathbf{1}\rangle = \langle \mathbf{1}, x\rangle = x$ pentru orice x, și este asociativ.

Observația 2.1.2. Să considerăm P-operatorul definit prin

$$\langle x, y\rangle = V(x) \cdot V(y), \tag{2.1.3}$$

unde V este o operație pozitivă (oo)-liniară și disjunctivă de la K-spațiul $\mathfrak{X}$ la K-spațiul $\mathfrak{Y}$, unde $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt lărgite sau de elemente mărginite. Atunci P-operatorul (2.1.3) este V-disjunctiv și (o)-bicontinuu și deci

$$\langle x, y\rangle = U(x \cdot y) = \langle x y, \mathbf{1}\rangle,$$

unde U este pozitivă și (oo)-liniară.

Cum

$$U(x) = V(x) \cdot V(\mathbf{1}),$$

vom avea

$$V(x) \cdot V(y) = V(x \cdot y) \cdot V(\mathbf{1}).$$

2. V-produse

Am amintit mai înainte că într-un K-spațiu cu unitate se poate introduce noțiunea de produs între elementele spațiului (pentru anumite perechi) fără lărgirea sistemului de axiome. Acest lucru a fost arătat de B. Z. Vulih [8], [3], care a dat o metodă directă de introducere a acestui produs. Produsul lui Vulih se bucură de o mulțime de proprietăți asemănătoare proprietăților produsului numerelor reale, și în consecință are va iate aplicații.

Inițial [8] B. Z. Vulih a introdus noțiunea de produs folosind numerele transfinite, în particular reprezentarea unui element pozitiv printr-o serie transfinită de elemente simple. Ulterior el dă o definiție echivalentă *) folosind reprezentarea unui element pozitiv x ca margine superioară a mulțimii elementelor simple inferioare lui x. Produsul lui Vulih se poate introduce și prin utilizarea mulțimilor numerabile și (o)-limitelor lor. **)

În sfîrșit o altă metodă de introducerea produsului este cea bazată pe anumite reprezentări ale spațiilor (L. V. Kantorovici [1], B. Z. Vulih [2]).

În acest punct ne vom ocupa de problema extinderii produsului lui Vulih pentru elemente ce aparțin la spații diferite, cu alte cuvinte construirea unui operator-produs care să posede toate proprietățile fundamentale ale produsului lui Vulih, cu excepția celor ce sînt legate de identitatea spațiilor $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}$ (comutativitate, asociativitate, element neutru). În particular vom cere ca produsul a două elemente unitare să fie un element unitar; pentru orice pereche de elemente mărginite produsul să existe și să fie un element mărginit.

În construirea acestui operator-produs nu vom ține însă seamă de existența produsului lui Vulih în $\mathfrak{Z}$. Produsul lui Vulih va fi obținut ca un caz particular definit prin metoda mulțimilor numerabile și (o)-limitelor [15].

Fie $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ K-spații cu unitate și $1'$, $1''$, 1 elementele unitate respective.

Definiția 2.2.1. Un operator-produs avînd $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ ca suport și cu valori în $\mathfrak{Z}$ va fi numit un *V-produs*, dacă posedă proprietățile ***).

I. Dacă $e\in\mathfrak{X}_u$ și $f\in\mathfrak{Y}_u$, atunci $g=\langle e, f\rangle$ este definit și $g\in\mathfrak{Z}_u$.

II. Pentru orice $g\in\mathfrak{Z}_u$ nenul există $e\in\mathfrak{X}_u$ și $f\in\mathfrak{Y}_u$, așa ca

$$0<\langle e, 1''\rangle\leqslant g,\quad 0<\langle 1', f\rangle\leqslant g.$$

În particular va rezulta că există e, f, așa ca $0<\langle e, f\rangle\leqslant g$.

III. $\langle 1', 1''\rangle=1$ și $\langle e, 1''\rangle>0$, $\langle 1', f\rangle>0$ oricare ar fi $e>0'$, $f>0''$ (e, f unitare).

În particular va rezulta că dacă ****) $x\in\mathfrak{X}_b$ și $y\in\mathfrak{Y}_b$, atunci $z=\langle x, y\rangle$ este definit și $z\in\mathfrak{Z}_b$.

IV. Este bidisjunctiv.

În particular va rezulta că

$$\langle x, y\rangle_+=\langle x_+, y_+\rangle+\langle x_-, y_-\rangle;\quad \langle x, y\rangle_-=\langle x_+, y_-\rangle+\langle x_-, y_+\rangle;$$

$$|\langle x, y\rangle|=\langle |x|, |y|\rangle.$$

*) Această definiție am amintit-o în „Preliminarii".

**) Acest lucrul l-am arătat în [15].

***) Nu punem aici problema independenței acestor proprietăți.

****) Prin $\mathfrak{X}_b$ notăm mulțimea elementelor mărginite din $\mathfrak{X}$.

V. Dacă $\langle x, y \rangle$ este definit și $e \in \mathfrak{X}_u$, $f \in \mathfrak{Y}_u$ atunci dacă *) $g = \langle e, f \rangle$

$$(g) \langle x, y \rangle = \langle (e)\, x, (f)\, y \rangle .$$

VI. Este (mo)-continuu.

În consecință, $\langle x, \mathbf{0}'' \rangle$ și $\langle \mathbf{0}', y \rangle$ vor exista pentru orice x și y (și vor fie egale cu $\mathbf{0}$).

Din definiție rezultă că

$$U(x) = \langle x, \mathbf{1}'' \rangle$$

este o operație de la $\mathfrak{X}_b$ la $\mathfrak{X}_b$, pozitivă, (oo)-liniară, aplică elemente unitare în elemente unitare și satisface condițiile:

pentru orice $g \in \mathfrak{Z}_u$ nenul există $e \in \mathfrak{X}_u$, așa ca $\mathbf{0} < U(e) \leqslant g$; $e > \mathbf{0}$ implică $U(e) > \mathbf{0}$; $U(\mathbf{1}') = \mathbf{1}$.

Primele trei proprietăți arată că U este o operație liniar-multiplicativă în sensul lui Vulih. Celelalte condiții sînt verificate de exemplu dacă operația U este inversibilă și $U(\mathfrak{X}_b) = \mathfrak{Y}_b$.

Același lucru se poate spune relativ la operația

$$T(y) = \langle \mathbf{1}', y \rangle$$

definită pe $\mathfrak{Y}_b$ cu valori în $\mathfrak{Z}_b$.

Pentru ca un V-produs să fie definit în $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, este deci necesar ca pe subspațiile $\mathfrak{X}_b$, $\mathfrak{Y}_b$ să fie definite cîte o operație U, T cu valori în $\mathfrak{Z}_b$ satisfăcînd condițiilor indicate. Reciproc, dacă pe $\mathfrak{X}_b$ și $\mathfrak{Y}_b$ sînt definite astfel de operații cu valori în $\mathfrak{Z}_b$, atunci în $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ este definit un V-produs cu valori în $\mathfrak{Z}$. Vom arăta acest lucru construind efectiv acest produs.

Vom nota

$$\bar{x} = U(x), \quad \bar{y} = T(y).$$

Vom nota elementele din $\mathfrak{X}_u$, $\mathfrak{Y}_u$, $\mathfrak{Z}_u$ respectiv prin literele e, f, g.

Definiția 2.2.2. Dacă $x \in \mathfrak{X}_u$, $y \in \mathfrak{Y}_u$ și

$$x = \sum_i \alpha_i e_i \quad , \quad y = \sum_j \beta_j \bar{f}_j$$

vom numi V-produs al elementelor x și y, elementul

$$\langle x, y \rangle = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j \bar{e}_i \wedge \bar{f}_j . \tag{2.2.1}$$

În particular pentru, elemente unitare

$$\langle e, f \rangle = \bar{e} \wedge \bar{f} .$$

Din egalitatea (22..1) deducem

$$\langle x, y \rangle = \sum_i \alpha_i (\bar{e}_i)\, \bar{y} = \sum_j \beta_j (\bar{f}_j)\, \bar{x} . \tag{2.2.2}$$

*) Vom nota prin (e) proectorul generat de elementul e, adică operația definită prin: $(e)\, x = \sup_n [(ne) \wedge x]$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Într-adevăr,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j (\bar{e}_j) \bar{f}_j = \sum_i \alpha_i \sum (\bar{e}_i) \overline{\beta_j f_j} = \sum_i \alpha_i (\bar{e}_i) \overline{\sum_i \beta_j f_j} = \sum_i \alpha_i (\bar{e}_i) \bar{y}$$

și în mod analog se stabilește cealaltă egalitate.

Egalitățile (2.2.2) arată că V-produsul nu depinde de modul de reprezentare al elementelor simple.

Din definiția 2.2.2 și egalitățile (2.2.1), (2.2.2) se deduce imediat că V-produsul pe $\mathfrak{X}_s \times \mathfrak{Y}_s$ are sens pentru orice elemente, este un operator-produs și satisface condițiile I, II, III, IV din definiția 2.2.1.

Vom extinde acum V-produsul pentru elemente mărginite. Pentru aceasta vom ține seama de următoarea propoziție, care are loc în orice K-spațiu cu unitate.

Pentru orice element $x \in \mathfrak{X}_b$ există un șir de elemente simple $\{x_n\}$, astfel încît $x_n \overset{o}{\to} x$ în $\mathfrak{X}_b$.

Această propoziție ne spune în același timp că $x_n \overset{o}{\to} x$ în $\mathfrak{X}$ și există ξ real, așa ca $|x_n| \leqslant \xi \mathbf{1}$ pentru orice n.

Vom spune că $\{x_n\}$ este un *șir aproximant* al lui x.

L e m a 2.2.1. Dacă $x \in \mathfrak{X}_b$, $y \in \mathfrak{Y}_b$ iar $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ sînt șiruri aproximante ale lui x și y respectiv, atunci există

$$(o)\text{-}\lim_n \langle x_n, y_n \rangle$$

în $\mathfrak{Z}_b$.

D e m o n s t r a ț i e. Dacă $x' \in \mathfrak{X}_u$ și $y' \in \mathfrak{Y}_u$, atunci

$$\langle |x', y'\rangle| = \langle |x'|, |y'| \rangle$$

egalitate care se stabilește imediat. Folosind aceasta avem

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_m, y_m\rangle| \leqslant |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y_m\rangle| + |\langle x_n, y_m\rangle - \langle x_m, y_m\rangle| =$$

$$= |\langle x_n, y_n - y_m\rangle| + |\langle x_n - x_m, y_m\rangle| \leqslant \langle |x_n|, |y_n -$$

$$- y_m| \rangle + \langle |x_n - x_m|, |y_m| \rangle.$$

Ținînd acum seama că există ξ și η reale așa ca $|x| \leqslant \xi \mathbf{1}'$ și $|y| \leqslant \eta \mathbf{1}'$ putem scrie

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_m, y_m\rangle| \leqslant \xi \langle \mathbf{1}', |y_n - y_m| \rangle + \eta \langle |x_n - x_m|, \mathbf{1}'' \rangle =$$

$$= \xi |\overline{y_n - y_m}| + \eta |\overline{x_n - x_m}|.$$

De aici rezultă

$$(o)\text{-}\lim_p [\sup_{n,m \geqslant p} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_m, y_m\rangle|] = 0 \text{ (în } \mathfrak{Z}_b),$$

de unde, $\mathfrak{Z}_b$ fiind un K-spațiu și deci (o)-complet, există

$$(o)\text{-}\lim_n \langle x_n, y_n \rangle \in \mathfrak{Z}_b$$

și lema este demonstrată.

Lema 2.2.2. Dacă $\{x'_n\}$ și $\{x''_n\}$ sînt șiruri aproximante ale lui x, iar $\{y_n\}$ și $\{y'_n\}$ șiruri aproximante ale lui y, atunci

$$(o)\text{-}\lim_n \langle x_n, y_n\rangle = (o)\text{-}\lim_n \langle x'_n, y'_n\rangle.$$

Demonstrație. Fie ξ' așa ca $|x'_n| \leqslant \xi \mathbf{1}'$ și η așa ca $|y'_n| \leqslant \eta \mathbf{1}''$. Avem

$$|\langle x_n, y_n\rangle| - \langle x'_n, y'_n\rangle \leqslant |\langle x_n, y_n\rangle, -\langle x'_n, y_n\rangle| + |\langle x'_n, y_n\rangle -$$

$$-\langle x'_n, y'_n\rangle| = \langle |x_n - x'_n|, y_n|\rangle + \langle |x'_n|, |y_n - y'_n|\rangle \leqslant \eta \langle |x_n -$$

$$-x'_n|, \mathbf{1}''\rangle + \xi' \langle \mathbf{1}' | y_n - y'_n|, \mathbf{1}''\rangle = \eta |\overline{x_n - x'_n}| + \xi' |\overline{y_n - y'_n}|.$$

de unde rezultă

$$(o)\text{-}\lim_n |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x'_n, y'_n\rangle| = \mathbf{0}.$$

Lema este astfel demonstrată.

În baza lemelor 2.2.1 și 2.2.2 introducem

Definiția 2.2.3. Fie $x \in \mathfrak{X}_b$ și $y \in \mathfrak{Y}_b$. Vom numi V-produs al elementelor x și y elementul

$$\langle x, y\rangle = (o)\text{-}\lim_n \langle x_n, y_n\rangle \qquad (\text{în } \mathfrak{Z}_b)$$

unde $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ sînt șiruri aproximante ale lui x și y respectiv.

Teorema 2.2.3. V-produsul definit pe $\mathfrak{X}_b \times \mathfrak{Y}_b$ cu valori în $\mathfrak{Z}_b$ este un operator-produs și are următoarele proprietăți :

1. este bidisjunctiv ;
2. $g = \langle e, f\rangle$ implică (g) $\langle x, y\rangle = \langle (e)\, x, (f)\, y\rangle$, ($e, f, g$ unitare) ;
3. este (o)-bicontinuu.

Demonstrație. Numai ultima proprietate necesită o demonstrație, celelalte fiind imediate, deoarece se bazează pe faptul că șirurile aproximante pot fi alese în mod convenabil.

Pentru ultima proprietate vom folosi inegalitatea

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \leqslant |\langle |x|, |y - y_n|\rangle + \langle |x - x_n|, |y_n|\rangle. \qquad (2.2.3)$$

Șirul $\{y_n\}$ fiind (o)-convergent în $\mathfrak{Y}_b$ există η real, astfel ca $|y_n| \leqslant \eta \mathbf{1}''$. Fie de asemenea ξ real, astfel ca $|x| \leqslant \xi \mathbf{1}'$. Inegalitatea (2.2.3) ne dă atunci

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \leqslant \xi \langle \mathbf{1}', |y - y_n|\rangle + \eta \langle |x - x_n|, \mathbf{1}''\rangle =$$

$$= \xi |\overline{y - y_n}| + \eta |\overline{x - x_n}|,$$

ceea ce arată că $\langle x_n, y_n\rangle \xrightarrow{o} \langle x, y\rangle$, deoarece operațiile U și T sînt (oo)-lineare.

În teorema următoare prin $S(x)$ vom înțelege mulțimea definită în « Preliminarii » (la pag. 5).

Teorema 2.2.4. Pentru orice elemente pozitive $x \in \mathfrak{X}_b$, $y \in \mathfrak{Y}_b$

$$\langle x, y\rangle = \sup_{\substack{x^* \in S(x) \\ y^* \in S(y)}} \langle x^*, y^*\rangle. \qquad (2.2.4)$$

Demonstrație. Pentru stabilirea egalității (2.2.4) este suficient să demonstrăm că

$$\langle x, y\rangle = \sup_{x^* \in S(x)} \langle x^*, y\rangle.$$

Vom observa mai întîi că

$$\sup_{x^* \in S(x)} \langle x^*, y\rangle \leqslant \langle x, y\rangle,$$

deoarece oricare ar fi $x^* \in S(x)$, $\langle x^*, y\rangle \leqslant \langle x, y\rangle$.

Pentru a stabili inegalitatea de sens contrar, vom observa mai departe că există șirul $\{x_n^*\} \subset S(x)$, astfel încît $x_n^* \xrightarrow{o} x$ în $\mathfrak{X}_b$.

Din inegalitatea

$$\langle x_n^*, y\rangle \leqslant \sup_{x^* \in S(x)} \langle x^*, y\rangle \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

deducem

$$\langle x, y\rangle = (o)\text{-}\lim_n \langle x_n^*, y\rangle \leqslant \sup_{x^* \in S(x)} \langle x^*, y\rangle,$$

care completează demonstrația teoremei.

Vom trece acum la definirea V-produsului pentru elemente nemărginite.

Definiția 2.2.4. Fie $x \in \mathfrak{X}$ și $y \in \mathfrak{Y}$ elemente pozitive dar arbitrare, $x_n' = x \wedge n\,\mathbf{1}'$, $y_n' = y_n' \wedge n\,\mathbf{1}''$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dacă șirul $\{\langle x_n, y_n'\rangle\}$ este mărginit, vom numi V-produs al elementelor x și y elementul

$$\langle x, y\rangle = (o)\text{-}\lim_n \langle x_n', y_n'\rangle = \sup_n \langle x_n', y_n'\rangle.$$

În caz contrar vom spune că V-produsul elementelor x și y nu există.

Dacă x și y sînt elemente arbitrare, vom numi V-produsul lor elementul

$$\langle x, y\rangle = \langle x_+, y_+\rangle + \langle x_-, y_-\rangle - \langle x_+, y_-\rangle - \langle x_-, y_+\rangle,$$

dacă fiecare termen există. În caz contrar vom spune că produsul elementelor x și y nu există.

Teorema 2.2.5. V-produsul definit în $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ prin definiția 2.2.4 este un V-produs în sensul definiției 2.2.1.

Demonstrație. Vom arăta mai întîi că V-produsul introdus prin deifnția 2.2.4 este un operator-produs.

Pozitivitatea este evidentă.

Să arătăm acum biaditivitatea sa. Vom presupune mai întîi x_1, x_2, y pozitive. Avem pentru elemente mărginite (cu notațiile din definiția 2.2.4).

$$\langle x_{1n}' + x_{2n}', y_n'\rangle = \langle x_{1n}', y_n'\rangle + \langle x_{2n}', y_n'\rangle.$$

Elementele x_1 și x_2 fiind pozitive, avem

$$(x_1 + x_2)_n' = (x_1 + x_2) \wedge n\,\mathbf{1}' \leqslant (x_1 \wedge n\,\mathbf{1}') + (x_2 \wedge n\,\mathbf{1}') = x_{1n}' + x_{2n}',$$

de unde

$$\langle (x_1 + x_2)_n', y_n'\rangle \leqslant \langle x_{1n}', y_n'\rangle + \langle x_{2n}', y_n'\rangle.$$

Deoarece limita în partea dreaptă a acestei inegalități există, ea există și în partea stîngă și avem

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle \leqslant \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle.$$

Pe de altă parte,

$$\langle x'_{1n}, y'_n\rangle + \langle x'_{2n}, y'_n\rangle = \langle x'_{1n} + x'_{2n}, y'_n\rangle \leqslant \langle x_1 + x_2, y\rangle,$$

datorită existenței lui $\langle x_1 + x_2, y\rangle$ și a pozitivității acestei operații. Prin trecere la limită obținem

$$\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle \leqslant \langle x_2 + x_2, y\rangle,$$

ceea ce stabilește aditivitatea în primul argument pentru elementele pozitive. Aditivitatea în al doilea argument se stabilește în mod analog.

Normalitatea operației este evidentă.

În baza teoremei 1.1.1, capitolul I, V-produsul introdus prin definiția 2.2.4 este un operator-produs.

Să arătăm acum că el posedă proprietățile din definiția 2.2.1.

Proprietățile I, II, III au fost stabilite anterior. Pentru celelalte avem

IV. Fie $x_1 \perp x_2$. Atunci, dacă $x_1, x_2 > 0'$, $x'_{1n} \perp x'_{2n}$ și deci pentru y_1, y_2 oarecari

$$\langle x'_{1n}, y'_{1n}\rangle \perp \langle x'_{2n}, y'_{2n}\rangle.$$

Dacă $\langle x_1, y_1\rangle$ și $\langle x_2, y_2\rangle$ sînt definite, atunci prin trecerea la limită

$$\langle x_1, y_1\rangle \perp \langle x_2, y_2\rangle.$$

Dacă x_1 și x_2 sînt oarecari, atunci $(x_1)_+ \perp (x_2)_+$, $(x_1)_- \perp (x_2)_-$, $(x_1)_+ \perp (x_2)_-$, $(x_1)_- \perp (x_2)_+$ și avem

$$\langle (x_1)_+, y_1\rangle \perp \langle (x_2)_+, y_2\rangle; \quad \langle x_1)_+, y_1\rangle \perp \langle (x_2)_-, y_2\rangle;$$

$$\langle (x_1)_-, y_1)\rangle \perp \langle (x_2)_+, y_2\rangle; \quad \langle (x_1)_-, y_1\rangle \perp \langle (x_2)_-, y_2\rangle.$$

Din primele două deducem

$$\langle (x_1)_+, y_1\rangle \perp [\langle (x_2)_+, y_2\rangle - \langle (x_2)_-, y_2\rangle] = \langle x_2, y_2\rangle,$$

iar din celelalte două, de asemenea

$$\langle (x_1)_-, y_1\rangle \perp \langle x_2, y_1\rangle.$$

Rezultă atunci

$$\langle (x_1)_+, y_1\rangle - \langle (x_1)_-, y_1\rangle = \langle x_1, y_1\rangle \perp \langle x_2, y_2\rangle,$$

ceea ce stabilește disjunctivitatea în primul argument. Disjunctivitatea în al doilea argument rezultă în același mod.

V. Pentru x și y pozitive rezultă din egalitatea

$$(g)\ \langle x'_n,\ y'_n\rangle = \langle (e)\ x'_n,\ (f)\ y'_n\rangle$$

prin trecerea la limită ținînd seama că

$$[(e)\ x] \wedge n\mathbf{1}' = (e)\,[x \wedge n\mathbf{1}'],\ [(f)\ y] \wedge n\mathbf{1}'' = (f)\,[y \wedge n\mathbf{1}''].$$

Dacă x și y sînt oarecari vom folosi egalitatea

$$\langle x,\ y\rangle = \langle x_+,\ y_+\rangle + \langle x_-,\ y_-\rangle - \langle x_+,\ y_-\rangle - \langle x_-,\ y_+\rangle$$

și proprietatea de aditivitate a proiectorilor.

VI. *a*) Vom arăta mai întîi că dacă $x_n \xrightarrow{o} \mathbf{0}'$, $|y_n| \leqslant y_0$ iar $\langle x_n,\ y_n\rangle$ există pentru orice n și formează un șir mărginit, atunci

$$\langle x_n,\ y_n\rangle \xrightarrow{o} \mathbf{0}.$$

Fie $g \in \mathfrak{Z}_u$. Există $f \in \mathfrak{Y}_u$, așa ca

$$\mathbf{0} < \langle \mathbf{1}',\ f\rangle \leqslant g.$$

Fie $f' \leqslant f$ și β real, astfel încît

$$(f')\ y_0 \leqslant \beta f'.$$

Există $e \in \mathfrak{X}_u$, așa ca

$$\mathbf{0} < \langle e,\ \mathbf{1}''\rangle \leqslant \langle \mathbf{1}',\ f'\rangle \leqslant \langle \mathbf{1}',\ f\rangle \leqslant g.$$

Fie $e' \leqslant e$, astfel ca

$$(e')\ |x_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{\beta}\, e' \qquad (n \geqslant n_0(\varepsilon)).$$

Dar după, cum se poate verifica (în baza lui V)

$$\langle e',\ f'\rangle = \langle e',\mathbf{1}''\rangle,$$

și deci

$$\mathbf{0} < \langle e',\ f'\rangle \leqslant g.$$

Avem în acest caz pentru $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, notînd $g' = \langle e',\ f'\rangle$,

$$(g')\ \langle |x_n|,\ |y_n|\rangle = \langle (e')\ |x_n|,\ (f')\ |y_n|\rangle \leqslant \left\langle \frac{\varepsilon}{\beta}\, e',\ \beta f'\right\rangle = \varepsilon\langle e',\ f'\rangle = \varepsilon\, g'$$

ceea ce înseamnă că $\langle x_n,\ y_n\rangle \xrightarrow{o} \mathbf{0}$.

b) P-operatorul $\langle x,\ y\rangle$ fiind bidisjunctiv, dacă $x_m \in \mathfrak{X}_b$, $y \in \mathfrak{Y}_b$ și $x_m \geqslant \mathbf{0}'$, $y \geqslant \mathbf{0}''$

iar $x = \sup\limits_m x_m$

atunci

$$\sup_m \langle x_m,\ y\rangle = \langle x,\ y\rangle\ (m = 1, 2, \ldots).$$

Dacă x_m și y nu sînt elemente mărginite dar există z așa ca

$$\langle x_m, y\rangle \leqslant z,$$

atunci $\langle x, y\rangle$ există. Într-adevăr,

$$\langle x'_{mn}, y'_n\rangle \leqslant z \qquad (m = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots).$$

Pe de altă parte,

$$\sup_m x'_{mn} = \sup_m (x_m \wedge n\,\mathbf{1}') = (\sup_m x_m) \wedge n\,\mathbf{1}' = x \wedge n\,\mathbf{1}' = x'_n$$

deci

$$\sup_m \langle x'_{mn}, y'_n\rangle = \langle \sup_m x'_{mn}, y'_n\rangle = \langle x'_n, y'_n\rangle \leqslant z,$$

ceea ce arată că $\langle x, y\rangle$ există.

Vom trece acum la demonstrarea (*mo*)-continuității *).

Fie $x_n \xrightarrow{o} x_o$ și $y_n \xrightarrow{o} y_o$, așa ca $\langle x_n, y_n\rangle$ să fie definite pentru $n = 1, 2,$ și fie z, așa ca

$$|\langle x_n, y_n\rangle| \leqslant z. \tag{2.2.5}$$

Fie $x = \bigvee_{i=0}^{\infty} |x_i|$ și e_m elementul caracteristic **) al lui $(x - m\,\mathbf{1}')_-$.

Atunci $\sup_m e_m = \mathbf{1}'$ și, după cum se poate verifica, $|(e_m)\, x_m| \leqslant m\, e_m$.

În mod analog, notînd $y = \bigvee_{i=0}^{\infty} |y_i|$ și f_p elementul caracteristic al lui $(y - p\,\mathbf{1}'')_-$, atunci $\sup_p f_p = \mathbf{1}''$ și $|(f_p)\, y_n| \leqslant p\, f_p$.

Mai de parte avem

$$\langle (e_m)\, x_n, (f_p)\, y_n\rangle - \langle (e_m)\, x_0, (f_p)\, y_0\rangle = \langle (e_m)\, x_n - (e_m)\, x_0, (f_p)\, y_n\rangle + \langle (e_m)\, x_0, (f_p)\, y_n - (f_p)\, y_0\rangle.$$

Pe de altă parte,

$$|(e_m)\, x_n - (e_m)\, x_0| = (e_m)\, |x_n - x_0| \xrightarrow{o} \mathbf{0}$$

precum și

$$|\langle (e_m)\, x_n - (e_m)\, x_0, (f_p)\, y_n\rangle| \leqslant 2mp\, \langle e_m, f_p\rangle.$$

Rezultă atunci, în baza observației *a*) de mai sus,

$$\langle (e_m)\, x_m - (e_m)\, x_0, (f_p)\, y_n\rangle \xrightarrow{o} 0.$$

În mod analog

$$\langle (e_m)\, y_0, (f_p)\, y_n - (f_p)\, y_0\rangle \xrightarrow{o} 0.$$

*) Vom urma metoda lui Vulih pentru produsul său.

**) Prin elementul caracteristic al unui element z, înțelegem elementul definit de Freudenthal prin: $e_z = \sup_n [(n\,|z|) \wedge 1]$, $(n = 1,2,\ldots)$.

Rezultă deci

$$\langle (e_m)\ x_n,\ (f_p)\ y_n \rangle \xrightarrow{o} \langle (e_m)\ x_0,\ (f_p)\ y_0 \rangle . \tag{2.2.6}$$

Mai departe, datorită lui (2.2.5)

$$|\langle (e_m)\ x_n,\ (f_p)\ y_n \rangle| = \langle (e_m)\ |x_n|,\ (f_p)\ |y_n| \rangle \leqslant z,$$

ceea ce împreună cu (2.2.6) ne dă

$$|\langle (e_m)\ x_0,\ (f_p)\ y_0 \rangle| \leqslant z.$$

În baza observației *b*) de mai înainte există produsul $\langle x_0, y_0 \rangle$, deoarece $\sup\limits_m (e_m)\ x_0 = x_0$ și $\sup\limits_p (f_p)\ y_0 = y_0$.

Din (2.2.6) rezultă atunci

$$\langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow{o} \langle x, y \rangle .$$

Teorema este astfel demonstrată.

T e o r e m a 2.2.6. Fie elementele pozitive $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathfrak{Y}$. Dacă mulțimea $\{\langle x^*, y^* \rangle\}$ pentru $x^* \in S(x)$, $y^* \in S(y)$ este mărginită, atunci $\langle x, y \rangle$ există și

$$\langle x, y \rangle = \sup_{\substack{x^* \in S(x) \\ y^* \in S(y)}} \langle x^*, y^* \rangle .$$

D e m o n s t r a ț i e. Folosind teorema 2.2.4, vom avea cu notațiile din definiția 2.2.4,

$$\langle x'_n\ y'_n \rangle = \sup_{\substack{x^*_n \in S(x'_n) \\ y^*_n \in S(y'_n)}} \langle x^*_n,\ y^*_n \rangle$$

Fie

$$z = \sup_{\substack{x^* \in S(x) \\ y^* \in S(y)}} \langle x^*,\ y^* \rangle .$$

În acest caz evident

$$\langle x'_n\ y'_n \rangle \leqslant z,$$

și deci există

$$\langle x, y \rangle = \sup_n \langle x'_n, y'_n \rangle$$

și

$$\langle x, y \rangle \leqslant z.$$

Pe de altă parte, deoarece $\langle x, y \rangle$ există

$$\langle x^*, y^* \rangle \leqslant \langle x, y \rangle \qquad (x^* \in S(x), y^* \in S(y))$$

ținînd seama că $x^* \leqslant x$, $y^* \leqslant y$. Rezultă.

$$z \leqslant \langle x,\ y \rangle$$

și teorema este demonstrată.

Observația 2.2.1. Dacă spațiile $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ sînt confundate, iar U și T sînt operații identitate, atunci V-produsul posedă în plus alte proprietăți, și anume:

i) Este simetric.
ii) Este asociativ.
iii) Are ca element neutru unitatea spațiului.
iv) Este comp'et V-disjunctiv.

Observația 2.2.1. arată că acest produs este produsul lui Vulih. Vom nota în acest caz

$$x.y = \langle x, y \rangle .$$

Se poate verifica că dacă în $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ este definit un V-produs (valorile fiind în $\mathfrak{Z}$) cu ajutorul operațiilor U și T atunci dacă $x \in \mathfrak{X}_b$ și $y \in \mathfrak{Y}_b$,

$$\langle x, y \rangle = U(x).\ T(y).$$

Egalitatea nu are în general sens pentru elemente nemărginite, deoarece pentru aceste elemente $U(x)$ și $T(y)$ nu sînt neapărat definite. Dacă însă U și T sînt definite peste tot în $\mathfrak{X}$ respectiv $\mathfrak{Y}$, atunci egalitatea precedentă se menține ori de cîte ori V-produsul este definit.

Un exemplu simplu dar important de V-produs este acela al produsului obișnuit

$$z(\tau) = x(\tau)\, y(\tau)$$

unde

$$x \in L^p[a, b],\ y \in L^q[a, b],\ z \in L^r[a, b] \text{ cu } 1/p + 1/q = 1/r.$$

El este definit pentru orice pereche de elemente.

Se poate observa că V-produsul în cazul spațiilor funcționale, coincide totdeauna cu produsul funcțional obișnuit dacă $\mathfrak{X}_b = \mathfrak{Y}_b = \mathfrak{Z}_b$, iar operațiile U și T sînt identități (este suficient ca bazele spațiilor să fie identice).

V-produsul poate fi utilizat în studiul operațiilor biliniare în K-spații. Se pot, de asemenea, generaliza unele considerații în care intervine produsul lui Vulih.

Remarcăm în sfîrșit că se poate discuta de asemenea problema definirii unui operator-produs într-un K-spațiu $\mathfrak{X}$ cu unitate, cu valori într-un K-spațiu $\mathfrak{Z}$ cu unitate care să posede proprietățile produsului din inelele F-ordonate ale lui A l. G h i k a [4], [5]. În acest caz se vor utiliza următoarele definiții: x este un divizor al lui zero, dacă există y așa ca $\langle x, y \rangle = 0$, $(0 \in \mathfrak{Z})$; x este inversibil, dacă există y așa ca $\langle x, y \rangle = 1$ (1 fiind elementul unitate din $\mathfrak{Z}$); x este idempotent dacă $\langle x, x \rangle = \langle x, 1' \rangle$ (1′ fiind elementul unitate din $\mathfrak{X}$).

CAPITOLUL II

ECUAȚII P-OPERATORIALE

În acest capitol vom considera ecuații de forma

$$y - \langle x_0, y \rangle = y_0, \tag{1}$$

unde $\langle x, y \rangle$ este un P-operator definit pe un produs cartezian $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ de K-lineale, arhimediene cu valori în $\mathfrak{Y}$. Ecuațiile de această formă vor fi studiate în

raport cu diverse aspecte ale elementului x_0, pe care-l vom numi mai departe nucleul ecuației. În paragraful 1 vom începe prin stabilirea cîtorva teoreme asupra existenței și unicității soluției pentru cazul cînd nucleul nu este presupus descompus în vreo formă specială. În cazul $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, o teoremă se va referi la nuclee « mărginite » în raport cu un anumit element special, iar alta la nuclee care satisfac pentru un element r convenabil, la o relație de forma $|x| \leqslant \varepsilon r$ cu ε real suficient de mic. În paragraful 2, vom considera nuclee care se descompun într-o sumă de elemente de un caracter special. Vom studia mai întîi nuclee a căror descompunere este de așa natură, încît studiul ecuației se reduce la acela al unui sistem de ecuații algebrice finit sau infinit. Sînt nuclee pe care le vom numi degenerate. Vom face apoi diverse observații relativ la ecuațiile ale căror nuclee se apropie prin proprietățile lor de cele « mărginite ». În paragraful 2 se va introduce de asemenea noțiunea de P-ortogonalitate care intervine la unele tipuri de nuclee. În sfîrșit, în paragraful 3 vom stabili cîteva formule de aproximare a soluției. Fiecare paragraf va fi însoțit de diverse exemple concrete, în special din teoria ecuațiilor integrale.

Teoria ecuațiilor funcționale bazată pe utilizarea noțiunii de operator-produs permite a se obține drept cazuri particulare propozițiile din teoria ecuațiilor funcționale liniare obișnuite din K-spații, adică a ecuațiilor de forma

$$y - U(y) = y_0 \tag{2}$$

unde U este o operație regulată și (oo)-liniară prin considerarea P-operatorului $\langle U, y \rangle = U(y)$. Multe propoziții asupra ecuațiilor de forma (1) pot fi obținute și ele cu ajutorul ecuației (2). Sînt totuși rezultate care nu se pot obține pe această cale. Printre acestea intră de exemplu acelea în care identitatea spațiilor $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ este esențială, dar și altele relativ la cazul $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{Y}$. Se poate observa pe de altă parte că unele propoziții care se referă la ecuația (2) folosesc faptul că mulțimea $\mathfrak{M}_r \cap \mathfrak{M}_0^0$ a operațiilor regulate și (oo)-liniare formează un K-spațiu. Aceasta dovedește că, considerarea operației $U(y)$ ca un operator cu două argumente, fiecare parcurgînd cîte un K-spațiu, este uneori convenabilă. Studiul ecuației (1) ne poate da astfel o metodă unitară de tratare a ecuațiilor funcționale liniare de diverse tipuri mai importante în K-spații. În capitolul de față vom presupune însă că $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt sub-K-lineale al unor K-spații $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{Y}_1$ arbitrare și ne vom îndrepta în special către o teorie tip Fredholm-Volterra a ecuațiilor în K-spații. Considerațiile noastre pot fi extinse în diverse moduri.

În acest capitol vom utiliza notațiile diferitelor spații concrete date în capitolul I, paragraful I. În exemplele pe care le vom da vom folosi de asemenea notațiile din paragraful menționat.

§ 1. TEOREME DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE

1. Punct introductiv

Fie $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{Y}_1$ K-spații arbitrare, iar $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ K-lineale (archimediene) exacte în $\mathfrak{X}_1$ respectiv $\mathfrak{Y}_1$. (o)-convergența din $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ va fi aceea din spațiile $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{Y}_1$ (respectiv). Vom presupune că pe $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ este definit un P-operator $\langle x, y \rangle$ cu valori în $\mathfrak{Y}$. Fără a mai menționa ulterior, vom face următoarele convenții pentru tot restul capitolului. Cînd vom spune că presupunem $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1$, vom înțelege în același timp că și $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, iar P-operatorul este asociativ și parțial (o)-continuu. Cînd nu vom specifica nimic asupra spațiilor $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{Y}_1$

(care pot fi diferite sau identice), vom considera pentru simplificare $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1$, iar P-operatorul va fi (o)-continuu numai în al doilea argument. Pentru $\mathcal{Y} \neq \mathcal{Y}$ se pot trage apoi concluzii asemănătoare, punînd condiții suplimentare evidente

În cazul $\mathcal{X}_1 = \mathcal{Y}_1$ (și deci $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$) vom presupune în plus că $\mathcal{X}$ posedă un element u dat de

D e f i n i ț i a 1.1.1. Un element $u > 0$ $(u \in \mathcal{X})$ va fi numit un element *P-unitate*, dacă există un număr real ω, așa ca

$$\langle u, u \rangle \leqslant \omega u. \tag{1.1.1}$$

P-unitatea, dacă există, nu e unică. Presupunem însă că ea e aleasă și fixată.

Cel mai mic număr ω care satisface relația (1.1.1) va fi numit *norma**) P-unității (un astfel de ω există totdeauna).

Un element $x \in \mathcal{X}$ care satisface la o relație de forma

$$|x| \leqslant \gamma u \qquad (\gamma \text{ real})$$

va fi numit un element *u-mărginit*.

E x e m p l e 1.1.1. 1° Funcția identic egală cu 1 este un element P-unitate pentru P-operatorii:

$$a) \int xy;\ b)\ \overset{*}{x}\overset{*}{y};\ c)\ \overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y};\ d)\ \overset{*}{x}y.$$

definiți pentru spații de funcții definitive respectiv pe

$a)$ $[\alpha, \beta]$; $b)$ și $c)$ $[\alpha, \beta]^2$; $d)$ $[0, \gamma]$.

Norma va fi egală cu $\beta - \alpha$ în cazurile $a)$, $b)$, $c)$ și cu γ în cazul $d)$.

2° În cazul P-operatorului

$$\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y} = \int_\alpha^\beta x(s, \xi)\, y(\xi, t)\, d\xi,$$

orice funcție pozitivă $u(s)$ de o singură variabilă este un element P-unitate, avînd ca normă

$$\omega = \int_\alpha^\beta u(\xi)\, d\xi.$$

3° Într-un K-spațiu cu unitate, elementul unitate este un element P-unitate față de produsul lui Vulih, avînd norma egală cu 1. De asemenea orice element unitar este un element P-unitate.

4° În $\mathcal{H}_r$ operația identitate este o P-unitate față de P-operatorul

$$\langle U, V \rangle = U[V],$$

avînd norma egală cu 1.

În cazul $\mathcal{X}_1 = \mathcal{Y}_1$ (respectiv $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$) vom presupune în sfîrșit că $\mathcal{X}$ este (ρ)-închis relativ la convergența cu regulatorul u, adică dacă $\{x_n\} \subset \mathcal{X}_1$ și $x \in \mathcal{X}$ iar

$$|x_n - x| \leqslant \varepsilon u \quad \text{pentru} \quad n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

atunci $x \in \mathcal{X}_1$.

---

*) În tot cursul capitolului vom rezerva litera ω pentru norma P-unității.

Un exemplu de (ρ)-închidere față de un element P-unitate este următorul:

$$\mathfrak{X}_1 = F[\alpha, \beta],\ \mathfrak{X} = C[\ , \beta] \text{ și } u = u(\tau) \equiv 1.$$

Remarcăm de asemenea că subspațiul $\mathfrak{X}$ al unui K-spațiu $\mathfrak{X}_1$, format din elementele u-mărginite ale lui $\mathfrak{X}_1$ este (ρ)-închis față de u.

Vom studia în capitolul de față ecuația « *P-operatorială* »

$$y - \langle x_0, y \rangle = y_0 \tag{1.1.2}$$

și forma ei specială

$$y - \lambda \langle x_0, \ y \rangle = y_0, \tag{1.1.3}$$

unde λ este un parametru real, care se deduce din prima prin înlocuirea lui x_0 prin λx_0. Elementul x_0 din ecuațiile (1.1.2) și (1.1.3) va fi numit *nucleul* ecuației respective.

Obiectul paragrafului de față va fi stabilirea unor propoziții asupra existenței și unicității soluției ecuației (1.1.2) și (1.1.3), în cazul cînd nu se presupune nucleul descompus într-o sumă de anumite elemente.

2. Condiții suficiente

Vom utiliza în acest punct notațiile

$$(x^n y) = \langle x, \langle x, \ldots, \langle x, y \rangle \rangle \ldots \rangle$$

pentru $n = 1, 2, \ldots$, și $(x^0 y) = y$

T e o r e m a 1.2.1. Dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

a) $|x_0| \leqslant \alpha u \qquad (u \in X,\ \alpha \in R)$,

b) $(u^n | y|) \leqslant \mu_{n-1}(u \ | y \ |) \qquad (\mu_n \in R)$

oricare ar fi $y \in \mathcal{Y}$,

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \mu_n < \infty$$

atunci ecuația (1.1.2) are o soluție unică de forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (x_0^n \ y_0). \tag{1.2.1}$$

D e m o n s t r a ț i e. Seria (1.2.1) este absolut (o)-convergentă. Într-adevăr, avem

$$\langle |x_0|, \ |y_0| \rangle \leqslant \alpha \langle u, |y| \rangle$$

$$(|x_0|^2 | y_0|) = \langle |x_0|, \langle |x_0|, |y_0| \rangle \rangle \leqslant \alpha \langle |x_0|, \langle u, \ |y_0| \rangle \rangle \leqslant \alpha^2 \langle u, \langle u, |y_0| \rangle \rangle =$$

$$= \alpha^2 (u^2 | y_0|)$$

și în general

$$(|x_0|^n | y_0|) \leqslant \alpha^n (u^n | y_0|). \quad (n = 1,2, \ldots)$$

Deoarece

$$(u^n \mid y_0 \mid) \leqslant \mu_{n-1}(u, \mid y_0 \mid)$$

și

$$\mid (x_0^n\, y_0) \mid \leqslant (\mid x_0 \mid^n \mid y_0 \mid),$$

obținem

$$\mid (x_0^n\, y_0) \mid \leqslant \alpha^n\, \mu_{n-1}(u, \mid y_0 \mid).$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n\, \mu_{n-1}(\mid u \mid, \mid y_0 \mid)$ fiind (o)-convergentă și $\mathcal{Y}_1$ fiind un K-spațiu seria $\sum_{n=0}^{\infty} (x_0^n\, y_0)$ este absolut (o) - convergentă.

Ea este o soluție a ecuației (1.1.2). Într-adevăr

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_0^n\, y_0) - \left\langle x_0, \sum_{n=0}^{\infty} (x_0^n\, y_0) \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (x_0^n\, y_0) - \sum_{n=0}^{\infty} (x_0^{n+1}\, y_0) = y_0.$$

Soluția ecuației (1.1.2) este unică. Într-adevăr, fie y' o altă soluție. Atunci

$$y - y' = \langle x_0\, y \rangle - \langle x_0, y' \rangle = \langle x_0, y - y' \rangle$$

și notînd prin $y'' = y - y'$ obținem

$$y'' = \langle x_0, y'' \rangle.$$

Din aceasta deducem

$$(x_0^1\, y'') = \langle x_0, y'' \rangle = \langle x_0, \langle x_0, y'' \rangle \rangle = (x_0^2\, y'')$$

și prin inducție

$$(x_0^n\, y'') = (x_0^{n+1}\, y''). \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

Șirul

$$y, (x_0\, y''), (x_0^2\, y''), \ldots \tag{1.2.2}$$

fiind (o)-convergent, deoarece

$$\mid (x_0^n\, y'') \mid \leqslant \alpha^n\, \mu_{n-1} \langle u, y'' \rangle,$$

rezultă $y'' = \mathbf{0}'$, ceea ce înseamnă că $y = y'$.

Teorema este astfel demonstrată.

Observația 1.2.1. Dacă $\mathcal{X}_1 = \mathcal{Y}_1$, atunci condiția *b)* din teorema 1.2.1 va putea fi înlocuită cu condiția mai simplă

$$b') \qquad u^n \leqslant \mu_{n-1}\, u,$$

ceea ce va însemna că u este un element P-unitate al lui $\mathcal{X}$, cu $\omega \leqslant \mu_1$. În cazul cînd $\mu_n = \omega^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ va fi necesar ca $\alpha < \omega$. Dacă mulțimea $\mathcal{X}$ este (ρ)-închisă relativ la u, elementul $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n$, avînd u ca regulator de convergență, aparține lui $\mathcal{X}$.

În exemplele pe care le vom da în acest capitol, vom arăta că rezultate clasice sau cunoscute rezultă drept cazuri particulare ale considerațiilor noastre, și că se pot obține de asemenea și rezultate noi.

Exemple 1.2.1. 1° Fie $\mathfrak{X} = M[0,1]$, $\mathfrak{Y}_1 = L[0,1]$ și $\langle x, y\rangle = \overset{*}{x}y$. Atunci se poate considera u funcția identic egală cu 1, iar $\mu_n = 1/n!$. În acest caz, ecuația

$$y(t) - \int_0^t x_0(t-\xi)y(\xi)\,d\xi = y_0(t)$$

are o soluție unică de forma (1.2.1) în spațiul funcțiilor sumabile pe intervalul [0, 1]. Soluția sa este mărginită.

2° Același lucru, ca și în cazul precedent, are loc prin înlocuirea lui $\overset{*}{x}y$ prin $\int xy$.

3° Dacă $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = C[a,b]^2$, $\langle x, y\rangle = \overset{*}{x}\overset{*}{y}$, $u \equiv 1$, atunci se poate considera $\mu_n = \dfrac{(b-a)^n}{n!}$ și se obțin rezultatele clasice privitor la ecuațiile de tip Volterra.

4° Dacă $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = C[a,b]^2$, $\langle x, y\rangle = \overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y}$, $u \equiv 1$, atunci se poate considera $\mu_n = (b-a)^n$ și $0 < \alpha < (b-a)^{-1}$ obținîndu-se rezultatele clasice privitor la ecuațiile de tip Fredholm.

5° Să considerăm ecuația

$$y(s,t) - \int_a^b x_0(s,\xi)\,y(\xi,t)\,d\xi = y_0(s,t), \tag{1.2.3}$$

unde $|x_0(s,t)| \leqslant \alpha\,\varphi(s)$, $x_0(s,t)$ fiind măsurabilă pe $[a,b]^2$ iar $\varphi(s)$ sumabilă pe $[a,b]$. Dacă este satisfăcută condiția

$$\alpha < \left[\int_a^b \varphi(s)\,ds,\right]^{-1}, \tag{1.2.4}$$

atunci ecuația (1.2.3) are o soluție unică în mulțimea funcțiilor sumabile pe $[a,b]^2$ de forma unei serii convergente aproape peste tot.

Într-adevăr, nu avem decît să considerăm ecuația (1.2.3) ca o ecuație de forma (1.1.2) cu $\langle x, y\rangle = \overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y}$, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1 = L[a,b]^2$, $u \equiv \varphi(s)$, $\mathfrak{X} = \{x(s,t) \mid |x(s,t)| \leqslant \gamma\,\varphi(s), \gamma \text{ variabil}\}$. Deoarece $\omega = \int_a^b \varphi(s)\,ds$, condiția (1.2.4) asigură îndeplinirea condițiilor observației 1.2.1.

6° Fie $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1$ un K-spațiu cu unitate $\mathbf{1}$, $\langle x, y\rangle = x.y$, $u = \mathbf{1}$, $\mu_n = 1$, $0 < \alpha < 1$. Se obține ecuația

$$(\mathbf{1} - x_0)\,y = y_0 \tag{1.2.5}$$

cu $|x_0| \leqslant \alpha\,\mathbf{1}$, a cărei soluție este $y = (\mathbf{1} - x_0)^{-1}.\,y_0$, unde $(\mathbf{1} - x_0)^{-1}$ este elementul invers relativ la $\mathbf{1}$ al lui $\mathbf{1} - x_0$. Pentru studiul ecuației (1.2.5) este astfel suficient să considerăm cazul $y_0 = \mathbf{1}$.

7° Fie $\mathfrak{X} = \mathfrak{H}_r(\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{H}_0^0(\mathfrak{Y})$, $u = I$ (operația identitate) $\langle U, y\rangle = U(y)$, $\mu_n = 1$. Obținem cazul ecuației funcționale generale de forma (2) (vezi introducerea acestui capitol).

8° Dacă $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{H}_r$ ($\mathfrak{Z}$), spațiul $\mathfrak{H}_r$ fiind presupus pentru simplificare regulat $\langle Z, V \rangle = Z[V]$, $u = I$, $\mu_n = 1$, $0 < \alpha < 1$, obținem ecuația

$$Z - U[Z] = V, \tag{1.2.6}$$

căreia i se poate aplica teorema (1.2.1.) Să observăm că oricare ar fi elementul $z \in \mathfrak{Z}$,

$$Z(z) - U[Z(z)] = V(z)$$

și considerînd cazul $V = I$ iar $z = z_0$ fix atunci

$$Z(z_0) - U[Z(z_0)] = z_0$$

și dacă Z este soluția ecuației (1.2.6) elementul $z = Z(z_0)$ va fi soluția ecuației

$$z - U(z) = z_0$$

care este de forma (2). (U fiind presupusă însă numai regulată).

Teorema 1.2.2. Fie φ un element pozitiv ($\varphi \in \mathfrak{Y}$), astfel încît

$a)$ $\qquad \langle |x_0|, \varphi \rangle \leqslant \delta \varphi \qquad$ cu $0 < \delta < 1$.

Dacă este îndeplinită una din condițiile:

$b')$ $\qquad |x_0| \leqslant \gamma \varphi \qquad$ (pentru cazul $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}_1'$),

$b'')$ $\qquad \langle |x_0|, |y_0| \rangle \leqslant \gamma \varphi,$

unde γ este un număr real oarecare, atunci ecuația (1.1.2) are o soluție de forma (1.2.1). Această soluție este unică în mulțimea elementelor y cu $|y| \leqslant \beta \varphi^*$ (β real, $\varphi^* = \langle \varphi, |y_0| \rangle + |y_0|$ pentru b') și $\varphi^* = \varphi + |y_0|$ pentru b'')).

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm convergența seriei (1.2.1) și șirului (1.2.2). Avem în cazul b')

$$\langle |x_0|^n, |y_0| \rangle \leqslant \gamma \delta^{n-1} \langle \varphi, |y_0| \rangle, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

iar în cazul b'')

$$(|x_0|^n |y_0|) \leqslant \gamma \delta^{n-1} \varphi, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ceea ce asigură (o)-convergența absolută a seriei (1.2.1).

Dacă y' este o altă soluție satisfăcînd condiția $|y'| \leqslant \beta' \varphi^*$ atunci, deoarece $|y''| = |y - y'| \leqslant \beta'' \varphi^*$ unde ($|y| \leqslant \beta \varphi^*$ iar $\beta'' = \beta + \beta'$)

avem

$$\begin{aligned} \langle |x_0|^n |y''| \rangle &\leqslant \beta'' (\delta + \gamma) \delta^{n-1} \langle \varphi, |y_0| \rangle \qquad \text{pentru } b') \\ &\leqslant \beta'' (\delta + \gamma) \delta^{n-1} \varphi \qquad \text{pentru } b'') \end{aligned}$$

și șirul (1.2.2) este absolut (o)-convergent.

Observația 1.2.2. Dacă φ este element P-unitate al spațiului $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, iar $|x_0| \leqslant \alpha \varphi$, unde $\alpha < \omega^{-1}$ atunci sînt îndeplinite condițiile $a)$ și $b)$ din teorema precedentă. (A se vedea și observația 1.2.1).

Exemple 1.2.2. 1° Dacă $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = L^2[0,1]$, $\langle x, y \rangle = \overset{*}{x} y$ sau $\langle x, y \rangle = \int xy$ și $\varphi \equiv 1$, atunci oricare ar fi x_0

$$\langle |x_0|, \varphi \rangle = \int_0^t |x_0(t)| \, dt \leqslant \int_0^1 |x_0(t)| \, dt = \delta$$

și condiția a) din teorema 1.2.2. este îndeplinită dacă $\delta < 1$. Pentru îndeplinirea condiției b'') se poate lua

$$\gamma = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^t | x_0(t-\xi)\, y_0(\xi)|\, d\xi,$$

în cazul $\overset{*}{x}y$ (funcția fiind continuă [13]), și

$$\gamma = \int_0^1 | x_0(\xi)\, y_0(\xi)|\, d\xi$$

în cazul $\int x\, y$.

2° Să considerăm ecuația

$$y(t) - \int_0^t x_0(t-\xi)\, y(\xi)\, d\xi = y_0(t) \tag{1.2.7}$$

în spațiul $L[0,1]$. Dacă $|x_0(t)|$ (sau $|y_0(t)|$) satisface condiției

$$\int_0^t | x_0(t-\xi)\, x_0(\xi)|\, d\xi \leqslant \delta |\alpha_0(t)| \text{ (resp. } \int_0^t | x_0(t-\xi)\, y_0(\xi)|\, d\xi \leqslant \delta |y_0(t)|)$$

cu $\delta < 1$, atunci ecuația (1.2.7) are o soluție de forma (1.2.1), unică în mulțimea funcțiilor sumabile care satisfac relației $|y(t)| \leqslant \beta |\overset{*}{x}_0\, y_0|(t) + |y_0|$ (respectiv $|y(t)| \leqslant \beta |y_0(t)|$). Într-adevăr este suficient să considerăm $\varphi = |x_0|$ (respectiv $\varphi = |y_0|$) și să aplicăm teorema 1.2.2.

3° Să considerăm iarăși ecuația (1.2.7) în spațiul $L[0,1]$. După cum se știe [10], soluția sa se poate deduce din soluția ecuației

$$y_1(t) - \int_0^t x_0(t-\xi)\, y_1(\xi)\, d\xi = 1, \tag{1.2.8}$$

cu ajutorul formulei

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t y_0(t-\xi)\, y_1(\xi)\, d\xi.$$

Deci pentru rezolvarea ecuației (1.2.7) ne putem mărgini la cazul $y(t) \equiv 1$. Vom putea (pentru un nucleu convenabil) aplica ecuației (1.2.8) teorema 1.2.2, luînd $\varphi = 1$ și apoi deduce soluția ecuației (1.2.7).

3. Nucleu rezolvent

În acest punct vom presupune $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1$. În acest caz, datorită asociativității, are sens elementul $\varphi_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} x_0^n$, cu condiția convergenței seriei. Se poate atunci enunța următoarea propoziție:

Teorema 1.3.1. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_0^n$ este (o)-convergentă, și suma sa $\varphi_0 \in \mathfrak{X}$, atunci ecuația (1.1.2) are o soluție unică de forma

$$y = y_0 - \langle \varphi_0, y_0 \rangle.$$

Vom numi elementul ρ_0 *nucleul rezolvent* al ecuației (1.1.2), sau al nucleului x_0.

Are loc următoarea relație (principiul de reciprocitate):

$$x_0 + \rho_0 = \langle x_0, \rho_0 \rangle = \langle \rho_0, x_0 \rangle,$$

care se verifică ușor. Pe baza acestei egalități se verifică de asemenea că

$$x_0' = -\sum_{n=1}^{\infty} \rho_0^n,$$

precum și inversiunea relației P-operatoriale

$$y - \langle y, x_0 \rangle = y_0$$

prin (teorema 1.3.1)

$$y_0 - \langle y_0, \rho_0 \rangle = y$$

(principiul de inversiune).

Se mai observă de asemenea că următoarele ecuații « asociate »

$$y - \langle y, x_0 \rangle = y_0$$

$$y - \langle x_0, y \rangle = y_0$$

au același nucleu rezolvent.

Înainte de a face cîteva considerații privitor la ecuația (1.1.3) vom mai stabili încă o teoremă care va fi folosită ulterior.

T e o r e m a 1.3.2. Dacă pentru un anumit element $r \in \mathfrak{X}$ sînt îndeplinite condițiile

$$a) \quad \langle r, u \rangle \leqslant \gamma u \qquad (\gamma \text{ real})$$

$$b) \quad \langle r, r \rangle \leqslant \beta u \qquad (\beta \text{ real})$$

$$c) \quad |x_0| \leqslant \varepsilon r \qquad \text{cu} \qquad \varepsilon < 1/\gamma,$$

atunci ecuația (1.1.2) posedă un nucleu rezolvent $\rho \in \mathfrak{X}$.

D e m o n s t r a ț i e. Avem

$$|x_0|^2 = \langle |x_0|, |x_0| \rangle \leqslant \varepsilon^2 \langle r, r \rangle \leqslant \beta \varepsilon^2 u$$

$$|x_0|^3 \leqslant \langle |x_0|, \beta \varepsilon^2 u \rangle \leqslant \beta \varepsilon^2 \langle \varepsilon r, u \rangle \leqslant \beta \varepsilon^3 \gamma u$$

$$|x_0|^4 \leqslant \beta \varepsilon^3 \gamma \langle |x_0|, u \rangle \leqslant \beta \varepsilon^4 \gamma \langle r, u \rangle \leqslant \beta \varepsilon^4 \gamma^2 u$$

și prin inducție obținem

$$|x_0|^n \leqslant \beta \varepsilon^n \gamma^{n-2} u \quad (n = 2.3, \ldots)$$

ceea ce arată că seria $\sum_{n-1}^{\infty} x_0^n$ este absolut (o)-convergentă și este un element al lui $\mathfrak{X}$.

D e f i n i ț i a 1.3.1. Un nucleu x_0 pentru care sînt îndeplinite condițiile teoremei 1.3.2 va fi numit *regulat*. Elementul r va fi numit *regulatorul* nucleului.

O b s e r v a ț i a 1.3.1. Un nucleu mărginit pentru care $\alpha < \omega^{-1}$ este un nucleu regulat, avînd ca regulator elementul P-unitate.

Exemple 1.3.1. 1° Dacă $\mathfrak{X} = L^2\ [0, 1], u \equiv 1$ și $\langle x, y\rangle = \int x\, y$ se poate lua $\gamma = \int_0^1 r(\xi)\, d\xi$ și $\beta = \int_0^1 r^2(\xi)\, d\xi$, oricare ar fi $r \in \mathfrak{X}$.

2° Dacă $\mathfrak{X}_1 = L^2\,[0,1]$ și $\langle x, y\rangle = \overset{*}{x}y$ și $u \equiv 1$ se poate observa că oricare ar fi x și y, $|\overset{*}{x}y| \leqslant \mu u$ pentru un anumit μ real [13] și se poate lua β așa ca $|\overset{*}{r}r| \leqslant \beta u$, iar

$$y = \int_0^1 r(\xi)\, d\xi.$$

Să considerăm, în sfîrșit, ecuația (1.1.3) cu parametrul real. Evident că toate rezultatele enunțate pentru ecuația (1.1.1) au loc și pentru ecuația (1.1.2), înlocuind x_0 prin $\lambda\, x_0$. Uneori este însă convenabil a se ține seama de valorile pe care le poate lua λ. Avem astfel următoarea propoziție relativ la nucleele u-mărginite.

Teorema 1.3.3. Dacă $|x_0| \leqslant \sigma u$, atunci ecuația (1.1.3) are o soluție unică, oricare ar fi λ satisfăcînd condiției $|\lambda| < 1/\omega$. Soluția ecuației va fi de forma $y = y_0 - \lambda \langle \varphi_0(\lambda), y_0\rangle$ unde $\varphi_0(\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} x_0^n$.

Această teoremă nu necesită o demonstrație, ea deducîndu-se direct din considerațiile precedente.

În cazul ecuației (1.1.3) nucleul rezolvent va fi elementul

$$\varphi_0(\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} x_0^n.$$

Principiul de reciprocitate se va scrie, în acest caz, astfel:

$$x_0 + \varphi_0 = \lambda \langle x_0, \varphi_0\rangle = \lambda \langle \varphi_0, x_0\rangle.$$

Are de asemenea loc și următoarea relație:

$$\varphi_0(\lambda_1) - \varphi_0(\lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \varphi_0(\lambda_1), \varphi_0(\lambda_2)\rangle = 0.$$

Orice funcție $\varphi(\lambda)$ care satisface această ecuație este un nucleu rezolvent al nucleului $x_0 = -\varphi(0)$, deoarece pentru $\lambda_1 = 0$ relația devine cea a principiului de reciprocitate.

În cazul ecuației (1.1.3) valorile λ, pentru care ecuația omogenă corespunzătoare posedă soluții nebanale, vor fi numite *valori proprii* ale nucleului x_0, iar soluțiile corespunzătoare, *elemente proprii*. Dacă $u^n \leqslant \mu_n u$, unde pentru orice ν real $\sum_{n=1}^{\infty} \nu^n \mu_n < \infty$, atunci nucleul u-mărginit nu admite valori proprii.

Exemple 1.3.2. 1°. Dacă $\mathfrak{X} = C\,[0,1]^2$, $\mathfrak{X}_1 = F\,[0, 1]^2$, $u \equiv 1$ și $\langle x, y\rangle = \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}$ din teorema 1.3.3 se obține teorema clasică privitor la ecuațiile Fredholm cu parametru real.

2°. Fie $\mathfrak{X}$ subspațiul elementelor mărginite ale K-spațiului $\mathfrak{X}_1$ cu unitate $\mathbf{1}$ și $\langle x, y\rangle = x \cdot y$. Oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$, elementul $\varphi(\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} x^n$ este

reprezentat de o serie absolut (o)-convergentă dacă $|\lambda| < \|x\|^{-1}$ și avem $(\mathbf{1} - \lambda x)^{-1} = \mathbf{1} - \lambda\varphi$.

Se observă că orice element $z \neq \mathbf{1}$ al unui K-lineal cu unitate poate fi scris sub forma $z = \mathbf{1} - \lambda x$, dacă se pune $x = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{1} - z)$. Se pot astfel studia condițiile de existență a inversului unui element z, folosind rezultatele ce privesc ecuația generală (1.1.3).

4. Cazul P-operatorului regulat

Să presupunem că $\langle x, y\rangle$ este un P-operator regulat în sensul definiției 2.3.2, capitolul I. Să presupunem de asemenea că el posedă un element pseudo-neutru ω.

Ecuația

$$y = \langle x_0, y\rangle + y_0$$

se mai poate scrie în acest caz

$$\langle \omega, y\rangle = \langle x_0, y\rangle + y_0$$

sau

$$\langle \omega - x_0, y\rangle = y_0 .$$

Pentru a rezolva această ecuație, să găsim un element r, așa ca

$$y = \langle r, \langle \omega - x_0, y\rangle\rangle = \langle r, y_0\rangle \tag{1.4.1}$$

oricare ar fi elementul y_0. De aici deducem de asemenea

$$\langle \omega - x_0, \langle r, y_0\rangle\rangle = \langle \omega - x_0, y\rangle = y_0 .$$

P-operatorul fiind regulat, există φ, așa ca

$$y_0 = \langle \varphi, y_0\rangle \tag{1.4.2}$$

oricare ar fi y_0 unde

$$\varphi = [\omega - x_0, r].$$

Deoarece egalitatea (4.1.2) este satisfăcută pentru $\varphi = \omega$ și cum elementul φ este unic, atunci

$$\omega = [\omega - x_0, r]. \tag{1.4.3}$$

Se poate deci reduce problema rezolvării ecuației (1.1.2) cu P-operator regulat care posedă element pseudo-neutru, la problema rezolvării ecuației (1.4.3) în spațiul $\mathfrak{X}$. Soluția ecuației (1.1.2) va fi atunci

$$y = \langle r, y_0\rangle$$

datorită lui (1.4.1.)

§ 2. NUCLEE DECOMPOZABILE

Noțiunea de P-operator prezintă interes în teoria ecuațiilor funcționale, mai ales în cazul nucleelor decompozabile (sumă de nuclee specia'e).

În acest paragraf vom presupune că nucleul este descompus într-o sumă de anumite elemente. Vom considera mai întîi cazul cînd descompunerea este de așa natură, încît studiul ecuației (1.1.2) se reduce la acela al unui sistem algebric finit sau infinit.

1. Nuclee degenerate

Definiția 2.1.1. Vom spune că nucleul x_0 este *P-degenerat* relativ la submulțimea liniară $\mathcal{Y}^* \subset \mathcal{Y}$, dacă el este de forma

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (x_i \subset \mathcal{X})$$

și există elementele nenule $y_i \in \mathcal{Y}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, astfel încît

$$\langle x_i, y \rangle = \nu_i y_i \qquad (\nu_i = \nu_i (y) \in R) \tag{2.1.1}$$

oricare ar fi $y \in \mathcal{Y}^*$ și există z_i așa ca $\nu_i (z_i) \neq 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$.

Are loc urmatoarea:

Teoremă 2.1.1. Dacă nucleul ecuației (1.1.2) este P-degenerat relativ la $\mathcal{Y}^*$, iar $y_0 \in \mathcal{Y}^*$, atunci ecuația admite o soluție de forma

$$y = y_0 + \sum_{j=1}^{n} \nu_j y_j , \tag{2.1.2}$$

cu condiția ca *) $D = | \delta_{ij} - \beta_{ij} | \neq 0$, unde $\beta_{ij} = \nu_i (y_j)$. Această soluție este unică în $\mathcal{Y}^*$.

Demonstrație. Fie $y \in \mathcal{Y}^*$ o soluție a ecuației (1.1.2). Atunci

$$y = y_0 + \sum_i \langle x_i, y \rangle = y_0 + \sum_i \nu_i y_i \tag{2.1.3}$$

și înlocuind în (2.1.1) obținem

$$\langle x_i, y_0 \rangle + \sum_j \nu_j \langle x_i, y_j \rangle = \nu_i y_i ,$$

sau, notînd

$$\gamma_i = \nu_i (y_0),$$

găsim

$$\gamma_i y_i + \sum_j \nu_j \beta_{ij} y_i = \nu_i y_i .$$

De aici deducem

$$\nu_i - \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \nu_j = \gamma_i \; (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.1.4}$$

*) Vom nota prin δ_{ij} simbolul lui Kroenecker.

Am obținut astfel un sistem liniar de ecuații algebrice în ν_i, avînd determinantul

$$D = | \delta_{ij} - \beta_{ij} | \neq 0.$$

Reciproc, dacă acest determinant este diferit de zero, există atunci un sistem unic de numere reale ν_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ soluție a ecuației 2.1.4. Deci o singură expresie de forma (2.1.2) care este o soluție a ecuației (1.1.2), după cum se verifică prin înlocuire în al doilea membru al egalităților (2.1.3).

Observația 2.1.1. Dacă $D = 0$, atunci, pentru $\gamma_i = 0$ sistemul (2.1.4) posedă cel puțin un sistem nebanal de soluții, ceea ce atrage după sine existența a cel puțin unei soluții nebanale a ecuației omogene corespunzătoare ecuației (1.1.2).

Exemple 2.1.1. 1° Dacă nucleul $x_0 \in C\,[0,1]^2$ este de forma $x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i$ cu $x_i(s, t) = y_i(s)\, z_i(t)$, iar $\langle x, y \rangle = \mathring{x}y$, atunci x_0 este degenerat relativ la $C\,[0,1]$.

2° Fie $\mathfrak{X}$ un K-spațiu cu unitate iar $\langle x, y \rangle = x.y$. Fie $\{e_i\}$ n elemente unitare nenule disjuncte două cîte două și $y_0 = \mathbf{1}$. Atunci $x = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$ este degenerat relativ la mulțimea liniară generată de $e_1, e_2, \ldots, e_n, \mathbf{1}$.

3° Fie $\mathfrak{X} = \mathcal{H}_r(\mathcal{Y}), \langle U, y \rangle = U(y)$, și n elemente pozitive liniar independente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ din $\mathcal{Y}$. Să considerăm n funcționale regulate nenule $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ pe $\mathcal{Y}$ și să definim n operații U_i prin egalitatea: $U_i(y) = \Phi_i(y).y$ Atunci $U_i \in \mathcal{H}_r$, iar $U = \sum_{i=1}^{n} U_i$ este degenerată relativ la tot spațiul $\mathcal{Y}$.

În restul acestui punct vom presupune $\mathfrak{X}_1 = \mathcal{Y}_1$.

Definiția 2.1.2. Vom spune că nucleul x_0 este *complet P-degenerat* relativ la submulțimea liniară $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}$, dacă el este de forma

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad (x_n \in \mathfrak{X})$$

și există elementele nenule $y_n \in \mathfrak{X}^*$ $(n = 1, 2, \ldots,)$, astfel încît

$$\langle x_n, y \rangle = \nu_n y_n \quad (\nu_n = \nu_n(y) \in R) \tag{2.1.5}$$

oricare ar fi $y \in \mathfrak{X}^*$ iar cel puțin pentru anumite elemente z_n, $\nu_n(z_n) \neq 0$ pentru fiecare n.

Are loc:

Teorema 2.1.2. Să presupunem că $\mathfrak{X}$ posedă un element P-unitate avînd norma $\omega \leqslant 1$. Să presupunem de asemenea că ecuația (1.1.2) posedă un nucleu complet P-degenerat relativ la mulțimea liniară $\mathfrak{X}^*$ care conține y_0 și sînt satisfăcute condițiile

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \leqslant \delta u, \quad 0 < \delta < 1$$

$$b)\ \langle u, |y_n| \rangle = \eta_n u$$

$$c)\ |x_n| \leqslant \zeta_n u \qquad \zeta_n \leqslant \eta_n .$$

În acest caz ecuația (1.1.2) are o soluție de forma

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n y_n , \tag{2.1.6}$$

care este unică în mulțimea $\mathfrak{X}^*$, cu condiția ca $\gamma_n = \nu_n (y_0)$ să fie mărginite.

Demonstrație. Fie $y \in \mathfrak{X}^*$ o soluție a ecuației (1.1.2). Avem

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n , y \rangle = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n y_n$$

și folosind (2.1.5) obținem

$$\langle x_n , y_0 \rangle + \sum_{m=1}^{\infty} \nu_m \langle x_n , y_m \rangle = \nu_n y_n .$$

Notînd

$$\beta_{nm} = \nu_n (y_m),$$

egalitatea precedentă se va scrie

$$\gamma_n y_n + \sum_{m=1}^{\infty} \nu_m \beta_{nm} y_n = \nu_n y_n .$$

ceea ce implică

$$\nu_n - \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{nm} \nu_m = \gamma_n . \tag{2.1.7}$$

Obținem astfel un sistem infinit de ecuații algebrice. Acest sistem este complet regulat. Într-adevăr, avem

$$\sum_m |\beta_{nm}| |y_n| = \sum_m |\langle x_n , y_m \rangle| \leqslant \langle |x_n|, \sum_n |y_m| \rangle \leqslant$$

$$\leqslant \delta \langle |x_n| u \rangle \leqslant \delta \zeta_n \langle u, u \rangle \leqslant \delta \zeta_n u$$

ținînd seama de proprietățile elementului u. De aici obținem

$$\sum_m |\beta_{nm}| \langle u, |y_n| \rangle \leqslant \zeta_n \langle u, n \rangle \leqslant \delta \zeta_n u$$

sau

$$\sum_m |\beta_{nm}| \eta_n u \leqslant \delta \zeta_n u .$$

Împărțind prin ζ_n și ținînd seama că $\frac{\eta_n}{\zeta_n} \geqslant 1$ rezultă

$$\sum_m |\beta_{nm}| \leqslant \delta < 1,$$

oricare ar fi n. Sistemul (2.1.7) este astfel complet regulat și admite o soluție mărginită $\{\nu_n\}$ unică.

Reciproc, dacă $\{\nu_n\}$ este soluția ecuației (2.1.7), atunci elementul

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n y_n$$

este o soluție a ecuației (1.1.2) și singura sa soluție.

Exemplul 2.1.2. Fie $\{y_n(s)\}$ un șir de funcții continue pe [0, 1], astfel ca seria $\sum_n y_n(s)$ să fie absolut și uniform convergentă.

Fie $y(s)$ suma modulelor ei și fie $\max_s y(s) < 1$.

Fie $z_n(t)$ un șir de funcții continui pe [0,1] egal mărginit, așa ca

$$|y_n(s)\, z_n(t)| \leqslant \int_0^1 y_n(s)\, ds,$$

oricare ar fi $s, t \in [0, 1]$.

În acest caz, considerînd $\mathfrak{X}_1 = F[0, 1]^2$, $\mathfrak{X} = C[0, 1]^2$, $\mathfrak{X}^* = C[0,1]$, $\langle x, y \rangle \equiv \mathring{x}\mathring{y}$ și $u \equiv 1$ atunci funcția

$$x_0(s, t) = \sum_n y_n(s)\, z_n(t)$$

reprezintă un nucleu complet P-degenerat față de $\mathfrak{X}^*$ și toate condițiile teoremei 2.1.2. sînt îndeplinite.

2. Nuclee cvasi-rezolvabile

În acest punct vom considera nuclee care se descompun într-o sumă de două nuclee particulare și vom face diverse observații privitor la rezolvarea ecuațiilor respective. Vom presupune $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1$.

Definiția 2.2.1. Vom spune că nucleul $x_0 \in \mathfrak{X}$ este *rezolvabil* dacă posedă un nucleu rezolvent $\nu_0 \in \mathfrak{X}$ sau este degenerat. Un nucleu $x_0 \in \mathfrak{X}$ va fi numit *cvasi-rezolvabil* dacă el se descompune într-o sumă de forma: $x_0 = x' + x''$, unde cel puțin x' este u-mărginit, x' și x'' fiind rezolvabile.

Observația 2.2.1. Fie x_0 un nucleu cvasi-rezolvabil al ecuației (1.1.3). Să notăm

$$y' = \lambda \langle x'', y \rangle + y_0. \tag{2.2.1}$$

Atunci ecuația (1.1.3) se va scrie

$$y - \lambda \langle x', y \rangle = y'. \tag{2.2.2}$$

Fie ν' nucleul rezolvent al ecuației (2.2.2). Vom avea atunci

$$y = y' - \lambda \langle \nu', y' \rangle. \tag{2.2.3}$$

Dacă notăm

$$x^* = x'' - \lambda \langle x'', \nu' \rangle \tag{2.2.4}$$

și ținem seama de (2.2.3), din (2.2.1), deducem

$$y' - \lambda \langle x^*, y' \rangle = y_0. \tag{2.2.5}$$

Se observă astfel că fiecărei soluții a ecuației (1.1.3) îi corespunde o soluție și numai una, a ecuației (2.2.5) și reciproc după cum se poate verifica.

În acest mod studiul ecuației (1.1.2) cu nucleul cvasi-rezolvabil este legat de studiul ecuației (2.2.5).

Definiția 2.2.2. Un nucleu cvasi-rezolvabil $x_0 \in \mathfrak{X}$ va fi numit de tip (MD) relativ la un subspațiu liniar $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$, dacă în descompunerea sa x' este mărginit, iar x'' este degenerat față de $\mathfrak{X}^*$.

Observaţia 2.2.2. Dacă x_0 este de tip (MD) relativ la $\mathfrak{X}^*$, atunci nucleul x^* al ecuaţiei (2.2.5) dat de formula (2.2.4) (presupunem $\lambda = 1$) este de asemenea degenerat relativ la $\mathfrak{X}^*$. Într-adevăr, fie

$$x'' = \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ şi } y_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$$

elementele care intervin în definiţia 2.1.1. Avem

$$x^* = x'' + \langle x'', \varphi' \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i'' + \sum_{i=1}^{n} \langle x_i'', \varphi' \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i'' + \nu_i(\varphi') y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*$$

notînd $x_i^* = x_i'' + \nu_i(\varphi') y_i$. Avem apoi, pentru $y \in \mathfrak{X}^*$:

$$\langle x_i^*, y \rangle = \langle x_i'', y \rangle + \nu_i(\varphi') \langle y_i, y \rangle = \nu_i(y) y_i + \nu_i(\varphi') \langle y_i, y \rangle .$$

Pe de altă parte, fie $z_i \in \mathfrak{X}^*$, astfel încît

$$\langle x_i'', z_i \rangle = y_i .$$

Un astfel de element există evident pe baza definiţiei (pentru fiecare i), deoarece dacă pentru un $z_i' \in \mathfrak{X}^*$ am avea $\nu_i(z_i') \neq 0$, am lua $z_i = \dfrac{1}{\nu_i(z_i')} z_i'$. Avem apoi

$$\langle y_i, y \rangle = \langle \langle x_i'', z_i \rangle, y \rangle = \langle x_i'', \langle z_i, y \rangle \rangle = \nu_i(\langle z_i, y \rangle) y_i .$$

În concluzie

$$\langle x_i^*, y \rangle = [\nu_i(y) + \nu_i(\varphi') \cdot \nu_i(\langle z_i, y \rangle)] y_i = \nu_i^* y_i$$

cu notaţie evidentă.

Afirmaţia noastră este astfel demonstrată.

Studiul ecuaţiei (1.1.3) cu nucleu de tip (MD) relativ la un subspaţiu liniar $\mathfrak{X}^* \subset \mathfrak{X}$ se reduce astfel la studiul unei ecuaţii cu nucleu u-mărginit în $\mathfrak{X}$ şi al unei ecuaţii cu nucleu degenerat faţă de $\mathfrak{X}^*$. Dacă determinantul D care se asociază nucleului degenerat x'' (a se vedea teorema 2.1.1) este diferit de zero, ecuaţia (1.1.3) are o singură soluţie relativ la $\mathfrak{X}^*$.

Definiţia 2.2.3. Un nucleu cvasi-rezolvabil x_0 va fi numit de tip (MR^*) dacă $x_0 = x' + x''$ cu x' u-mărginit iar x'' regulat (definiţia 1.3.1) cu $\langle r, u \rangle = \langle u, r \rangle$, iar $\varepsilon < 1/\gamma^*$ unde $\gamma^* = \gamma(1 + \alpha^* \omega)$, α^*, fiind astfel încît $|\varphi'| \leqslant \alpha^* u$.

Observaţia 2.2.3. Să considerăm ecuaţia (1.1.2) cu nucleu de tip (MR^*). În acest caz, deoarece $|x''| \leqslant \varepsilon r$, ţinînd seama de observaţia 2.2.1 (în care considerăm $\lambda = 1$) vom avea, folosind (2.2.4)

$$|x^*| \leqslant |x''| + \langle |x''|, |\varphi'| \rangle \leqslant \varepsilon r + \langle \varepsilon r, \varphi' \rangle \leqslant \varepsilon r^* ,$$

unde $r^* = r + \langle r, \varphi' \rangle$.

Elementul r^* satisface condițiilor

i) $\langle r^*, u \rangle \leqslant \gamma^* u$

ii) $\langle r^*, r^* \rangle \leqslant \beta^* u$

unde β^* este un anumit număr real.

Într-adevăr

$$\langle r^*, u \rangle = \langle r, u \rangle + \langle \langle r, \varphi' \rangle, u \rangle \leqslant \gamma u + \langle \langle r, \alpha^* u \rangle, u \rangle =$$

$$= \gamma u + \alpha^* \langle r, \langle u, u \rangle \rangle \leqslant \gamma u + \alpha^* \langle r, \omega u \rangle \leqslant$$

$$\leqslant \gamma u + \alpha^* \omega \gamma u = (\gamma + \alpha^* \omega \gamma) u = \gamma^* u,$$

ceea ce stabilește condiția *i*).

Pentru *ii*) avem

$$\langle r^*, r^* \rangle = \langle r + \langle r, \varphi' \rangle, r + \langle r, \varphi' \rangle \rangle = \langle r, r \rangle + \langle r, \langle r, \varphi' \rangle \rangle +$$

$$+ \langle \langle r, \varphi' \rangle, r \rangle + \langle \langle r, \varphi' \rangle, \langle r, \varphi' \rangle \rangle \leqslant \beta u + \beta \langle u, \varphi' \rangle +$$

$$+ \alpha^* \langle \langle r, u \rangle, r \rangle + \alpha^{*2} \langle \langle r, u \rangle, \langle r, u \rangle \rangle \leqslant$$

$$\leqslant \beta u + \omega \alpha^* \beta u + \gamma^2 \alpha^* u + \omega \gamma^{2*} \alpha^2 u = \beta^* u,$$

notînd

$$\beta^* = (\beta + \gamma^2 \alpha^*)(1 + \omega \alpha^*).$$

Deoarece $\varepsilon < \frac{1}{\gamma^*}$ ecuației (2.2.5) (cu $\lambda = 1$) i se poate aplica teorema 1.3.2. Astfel, ecuația (1.1.2) cu nucleu de tip (MR^*) posedă o soluție unică,

Definiția 2.2.4. Un nucleu $x_0 \in \mathfrak{X}$ va fi numit de tip (AMR) dacă există $r \in \mathfrak{X}$, astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe o descompunere $x_0 = x'_\varepsilon + x''_\varepsilon$ cu x'_ε mărginit și $|x''_\varepsilon| \leqslant \varepsilon r$.

Observația 2.2.4. Orice nucleu care aparține unui K-spațiu regulat cu unitate în care $u = \mathbf{1}$ este de tip (AMR).

Într-adevăr, să definim

$$x_n = [(x_0)_+ \wedge n\mathbf{1}] - [(x_0)_- \wedge n\mathbf{1}].$$

Atunci $|x_n| \leqslant n\mathbf{1}$ și $x_n \xrightarrow{o} x$. Convergența în $\mathfrak{X}$ fiind o convergență cu regulator, există $r \in X$, astfel încît, oricare ar fi $\varepsilon > 0$

$$|x_0 - x_n| \leqslant \varepsilon r \qquad (n \geqslant n_\varepsilon).$$

Dacă notăm $x''_\varepsilon = x_0 - x_{n_\varepsilon}$ și $x'_\varepsilon = x_{n_\varepsilon}$, atunci $x_0 = x'_\varepsilon + x''_\varepsilon$ cu x'_ε mărginit și cu $|x''_\varepsilon| \leqslant \varepsilon r$.

Observația 2.2.5. Să considerăm ecuația (1.1.3) cu nucleu de tip (AMR) și să presupunem *) $\omega = 1$. Fie pentru un anumit ε, $x_0 = x'_\varepsilon + x''_\varepsilon$ cu $|x'_\varepsilon| \leqslant c_\varepsilon u$ și $|x'_\varepsilon| \leqslant \varepsilon r$. Pentru orice număr real ρ așa ca $0 < \rho < 1$,

*) Condiția nu este esențială.

vom nota prin $\nu = \nu_\rho^\varepsilon(\lambda)$ nucleul rezolvent al nucleului x'_ε definit pentru $|\lambda| \leqslant \rho \frac{1}{\alpha\varepsilon}$. Avem atunci

$$|\lambda\nu| \leqslant \sum_1^\infty |\lambda|^n |x'_\varepsilon|^n \leqslant \left(\sum_1^\infty |\lambda|^n \alpha_\varepsilon^n\right) u \leqslant \left(\sum_1^\infty \rho^n\right) u = \frac{\rho}{1-\rho} u.$$

Rezultă, în acest caz, că dacă

$$\langle u, r\rangle = \langle r, u\rangle \leqslant \gamma u$$

și

$$\langle r, r\rangle \leqslant \beta u$$

atunci, cu notațiile din definiția 2.2.3, se poate lua

$$\gamma^* = \gamma(1 + \alpha^*\omega) = \frac{\gamma}{1-\rho}$$

și dacă alegem $\varepsilon < \frac{1-\rho}{\gamma}$, λx_0 este de tip (MR^*) pentru *) $|\lambda| \leqslant \rho \frac{1}{\alpha_\varepsilon}$, cu $|\lambda x'_\varepsilon| \leqslant \rho u$.

Să notăm prin

$$a(\lambda;\ \rho,\ \varepsilon) = \left\langle \sum_{m=0}^\infty [\lambda x''_\varepsilon - \lambda^2 \langle x''_\varepsilon,\ \nu_\rho(\lambda)\rangle^m],\ y_0 \right\rangle.$$

Ecuația (1.1.3) va avea o soluție unică, pentru fiecare ρ și $|\lambda| \leqslant \rho \frac{1}{\alpha_\varepsilon}$ de forma

$$y = a(\lambda;\ \rho,\ \varepsilon) + \lambda \langle \nu_\rho^\varepsilon(\lambda),\ a(\lambda;\ \rho,\ \varepsilon)\rangle.$$

3. P-ortogonalitate

Vom presupune acum că $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ și ne vom referi la ecuația 1.1.3.

Definiție 2.3.1. Vom spune că elementele x și y sînt P-ortogonale dacă $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$. Vom nota aceasta prin xPy.

Exemple 2.3.1. 1° Dacă $\langle x, y\rangle = x \cdot y$, atunci $xPy \rightleftarrows x \perp y$.

2° Dacă $\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt$, xPy coincide cu noțiunea obișnuită de ortogonalitate a două funcții.

3° Dacă $\langle x, y\rangle = \overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y}$, atunci xPy reprezintă noțiunea de ortogonalitate în sensul lui Volterra, care intervine la descompunerea unor anumite nuclee.

4° Fie $\mathfrak{X} = \mathcal{C}_r$ și $\langle U, V\rangle = U[V]$. Atunci UPV înseamnă $U[V(y)] = 0$ și $V[U(y)] = 0$ pentru orice $y \in \mathfrak{Y}$.

*) Considerăm $\alpha_\varepsilon \geqslant 1$, ceea ce este totdeauna posibil.

Dacă $U(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$, atunci $V(\mathcal{Y}) = \mathbf{0}$ și analog, dacă $V(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$, atunci $U(\mathcal{Y}) = \mathbf{0}$.

Dacă $\mathcal{Y}_1$ și $\mathcal{Y}_2$ sînt două componente disjuncte ale lui $\mathcal{Y}$, formînd un sistem complet iar U aplică $\mathcal{Y}_1$ în $\mathcal{Y}_1$, V aplică $\mathcal{Y}_2$ în $\mathcal{Y}$, U și V fiind operații regulate, atunci dacă prelungim U și V pe tot $\mathcal{Y}$ prin valoarea $\mathbf{0}$, pe $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ respectiv, vom avea UPV. De remarcat că $U \perp V$ în sensul obișnuit, în acest caz.

Observația 2.3.1. Conform definiției 1.2.2., dacă P-operatorul $\langle x, y\rangle$ este V-disjunctiv, condiția $x \perp y$ implică xPy. Pentru un operator complet V-disjunctiv, relația xPy este echivalentă cu $x \perp y$.

Teorema 2.3.1. Fie x_0 un nucleu de forma $x_0 = x_1 + x_2$ cu $x_1 P x_2$ și să presupunem că λ nu este o valoare proprie pentru nucleele x_1 și x_2. Atunci, dacă φ_1 și φ_2 sînt nucleele rezolvente respectiv ale lui x_1 și x_2, nucleul rezolvent al nucleului x_0 va fi $\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2$.

Demonstrația este imediată.

Teorema 2.3.2. Dacă λ este o valoare proprie numai a lui x_2, iar w este o soluție a ecuației $y - \lambda\langle x_2, y\rangle = y_0$, atunci orice soluție a ecuației (1.1.3) este de forma

$$y = w - \lambda\langle \varphi_1, y_0\rangle.$$

Demonstrație. Avem:

$$y - \lambda\langle x_0, y\rangle = y - \lambda\langle x_1 + x_2, y\rangle = y - \lambda\langle x_1, y\rangle - \lambda\langle x_2, y\rangle = y_0.$$

Să punem

$$y - \lambda\langle x_2, y\rangle = z. \tag{2.3.1}$$

Vom avea atunci

$$z - \lambda\langle x_1, z\rangle = y_0. \tag{2.3.2}$$

Dacă φ_1 este nucleul rezolvent al lui x_1, atunci

$$z = y_0 - \lambda\langle \varphi_1, y_0\rangle \tag{2.3.3}$$

și ecuația (2.3.1) devine

$$y - \lambda\langle x_2, y\rangle = y_0 - \lambda\langle \varphi_1, y_0\rangle. \tag{2.3.4}$$

Din (2.3.2) deducem, folosind P-ortogonalitatea elementelor x_1, x_2,

$$\langle x_2, z\rangle = \langle x_2, y_0\rangle.$$

Folosind (2.3.3) obținem apoi

$$\langle x_2, \langle \varphi_1, y_0\rangle\rangle = \mathbf{0}.$$

Rezultă deci că ecuația

$$y - \lambda\langle x_2, y\rangle = -\lambda\langle \varphi_1, y_0\rangle$$

are o soluție de forma

$$y = -\lambda\langle \varphi_1, y_0\rangle \tag{2.3.5}$$

și astfel fiecare soluție a ecuației (2.3.5) corespunde unei soluții a ecuației

$$y - \lambda\langle x_2, y\rangle = y_0. \tag{2.3.6}$$

Dacă w este o soluție a ecuației (2.3.6) atunci

$$y = w - \lambda \langle v_1, y_0 \rangle$$

și propoziția este demonstrată.

Observația 2.3.2. Dacă ecuația (2.3.6) posedă un nucleu rezolvent v_2, atunci se obține și pe această cale teorema 2.3.1 ca o consecință a teoremei 2.3.2.

Observația 2.3.3. Dacă P-operatorul este V-disjunctiv, atunci orice nucleu este suma a două elemente P-ortogonale: $x = x_+ - x_-$.

Exemple 2.3.1. 1. În orice K-lineal $x = x_+ - x_-$ cu $x_+ \perp x_-$ deci, dacă $\langle x, y \rangle = x, y$, orice nucleu este suma a două nuclee P-ortogonale, unul pozitiv și altul negativ. Dacă $|x| \leqslant \alpha \mathbf{1}$, atunci pentru $\lambda < 1/\alpha$ vom avea

$$(\mathbf{1} - \lambda x)^{-1} = (\mathbf{1} - \lambda x_+)^{-1} + (\mathbf{1} + \lambda x_-)^{-1} - \mathbf{1},$$

precum și

$$(\mathbf{1} - |\lambda| x)^{-1} = (\mathbf{1} - \lambda x_+)^{-1} + (\mathbf{1} - \lambda x_-)^{-1} - \mathbf{1}.$$

2. Dacă $\mathfrak{X} = C[0,1]$ și $\langle x, y \rangle = \int xy$, atunci de asemenea, $x = x_+ - x_-$ cu $x_+, x_- \geqslant \mathbf{0}$ și $x_+ P x_-$.

Definiția 2.3.2. Vom spune că $\{x_n\}$ este un șir de elemente *P-ortoasociate*, dacă $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} x_i$, $(i, j = 1, 2, \ldots)$.

Elementele x_n sînt deci P-ortogonale două cîte două.

Definiția 2.3.3. Vom spune că x_0 este un nucleu de tip S, dacă el este de forma unei serii absolut (o)-convergente

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n, \tag{2.3.7}$$

unde $\{x_n\}$ este un șir de elemente P-ortoasociate, iar $\{\xi_n\}$ este un șir de numere reale pozitive care converge spre zero.

Observația 2.3.4. Dacă x_0 este de tip S și există un șir de elemente $\{y_n\}$, așa ca

$$\langle x_i, y_j \rangle = \beta_i \delta_{ij} y_i \quad , \quad (\beta \neq 0)$$

atunci y_j sînt elemente proprii pentru x_0. Într-adevăr din (2.3.7) deducem

$$\langle x_0, y_n \rangle = \xi_n \beta_n y_n$$

și $\lambda_n = \dfrac{1}{\xi_n \beta_n}$ sînt valori proprii ale lui x_0.

În particular, x_n sînt elemente proprii pentru x_0, iar $\lambda_n = \dfrac{1}{\xi_n}$ sînt valori proprii.

Observația 2.3.5. Dacă x_0 este de tip S, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt liniar independente, iar $x_m = \mathbf{0}$ pentru $m > n$, atunci x_0 este degenerat relativ la subspațiul liniar n-dimensional $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Teorema 2.3.3. Dacă ecuația (1.1.3) are un nucleu de tip S, atunci pentru $0 < \lambda < \inf_n (1/\xi_n)$ nucleul său rezolvent va fi de forma

$$\rho(\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{1 - \lambda \xi_n} x_n. \tag{2.3.8}$$

Demonstrație. Formula (2.3.8) se deduce din forma nucleului rezolvent, ținînd seama că $x_0^k = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$.

Exemple 2.3.2. 1° Fie $\langle x, y \rangle = \overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y}$ și $x_i(s,t) = y_i(s)\, y_i(t)$ unde $\{y_n\}$ este un șir de funcții ortogonale în sensul obișnuit. Atunci

$$\int_a^b x_i(s,\xi)\, x_j(\xi,t)\, d\xi = \int_a^b y_i(s)\, y_i(\xi)\, y_j(\xi)\, y_j(t)\, d\xi = \delta_{ij}\, x_i(s,t).$$

Deci $\{x_n\}$ este P-ortoasociat față de produsul de compoziție $\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y}$.

2°. Dacă $\langle x, y \rangle = x.y$ și $\{r_n\}$ este un șir de elemente P-ortoasociate, atunci $x_i.x_j = \delta_{ij}\, x_j$, adică $x_i \perp x_j$ pentru $i \neq j$ și $x_i.x_i = x_i$.

Rezultă că $\{x_n\}$ este un șir de elemente unitare disjuncte două cîte două

§ 3. APROXIMAREA SOLUȚIEI

Pentru rezolvarea ecuației (1.1.2) cu nucleul x_0 este uneori convenabil a considera un nucleu x_1, astfel încît înlocuirea lui x_0 prin x_1 să ne permită o rezolvare mai simplă a ecuației. Dacă evaluarea diferenței $x_0 - x_1$ este cunoscută, atunci putem da în unele cazuri formule de aproximare a soluției inițiale.

Propoziția următoare se referă la cazul cînd se cunoaște o majorantă a soluției.

Vom nota prin y soluția ecuației (1.1.2) și prin y_1 soluția ecuației

$$y' - \langle x_1, y' \rangle = y_0. \tag{3.1.1}$$

Vom presupune că x_0 și x_1 sînt de așa natură, încît ecuațiile au o soluție unică în $\mathcal{Y}$, soluția ecuației 3.1.1 fiind de forma 1.2.1 pentru orice y_0.

Teorema 3.1.1. Dacă $|x_0 - x_1| \leqslant z$ iar $|y| \leqslant w$, atunci

$$|y - y_1| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}{}' \left(|x_1|^n \langle z, w \rangle \right). \tag{3.1.2}$$

Demonstrație. Din

$$y = \langle x_0, y \rangle + y_0$$

$$y_1 = \langle x_1, y_1 \rangle + y_0$$

deducem

$$y - y_1 = \langle x_1, y - y_1 \rangle + \langle x_0 - x_1, y \rangle. \tag{3.1.3}$$

Să notăm

$$x^* = x_0 - x_1 \quad , \quad y^* = y - y_1.$$

Egalitatea (3.1.3) se va scrie în acest caz

$$y^* = \langle x_1, y^* \rangle + \langle x^*, y \rangle,$$

sau, notînd

$$y_2 = \langle x^*, y \rangle,$$

se va scrie

$$y^* = \langle x_1, y^* \rangle + y_2.$$

Această ecuație avînd o soluție unică

$$y^* = y - y_1,$$

vom avea

$$y^* = y_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_1^n y_-), \tag{3.1.4}$$

de unde

$$| y^* | \leqslant | y_2 | + \sum_{n=1}^{\infty} (| x_1 |^n | y_2 |,$$

sau, revenind la vechile notații

$$| y - y_1 | \leqslant | \langle x^*, y \rangle | + \sum_{n=1}^{\infty} (| x_1 |^n | \langle x^*, y \rangle |) \leqslant$$

$$\leqslant \langle | x_0 - x_1 |, | y | \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (| x_1 |^n \langle | x_0 - x_1 |, | y | \rangle).$$

Ținînd seama că $| x_0 - x_1 | \leqslant z$, $| y | \leqslant w$, obținem

$$| y - y_1 | \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (| x_1 |^n \langle z, w \rangle),$$

cu sens evident pentru $n = 0$, care este tocmai formula (3.1.2) din enunțul teoremei.

În restul paragrafului vom presupune $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1$.

Observația 3.1.1. Dacă $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1$, atunci propoziția precedentă se poate enunța astfel:

Dacă x_1 este un nucleu rezolvabil, $| x_0 - x_1 | \leqslant z$, $| y | \leqslant w$ atunci

$$| y - y_1 | \leqslant \langle z, w \rangle + \langle \langle | \varphi_1 |, z \rangle, w \rangle \tag{3.1.5}$$

φ_1 fiind nucleu rezolvent al lui x_1.

Observația 3.1.2. Dacă elementul u este un element P-neutru, atunci dacă φ este nucleul rezolvent al nucleului x, au loc egalitățile

$$\langle u - x, u - \varphi \rangle = \langle u - \varphi, u - x \rangle = u,$$

care se verifică cu ușurință. În acest caz vom nota $u - \varphi = (u - x)^{-1}$. După cum s-a arătat

$$(u - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x_1^n, \quad \text{cu} \quad x_1^0 = u.$$

Din (3.1.4) deducem atunci

$$|y - y_1| \leqslant \langle\langle |u - x_1|^{-1}, z\rangle, w\rangle. \tag{3.1.6}$$

Inegalitatea (3.1.6) se poate deduce și în modul următor. Avem

$$y - y_1 = \langle x_1, y - y_1\rangle + \langle x_0 - x_1, y\rangle,$$

de unde

$$\langle u - x_1, y - y_1\rangle = \langle x_0 - x_1, y\rangle,$$

și «înmulțind» cu $(u - x_1)^{-1}$

$$y - y_1 = \langle\langle (u - x)^{-1}, x_0 - x_1\rangle, y\rangle$$

de unde rezultă (3.1.6).

În teorema următoare vom introduce următoarea notație, care are sens pentru elemente u-mărginite:

$$\| x \|_u = \inf \{\lambda \mid |x| \leqslant \lambda u\}.$$

$\| x \|_u$ este cel mai mic λ așa ca $|x| \leqslant \lambda u$ și el există totdeauna pentru elemente u-mărginite.

Nucleul x_1 din ecuația 3.1.1 va fi presupus că posedă un nucleu rezolvent φ_1.

Teorema 3.1.2. Dacă se cunoaște z așa ca $|x_0 - x_1| \leqslant z$, iar $\langle x, y\rangle$ este mărginit pentru $x, y \in \{u, z, |y_1|, |\varphi_1|\}$, atunci se poate determina un număr λ pentru care

$$|y - y_1| \leqslant \lambda u$$

cu condiția ca $\omega \| \langle |\varphi_1|, z\rangle \|_u + \| \langle u, z\rangle \|_u < 1$.

Demonstrație. Notînd $x^* = x_0 - x_1$, $y^* = y - y_1$,

din (1.1.1) și (3.1.1.) obținem

$$y^* = \langle x_1, y^*\rangle + \langle x^*, y\rangle.$$

Notînd

$$y_2 = \langle x^*, y\rangle,$$

egalitatea precedentă devine

$$y^* = \langle x_1, y^*\rangle + y_2.$$

Această ecuație avînd o soluție unică, vom avea

$$y^* = y_2 + \langle \varphi_1, y_2\rangle,$$

de unde deducem

$$|y - y_1| = |y^*| \leqslant |y_2| + \langle |\varphi_1|, |y_2|\rangle = |\langle x^*, y\rangle| + \langle |\varphi_1|, |\langle x^*, y\rangle|\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \langle |x_0 - x_1|, |y|\rangle + \langle |\varphi_1|, \langle |x_0 - x_1|, |y|\rangle\rangle.$$

şi ţinînd seama că $|x_0 - x_1| \leqslant z$, obţinem

$$|y - y_1| \leqslant \langle z, |y| \rangle + \alpha \langle u, |y| \rangle, \tag{3.1.7}$$

unde $\alpha = \| \langle |\varphi_1|, z \rangle \|_u$. Dar

$$|y| \leqslant |y_1| + |y - y_1| \leqslant |y_1| + \langle z, |y| \rangle + \alpha \langle u, |y| \rangle$$

de unde

$$\langle u, |y| \rangle \leqslant \langle u, |y_1| \rangle + \beta \langle u, |y| \rangle + \alpha\omega \langle u, |y| \rangle,$$

cu $\beta = \| \langle u, z \rangle \|_u$. De aici obţinem

$$\langle u, |y| \rangle \leqslant \gamma u \text{ cu } \gamma = \frac{\| \langle u, |y_1| \rangle \|_u}{1 - \beta - \alpha\omega}. \tag{3.1.8}$$

Ţinînd seama de (3.1.8) obţinem de asemenea o relaţie de forma

$$\langle z, |y| \rangle \leqslant \delta u, \tag{3.1.9}$$

unde

$$\delta = \| \langle z, |y_1| \rangle \|_u + \gamma \| \langle z, z \rangle \|_u + \alpha\gamma \| \langle z, u \rangle \|_u.$$

Folosind (3.1.8) şi (3.1.9) în (3.1.7) obţinem o relaţie de forma enunţată în propoziţie cu $\lambda = \alpha\gamma + \delta$.

Exemplul 3.1.1. Fie dată în L^2 [0, 1] ecuaţia

$$y(t) - \int_0^t x_0(t - \xi)\, y(\xi)\, d\xi = y_0(t),$$

care să aibă o singură soluţie.

Dacă $x_1(t)$ este un nucleu convenabil pentru care se cunoaşte evaluarea

$$|x_0(t) - x_1(t)| \leqslant z(t)$$

iar, φ_1 fiind nucleul rezolvent al lui x_1, este îndeplinită condiţia

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^t [1 + |\varphi_1(t - \xi)|]\, z(\xi)\, d\xi < 1,$$

atunci se poate găsi un număr real λ, aşa ca

$$|y(t) - y_1(t)| \leqslant \lambda,$$

unde $y_1(t)$ este soluţia aceleiaşi ecuaţii prin înlocuirea lui $x_0(t)$ prin $x_1(t)$.

Într-adevăr, oricare ar fi x şi y

$$\int_0^t x(t - \xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

este o funcţie mărginită [13] şi se poate aplica teorema 3.1.2 pentru $u \equiv 1$.

PARTEA A DOUA

CAPITOLUL III

INTEGRAREA ÎN RAPORT CU UN *P*-OPERATOR

Integrarea funcțiilor vectorial-valorificate, dezvoltarea unei teorii abstracte a integrării, a constituit și constituie o problemă de mare importanță în analiza funcțională. Această problemă a atras atenția unui mare număr de matematicieni, mai ales după anul 1926. În anul 1927, L. M. Graves a extins noțiunea de integrală în sensul lui Riemann pentru funcții abstracte [16]. Solomon Bochner generalizează în anul 1933 integrala lui Lebesgue pentru funcții cu valori într-un spațiu liniar normat, arătînd că principalele proprietăți se mențin [17]. El dă o serie de aplicații ale acestei integrale abstracte. O generalizare a integralei Lebesgue pentru spații Banach a fost dată de asemenea și de G. Birkhoff, în anul 1935 [18]. Trei definiții ale integralei unei funcții vectoriale au fost date de N. Dunford (în 1935, 1936 și 1938) [19], [20], [21]. Alte două extinderi aparțin lui I. Gelfand, una în 1936, alta în 1938 [22], [23]. B. J. Pettis dă de asemenea o definiție a integralei funcțiilor cu valori în spații Banach în 1938 [24]. Se arată că unele din definițiile date de diferiți autori sînt echivalente. Multe propoziții din teoria clasică a funcțiilor au fost extinse la spații vectoriale folosind în special integrala lui Pettis ca o formă slabă a integralei, și integrala lui Bochner ca o formă tare a acestei noțiuni.

În spațiile liniare semiordonate au fost făcute de asemenea diferite extinderi ale noțiunii de integrală. În anul 1939 S. Bochner definește noțiunea de integrală (tip Lebesgue) a unei funcții cu valori într-un K-spațiu regulat, arătînd că se mențin proprietățile obișnuite ale integralei Lebesgue [30]. Integrala lui Bochner a fost extinsă de noi în 1952 pentru cazul cînd nu numai funcția are valori într-un spațiu semiordonat, dar și măsura are de asemenea valori într-un astfel de spațiu [26]. Extinderea noastră a folosit în rolul de produs un P-operator. Toate proprietățile fundamentale ale integralei lui Bochner au fost păstrate.

Alte definiții de integrale au fost date de S. Bochner și Ky Fan în 1947, care introduc o integrală pentru funcții reale în raport cu o funcție de interval nenegativă și finit-aditivă cu valori parțial ordonate [27]; de B. Z. Vulih în 1947, care extinde noțiunea de integrală Stieltjes pentru funcții cu valori într-un K-spațiu cu unitate, folosind produsul introdus de el în aceste spații; de V. I. Sobolev în 1953, care definește o integrală tip Lebesgue pentru funcții reale și pentru o anumită măsură semiordonată [28].

În acest capitol vom prezenta o teorie a integrării tip Lebesgue în spațiile liniare semiordonate pentru funcții și măsură semiordonată. Tratarea noastră va avea ca bază lucrarea anterioară susmenționată, făcîndu-se însă unele extinderi și diverse completări. Printre altele vom considera cazul spațiilor semiordonate complexe. În capitolul următor vor fi date unele aplicații ale teoriei integrării.

Pentru construirea unei teorii generale tip Lebesgue a integrării, considerăm două spații liniare semiordonate $\mathcal{T}$ și $\mathcal{M}$ (disticte sau nu), unul conținînd valorile funcției, altul valorile măsurii. Luăm în rolul de produs un P-operator cu valori într-un spațiu liniar semiordonat $\mathcal{J}$, care va conține valoarea integralei. Pentru ca operația de integrare să fie mai aproape de cerințele ce

se ivesc în teoria spațiilor liniare semiordonate, o definim ca o extindere directă a integralei lui Bochner. Integrala noastră se reduce la aceasta din urmă în cazul cînd $\mathcal{M} = R$, iar P-operatorul coincide cu produsul cu scalari dintr-un spațiu vectorial. În cazul cînd dimpotrivă $\mathcal{T} = R$ și P-operatorul este același produs cu scalari, se obține o integrală pentru funcții reale în raport cu o măsură complet aditivă semiordonată, care are diverse aplicații. Această integrală coincide în anumite cazuri cu integrala lui Sobolev. În sfîrșit, o anumită importanță prezintă cazul cînd $\mathcal{T}$ și $\mathcal{M}$ sînt diferite între ele, cum ar fi de exemplu în reprezentarea unor operații liniare. Arbitrarietatea «produsului» dă de asemenea posibilități diverse în privința aplicațiilor.

Pe lîngă expunerea teoriei generale tip Lebesgue a integrării în spațiile liniare semiordonate, vom face scurte discuții privitor la alte tipuri de integrale.

Considerațiile noastre vor fi precedate de un paragraf relativ la funcții cu valori semiordonate.

§ 1. FUNCȚII SEMIORDONATE. MĂSURĂ SEMIORDONATĂ

Încă din anul 1936, de la începutul dezvoltării teoriei K-spațiilor, L. V. Kantorovici atrage atenția asupra posibilității și importanței dezvoltării unei teorii a funcțiilor de variabilă reală cu valori într-un spațiu liniar semiordonat. El face o schiță a principalelor noțiuni care ar prezenta interes în această teorie [29]. Kantorovici remarcă, în ceea ce privește teoria integrării că, studiul funcțiilor cu valori într-un spațiu semiordonat prezintă o anumită importanță chiar pentru funcțiile ordinare numerice de variabilă reală. Diferite considerații asupra funcțiilor cu valori în spații lineare parțial ordonate au fost făcute de S. Bochner [30], [25] și de B. Z. Vulih. Printre alte lucrări în acest domeniu amintim încă pe aceea a lui A. O'Neill, privitor la teoria derivatei [31], precum și pe cea a lui B. P. Frumkin, în legătură cu extinderea teoremei lui Egorov [32].

1. Generalități

Pentru precizarea limbajului vom introduce

Definiția 1.1.1. Fie T o mulțime arbitrară de elemente și $\mathcal{T}$ un spațiu liniar σ-semiordonat. O aplicație a lui T în $\mathcal{T}$ va fi numită *funcție semiordonată**). Vom nota o astfel de funcție prin $x(t)$, unde $t \in T$.

Mai introducem cîteva definiții.

Definiția 1.1.2. O funcție semiordonată $x(t)$ va fi numită *mărginită*, dacă există $q \in \mathcal{T}$, așa ca $|x(t)| \leqslant q$, oricare ar fi $t \in T$.

Definiția 1.1.3. Vom spune că funcția semiordonată $x(t)$ este *simplă*, dacă ia numai un număr finit de valori $c_1, c_2, \ldots, c_n$. O vom nota prin $\{c_1, S_1;\ c_2, S_2, \ldots, c_n, S_n)\}$, unde $S_i \cap S_j = \varnothing$ pentru $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = T$, iar $c_i = x(t)$ pentru $t \in S_i$.

Dacă $\gamma_A(t)$ este funcția caracteristică (reală) a mulțimii A, atunci o funcție semiordonată simplă se poate de asemenea scrie

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_{Ai}(t).$$

*) Cînd nu va exista pericol de confuzie, vom omite uneori cuvîntul semiordonată.

Dacă $x(t)$ este simplă, atunci și $[x(t)]_+$, $[x(t)]_-$, $|x(t)|$ sînt simple. Mai mult, dacă $x(t)$ și $y(t)$ sînt simple, atunci și $x(t) \wedge y(t)$, $x(t) \vee y(t)$ precum și $\alpha x(t) + \beta y(t)$, pentru α, β reale, sînt simple.

Definiția 1.1.4. O funcție semiordonată $x(t)$ de variabilă reală este *continuă* în t_0, dacă pentru $t_n \to t_0$, $x(t_n) \xrightarrow{o} x(t_0)$.

Definiția 1.1.5. Funcția $x(t)$ de variabilă reală va fi numită *regulat continuă* în t_0, dacă există $r(t_0) \in \mathcal{F}$ (regulator de continuitate), astfel ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe η_ε, așa ca

$$|x(t) - x(t_0)| \leqslant \varepsilon r(t_0), \text{ dacă } |t - t_0| \leqslant \eta_\varepsilon.$$

Dacă spațiul $\mathcal{F}$ este un K-spațiu regulat, atunci cele două definiții sînt echivalente (a se vedea și [45]).

Următoarele două definiții consideră funcții definite pe un segment al dreptei reale.

Definiția 1.1.6. Funcția $x(t)$ va fi numită *uniform continuă* pe $[a, b]$ dacă

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leqslant u(\delta) \text{ pentru } |t_2 - t_1)| \leqslant \delta,$$

unde $u(\delta_n) \searrow 0$ cînd $\delta_n \searrow 0$.

O funcție uniform continuă este mărginită.

Definiția 1.1.7. Funcția $x(t)$ va fi numită *uniform-regulat-continuă* pe $[a, b]$, dacă este regulat-continuă în orice punct, iar regulatorul de continuitate nu depinde de argumentul t.

Dacă spațiul $\mathcal{F}$ este un K-spațiu regulat, definițiile (1.1.6) și (1.1.7) sînt echivalente.

Vom introduce acum cîteva definiții privitor la convergența șirurilor de funcții semiordonate. Unele dintre definiții vor fi introduse după ce vom da definiția noțiunii de măsură semiordonată.

Definiția 1.1.8. Vom spune că șirul $\{x_n(t)\}$ converge către $x(t)$, dacă pentru orice t, $x_n(t) \xrightarrow{o} x(t)$ ca elemente ale spațiului $\mathcal{F}$; $|x_n(t) - x(t)| \leqslant u_n(t)$ cu $u_n(t) \searrow 0$ pentru orice t.

Definiția 1.1.9. Vom spune că șirul $\{x_n(t)\}$ converge *uniform* către $x(t)$ dacă, oricare ar fi t, există un șir de elemente $u_n \searrow 0$, așa ca

$$|x_n(t) - x(t)| \leqslant u_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Vom nota:

$$x_n(t) \xrightarrow{u} x(t).$$

Vom spune că șirul converge *uniform-regulat*, dacă există $r \in \mathfrak{X}$, astfel încît

$$|x_n(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon r \text{ pentru } n \geqslant n_\varepsilon (\varepsilon > 0, \text{ real și arbitrar}).$$

În spațiile de tip (R) aceste noțiuni coincid.

T e o r e m a 1.1.1. Şirurile uniform convergente au următoarele proprietăţi:

1) $x_n(t) \xrightarrow{u} x(t)$, $y_n(t) \xrightarrow{u} y(t)$ implică $x_n(t) + y_n(t) \xrightarrow{u} x(t) + y(t)$;

2) $x_n(t) \xrightarrow{u} x(t)$ implică $< c, x_n(t) > \xrightarrow{u} < c, x(t) >$ pentru orice P-operator (o)-continuu în al doilea argument;

3) $x_n(t) \xrightarrow{u} x(t)$, $y_n(t) \xrightarrow{u} y(t)$ implică $x_n(t) \wedge y_n(t) \xrightarrow{u} x(t) \wedge y(t)$ şi $x_n(t) \vee y_n(t) \xrightarrow{u} x(t) \vee y(t)$;

4) un şir uniform convergent de funcţii către o funcţie mărginită este mărginit;

5) dacă $x_n(t) \xrightarrow{u} x(t)$, $y_n(t) \xrightarrow{u} y(t)$ iar $x(t)$ şi $y(t)$ sînt mărginite, atunci pentru un P-operator parţial (o)-continuu, $< x_n(t), y_n(t) > \xrightarrow{u} < x(t), y(t) >$. În particular, dacă $\lambda_n \to \lambda$ (numere reale) iar $x_n(t) \xrightarrow{u} x(t)$ cu $x(t)$ mărginită, atunci $\lambda_n x_n(t) \xrightarrow{u} \lambda x(t)$;

6) Dacă într-un spaţiu de tip (R^*) şirul $\{x_n(t)\}$ de funcţii uniform-continue converge uniform către funcţia $x(t)$, atunci $x(t)$ este uniform-continuă.

D e m o n s t r a ţ i e. 1) Rezultă din

$$|[x_n(t) + y_n(t)] - [x(t) + y(t)]| \leqslant |x_n(t) - x(t)| + |y_n(t) - y(t)| \leqslant u_n + v_n$$

2) Avem $< |c|, |x_n(t) - x(t)| > \leqslant < |c|, v_n > \xrightarrow{o} \mathbf{0}$.

3) Vom arăta mai întîi că $[x_n(t)]_+ \xrightarrow{u} [x, (t)]_+$ şi $[x_n(t)]_- \xrightarrow{u} [x(t)]_-$. Aceasta rezultă din inegalităţile

$$|[x_n(t)]_+ - [x(t)]_+| \leqslant |x_n(t) - x(t)|,$$

respectiv

$$|[x_n(t)]_- - [x(t)]_-| \leqslant |x_n(t) - x(t)|.$$

Prima parte a propoziţiei 3) rezultă apoi din relaţiile

$$|x_n(t) \vee y_n(t) - x(t) \vee y(t)| = |[x_n(t) + (y_n(t) - x_n(t))_+] -$$

$$- [x(t) + (y(t) - x(t))_-]| = |[x_n(t) - x(t)] + [(y_n(t) - x_n(t))_+ - (y(t) -$$

$$- x(t))_+]| \leqslant |x_n(t) - x(t)| + |(y_n(t) - x_n(t))_+ - (y(t) - x(t))_+|,$$

ţinînd seama şi de propoziţia 1).

Cealaltă afirmaţie rezultă din faptul că

$$x(t) \wedge y(t) = -[(-x(t)) \vee (-y(t))],$$

ţinînd seama de rezultatul precedent

4) Avem

$$|x_n(t)| - |x(t)| \leqslant |x_n(t) - x(t)| \leqslant u_n \leqslant u$$

deoarece $u_n \searrow 0$ și deci formează un șir mărginit. De aici:

$$| x_n(t) | \leqslant u + | x(t) | \leqslant u + q,$$

dacă $| x(t) | \leqslant q$.

5) Fie $| x(t) | \leqslant q$ și $| y_n(t) | \leqslant r$. Avem

$$| \langle x_n(t), y_n(t) \rangle - \langle x(t), y(t) \rangle | \leqslant | \langle x_n(t), y_n(t) \rangle - \langle x(t), y_n(t) \rangle | +$$

$$+ | \langle x(t), y_n(t) \rangle - \langle x(t), y(t) \rangle | = | \langle x_n(t) - x(t), y_n(t) \rangle | +$$

$$+ | \langle x(t), y_n(t) - y(t) \rangle | \leqslant \langle u_n, r \rangle + \langle q, \varrho_n \rangle \overset{o}{\to} 0$$

ținînd seama de (4).

6) Pentru un indice n convenabil ales, vom avea

$$| x(t) - x(t_0) | \leqslant | x(t) - x_n(t) | + | x_n(t) - x_n(t_0) | + | x_n(t_0) - x(t_0) | \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} r + | x_n(t) - x_n(t_0) | + \frac{\varepsilon}{2} r = \varepsilon r + | x_n(t) - x_n(t_0) |.$$

Funcțiile $x_n(t)$ fiind uniform continue, iar spațiul de tip (R^*), există r', așa ca

$$| x_n(t) - x_n(t_0) | \leqslant \varepsilon r' \quad \text{dacă} \quad | t - t_0 | \leqslant \eta_{\varepsilon, n}.$$

Notînd $r'' = r + r'$, vom avea

$$| x(t) - x(t_0) | \leqslant \varepsilon r'' \qquad \text{dacă} \quad | t - t_0 | \leqslant \eta_\varepsilon.$$

ceea ce demonstrează afirmația noastră.

Nu ne vom ocupa în prezenta lucrare de teoria derivării funcțiilor semiordonate. Vom utiliza ocazional următoarea definiție a derivatei:

$$x'(t) = (o) - \lim_n \frac{1}{k_n} [x(t + k_n) - x(t)],$$

în cazul cînd această limită există indiferent cum $k_n \to 0$, considerînd cazul K-spațiilor regulate.

Au loc egalitățile

i) $[x(t) + y(t)]' = x'(t) + y'(t)$

ii) $\langle x(t), y(t) \rangle' = \langle x'(t), y(t) \rangle + \langle x(t), y'(t) \rangle$

pentru orice P-operator (o)-bicontinuu (presupunînd că derivatele există).

În particular $[\lambda x(t)]' = \lambda x'(t)$ pentru λ real.

2. Măsură semiordonată

Fie T o mulțime arbitrară de elemente și $\mathfrak{T}$ o familie complet aditivă de părți ale lui T, adică satisfăcînd condițiile:

i) $\varnothing \in \mathfrak{T}$;

ii) dacă $S \in \mathfrak{T}$ atunci și $\complement S \in \mathfrak{T}$;

iii) dacă pentru orice n natural $S_n \in \mathfrak{T}$, atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{T}$. Mulțimile familiei $\mathfrak{T}$ le vom numi măsurabile $(\mathfrak{T})$.

D e f i n i ț i a 1.2.1. O aplicație $m(A)$ a lui $\mathcal{C}$ în spațiul $l.\sigma$-$s.$ $\mathcal{M}$ va fi numită o *măsură semiordonată* dacă satisface condițiilor

1) $m(A) \geqslant 0$ pentru orice $A \in \mathcal{C}$.

2) Dacă $\{A_n\}$ este un șir de mulțimi măsurabile $(\mathcal{C})$ disjuncte două cîte două, atunci

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Elementul $m(A) \in \mathcal{M}$ va fi numit măsura lui A.

Dacă este îndeplinită condiția 2) numai pentru un număr finit de mulțimi $\{A_i\}$, vom spune că m este o funcție pozitivă finit-aditivă de mulțimi. Se observă că orice măsură*) este și o funcție pozitivă finit-aditivă de mulțimi.

Măsura m va fi presupusă *finită*, adică $m(T) < \infty$.

T e o r e m a 1.2.1. Măsura semiordonată posedă următoarele proprietăți:

a) $m(\varnothing) = 0$;

b) dacă $A \subset B$ $(A, B \in \mathcal{C})$, atunci $m(A) \leqslant m(B)$;

c) $m(A - B) = m(A) - m(B)$;

d) oricare ar fi șirul $\{A_n\}$ de mulțimi măsurabile $(\mathcal{C})$,

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n);$$

e) dacă $\{A_n\}$ este un șir de mulțimi măsurabile $(\mathcal{C})$ monoton crescător sau monoton descrescător atunci

$$(o)\text{-}\lim_{n} m(A_n) = m(\lim A_n);$$

f) dacă m este o funcție pozitivă finit-aditivă de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{M}$ (primind valori finite) și care este superior semicontinuă pe $\varnothing$ sau inferior semicontinuă pe orice $A \in \mathcal{C}$, atunci m este o măsură.

Demonstrația acestor proprietăți se face ca și pentru măsura reală [33].

Dacă $T = R$ și $\mathcal{C}$ conține toate mulțimile boreliene, atunci măsurii m (o presupunem finită) cu valori într-un spațiu $l.\sigma$-$s.$ i se asociază funcția semiordonată

$$m(t) = m((-\infty, t)).$$

Avem

$$(o)\text{-}\lim_{t_n \searrow -\infty} m(t_n) = 0$$

$$(o)\text{-}\lim_{t_n \nearrow +\infty} m(t_n) = m(-\infty, +\infty).$$

Dacă $\Delta = [a, b)$, atunci

$$m(\Delta) = m(b) - m(a).$$

Funcția $m(t)$ este pozitivă, monoton crescătoare și continuă la stînga. Faptul că este pozitivă și monoton crescătoare rezultă din pozitivitatea măsurii. Continuitatea la stînga rezultă din faptul că pentru $t_n < t_0$

$$m(t_0) - m(t_n) = m([t_n, t_0)),$$

și cînd $t_n \nearrow t_0$, $[t_n, t_0) \searrow \varnothing$ și deci $m([t_n, t_0)) \xrightarrow{o} 0$.

*) Vom omite uneori cuvîntul semiordonată, pentru simplificarea limbajului.

Se observă de asemenea că dacă $m(\{t_0\})=0$ atunci, pentru $t_0 < t_n$ și $t_n \searrow t_0$

$$m(t_n) - m(t_0) = m([t_0\, t_n)) \xrightarrow{o} 0,$$

deci $m(t)$ este continuă în toate punctele de măsură nulă.

Vom numi $m(t)$ *funcția de distribuție* asociată măsurii $m(A)$.

Reciproc, fiind dată o funcție de distribuție $m(A)$, cu valori într-un K-spațiu regulat, se poate construi o măsură pe o familie $\mathfrak{T}$ cuprinzînd toate mulțimile boreliene ale dreptei, așa ca $m([a, b)) = m(b) - m(a)$ și $m(\{t\}) = m(t+0) - m(t)$. Procedeul este analog celui utilizat la măsura Lebesgue-Stieltjes.

Exemple 1.2.1. 1° Fie $\mu(A)$ o măsură reală definită pe $\mathfrak{T}$ și m_0 un element pozitiv arbitrar din spațiul $l.\sigma$-s. $\mathfrak{X}$. Funcția $m(A) = \mu(A)\, m_0$ este o măsură semiordonată de la $\mathfrak{T}$ la $\mathfrak{X}$. Această măsură poate avea divizori ai lui zero față de produsul lui Vulih. Dacă spațiul are unitate $\mathbf{1}$ și luăm $m_0 = \mathbf{1}$, atunci măsura respectivă se comportă față de produsul lui Vulih ca și o măsură reală.

2° Fie acum iarăși o măsură reală μ pe $\mathfrak{T}$ și $f(t)$ o funcție semiordonată definită pe T (cu valori în spațiul $l.\sigma$-s. de tip (R^*) $\mathfrak{X}$) care este pozitivă și integrabilă în sensul lui Bochner. Atunci

$$m(A) = \int_A f(t)\, d\mu(t)$$

este o măsură semiordonată de la $\mathfrak{T}$ la $\mathfrak{X}$. Această măsură este o funcție semiordonată de mulțimi, absolut continuă în raport cu măsura reală μ. Reciproca nu este însă adevărată, adică o măsură semiordonată absolut continuă în raport cu o măsură reală μ nu poate fi pusă în general sub forma integrală de mai sus. Un caz în care măsura este o integrală nedefinită este, de exemplu, acela al spațiilor L^p cu $p > 1$ (această observație o face Bochner [30] pentru funcțiile de mulțime).

3. Un alt exemplu de măsură semiordonată este măsura construită (în anul 1953) de V. I. Sobolev [28] folosind descompunerea unității unui inel semiordonat.

3. Moduri de convergență

Vom studia acum cîteva moduri de convergență ale funcțiilor definite pe o mulțime T cu valori într-un spațiu $l.\sigma$-s.$\mathfrak{F}$, astfel încît pe o familie $\mathfrak{T}$ de părți c.a.*) a lui T să fie definită o măsură semiordonată m (cu valori într-un spațiu $l.\sigma$-s. $\mathfrak{M}$.

Definiția 1.3.1. Vom spune că șirul de funcții $\{x_n(t)\}$ converge aproape uniform (prescurtat *a.u.*) pe $T' \in \mathfrak{T}$ către $x(t)$, dacă există un element p (regulator al măsurii), astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $T_\varepsilon \subset T'$ (cu $T_\varepsilon \in \mathfrak{T}$) și $m([T' T_\varepsilon]) \leqslant \varepsilon p$ iar $x_n(t) \xrightarrow{u} x(t)$ pentru $t \in T_\varepsilon$.

Observația 1.3.1. Dacă $\mathcal{M}$ este un spațiu de tip (R), atunci definiția precedentă poate fi enunțată cu condițiile următoare:

Există un șir de mulțimi $\{T_k\} \subset \mathfrak{T}$, astfel încît $x_n(t) \xrightarrow{u} x(t)$ pentru $t \in T_k$, iar $m([T_k]) \xrightarrow{o} 0$.

*) Prin c.a. înțelegem complet-aditivă.

Necesitatea acestei condiții este evidentă, căci se poate alege un șir $\{\varepsilon_i\}$, așa ca $\varepsilon_i \searrow 0$ în definiția 1.3.1.

Suficiența rezultă din faptul că convergența în $\mathscr{M}$ fiind cu regulator, există p (regulatorul de convergență al șirului $m([T_k])$), astfel încît $m([T_k]) \leqslant \varepsilon p$ dacă $k \geqslant k_\varepsilon$. Deci pentru ε arbitrar există $T'_\varepsilon = T_{k\varepsilon}$, care satisface definiției 1.3.1.

Definiția 1.3.2. Vom spune că șirul de funcții $\{x_n(t)\}$ converge aproape peste tot pe mulțimea măsurabilă S către $x(t)$ dacă există mulțimea măsurabilă $S_0 \subset S$ cu $m([_S S_0) = 0$ și $x_n(t) \to x(t)$ pentru $t \in S_0$.

Teorema 1.3.1. Dacă un șir $\{x_n(t)\}$ converge aproape uniform pe T către $x(t)$, atunci el converge și aproape peste tot pe T către $x(t)$.

Demonstrație. Fie $\{\varepsilon_k\}$ un șir de numere reale care converge descrescînd către zero. Șirul de funcții $\{x_n(t)\}$ fiind aproape uniform convergent pe T către $x(t)$, pentru orice număr ε_k din șirul considerat, există mulțimea $T_k \subset T$ măsurabilă $(\mathscr{C})$, astfel încît $m([T_k) \leqslant \varepsilon_k p$, pentru un regulator al măsurii p și

$$|x_n(t) - x(t)| \leqslant u_n(\varepsilon_k) \quad \text{pentru} \quad t \in T_k$$

unde $u_n(\varepsilon_k) \overset{o}{\to} 0$ cînd $n \to \infty$, oricare ar fi k.

Să notăm cu $T_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ și să considerăm mulțimile

$$T_1^* = T_1, \quad T_2^* = T_2 \cap [T_1, \quad T_3^* = T_3 \cap [T_2 \cap [T_1, \ldots$$

Se verifică că $T_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k^*$ și $T_i^* \cap T_j^* = \Phi$ pentru $i \neq j$.

Vom defini acum pentru orice indice n, funcția $u_n(t)$ prin:

$$u_n(t) = u_n(\varepsilon_k) \text{ dacă } t \in T_k^*.$$

Cu această definiție, $\{u_n(t)\}$ este un șir de funcții semiordonate de la T la $\mathfrak{X}$ și satisface condiția (o)-$\lim_n u_n(t) = 0$ oricare ar fi $t \in T$.

Din $T_k^* \subset T$, rezultă

$$|x_n(t) - x(t)| \leqslant u_n(t)$$

dacă $t \in T_k^*$, oricare ar fi k, ceea ce înseamnă că inegalitatea aceasta are loc pentru orice $t \in T_0$. Șirul $\{x_n(t)\}$ converge astfel către $x(t)$ pe T_0.

Pe de altă parte, din relațiile

$$m([T_0) = m([\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k) = m(\bigcap_{k=1}^{\infty} [T_k) \leqslant m([T_k) \leqslant \varepsilon_k p$$

oricare ar fi k, rezultă $m([T_0) = 0$. În baza definiției 1.3.2 putem afirma că $\{x_n(t)\}$ converge aproape peste tot către $x(t)$ și propoziția este demonstrată.

Are loc de asemenea următoarea teoremă, analogă teoremei clasice a lui Fréchet.

Teorema 1.3.2. Dacă spațiile $\mathscr{F}$, $\mathscr{M}$ sînt de tip (R^*), iar

$$x_i^k(t) \overset{a.u.}{\to} x_i(t) \qquad (k \to \infty)$$

și

$$x_i(t) \overset{a.u.}{\to} x(t) \qquad (i \to \infty),$$

atunci există un subșir crescător de indici $\{k_i\} \subset \{k\}$, așa ca

$$x_i^{k_i}(t) \overset{a.u.}{\to} x(t)$$

Demonstrație. Fie

$$x_i^k(t) \overset{a.u.}{\to} x_i(t)$$

pentru $k \to \infty$ și p_i un regulator al măsurii corespunzător.

Fie $\{\varepsilon_i\}$ un șir arbitrar de numere reale pozitive. Există atunci mulțimile măsurabile $(\mathfrak{T})$, $S_{\varepsilon_i}^i$, astfel încît

$$|x_i^k(t) - x_i(t)| \leqslant u_i^k(\varepsilon_i) \text{ pentru } t \in S_{\varepsilon_i}^i \text{ cu } m([S_{\varepsilon_i}^i) \leqslant \varepsilon_i p_i, \qquad (1.3.1)$$

unde pentru orice i, $(o)\text{-}\lim_k u_i^k(\varepsilon_i) = 0$. De asemenea, pentru ε_0 arbitrar există $S_{\varepsilon_0}^0$, așa ca

$$|x_i(t) - x(t)| \leqslant \varphi_i(\varepsilon_0), \text{ pentru } t \in S_{\varepsilon_0}^0 \text{ cu } m([S_{\varepsilon_0}^0) \leqslant \varepsilon_0 p_0, \qquad (1.3.2)$$

p_0 fiind un regulator al măsurii, iar $\varphi_i(\varepsilon_0) \overset{o}{\to} 0$.

Spațiul $\mathcal{M}$ fiind de tip (R^*), există un șir de numere reale $\{\lambda_i'\}$ care anulează șirul $\{p_i\}$, adică

$$(o)\text{-}\lim_i \lambda_i p_i = 0.$$

Șirul $\{\lambda_i p_i\}$ este astfel mărginit, deci există p^* așa ca $\lambda_i p_i \leqslant p^*$.

Fie acum $\varepsilon > 0$ arbitrar și să alegem $\varepsilon_i = (\lambda_i/2^{i+1})\,\varepsilon$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$.

Relațiile (1.3.1) și (1.3.2) pot fi scrise în acest caz:

$$|x_i^k(t) - x_i(t)| \leqslant u_i^k(\varepsilon) \qquad \text{pentru } t \in S_\varepsilon^i \quad \text{cu } m([S_\varepsilon^i) \leqslant \frac{1}{2^{i+1}}\varepsilon\, p^*, \qquad (1.3.1')$$

$$|x_i(t) - x(t)| \leqslant \varphi_i(\varepsilon) \qquad \text{pentru } t \in S_\varepsilon^0 \quad \text{cu } m([S_\varepsilon^0) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon\, p^*, \qquad (1.3.2')$$

unde

$$(o)\text{-}\lim_k u_i^k(\varepsilon) = 0 \qquad \text{și} \qquad (o)\text{-}\lim_i \varphi_i(\varepsilon) = 0.$$

Să considerăm mulțimea $S_\varepsilon^* = \bigcap_{i=0}^{\infty} S_\varepsilon^i$. Avem

$$m([S_\varepsilon^*) = m([\bigcap_i S_\varepsilon^i) = m(\bigcup_i [S_\varepsilon^i) \leqslant \sum_i m([S_\varepsilon^i) \leqslant \sum_i \frac{1}{2^{i+1}}\varepsilon\, p^* = \varepsilon\, p^*.$$

Din (1.3.1') și (1.3.2') deducem atunci:

$$\left.\begin{aligned} |x_i^k(t) - x_i(t)| &\leqslant u_i^k(\varepsilon) \\ |x_i(t) - x(t)| &\leqslant \varphi_i(\varepsilon) \end{aligned}\right\} \text{ pentru } t \in S_\varepsilon^* \quad \text{cu } m([S_\varepsilon^*) \leqslant \varepsilon\, p^*.$$

Deoarece $u_i^k(\varepsilon) \searrow 0$ cînd $k \to \infty$, iar spațiul $\mathcal{F}$ este de tip (R^*), există șirul de indici $\{k_i\}$, astfel încît $u_i^{k_i} \overset{o}{\to} 0$. Pentru orice $t \in S_\varepsilon^*$ avem

$$|x_i^{k_i}(t) - x(t)| \leqslant |x_i^{k_i}(t) - x_i(t)| + |x_i(t) - x(t)| \leqslant u_i^{k_i}(\varepsilon) + \varphi_i(\varepsilon).$$

Dacă notăm $w_i(\varepsilon) = u_i^{ki}(\varepsilon) + v_i(\varepsilon)$, atunci $w_i(\varepsilon) \overset{o}{\to} 0$ și $|x_i^{ki}(t) - x(t)| \leqslant w_i(\varepsilon)$ pentru $t \in S_\varepsilon^*$ cu $m([S_\varepsilon^*]) \leqslant \varepsilon p^*$. Această relație ne arată că $\{x_i^{ki}(t)\}$ converge uniform pe S_ε^* către $x(t)$, de unde datorită arbitrarietății lui ε, rezultă că șirul amintit converge aproape uniform către $x(t)$. Teorema este astfel demonstrată.

Definiția 1.3.3. Vom spune că șirul de funcții $\{x_n(t)\}$ converge în măsură cu regulatorul ν către $x(t)$, dacă oricare ar fi numerele $\varepsilon > 0$ și $\delta > 0$ există $T_{n,\delta} \in \mathfrak{T}$ astfel încît, pentru un anumit p_δ

$$m(T_{n,\delta}) \leqslant \varepsilon p_\delta \text{ dacă } n \geqslant n(\varepsilon, \delta)$$

și

$$\{t \mid |x_n(t) - x(t)| \not\leqslant \delta \nu\} \subset T_{n,\delta}.$$

Vom nota acest lucru prin:

$$x_n(t) \overset{m}{\to} x(t) \ [\nu]$$

Teorema 1.3.3. Într-un spațiu de tip (R^*) din orice șir $\{x_n(t)\}$ convergent în măsură (cu un anumit regulator) către o funcție $x(t)$, se poate extrage un subșir care converge aproape uniform către aceeași funcție.

Demonstrație. Fie $z_n(t) \overset{m}{\to} x(t)$ $[\nu]$. Să considerăm șirurile de mulțimi măsurabile $(\mathfrak{T})$.

$$E_{i,k} \supset \left\{ t \mid |x_i(t) - x(t)| \not\leqslant \frac{1}{2k} \nu \right\}$$

și fie p_k, astfel încît

$$m(E_{ik}) \leqslant \varepsilon p_k \text{ pentru } i \geqslant i_{\varepsilon,k}.$$

Deoarece pentru orice k, $m(E_{ik}) \overset{o}{\to} 0$ cînd $i \to \infty$, există un regulator comun de convergență p.

Fie i_k, astfel încît

$$m(E_{ik}) \leqslant \frac{1}{2^k} p \text{ pentru } i \geqslant i_k.$$

Să notăm $j_k = (i_{k-1} + 1) \vee i_k$, și $E_k = E_{j_k,k}$. Dacă $h \geqslant k$ și $t \in F_k = [\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right)]$, atunci

$$|x_{j_h}(t) - x(t)| \leqslant \frac{1}{2^h} \nu.$$

Rezultă că $x_{j_h}(t) \overset{u}{\to} x(t)$ pentru $t \in F_k$ și

$$m([F_k]) = m\left([\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i]\right) \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} m(E_i) \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} p = \frac{1}{2^{k-1}} p.$$

indicele k putînd fi oricît de mare. Aceasta stabilește propoziția.

Corolar 1.3.4. Într-un spațiu de tip (R^*) din orice șir convergent în măsură (cu un anumit regulator), se poate extrage un subșir convergent aproape peste tot către aceeași limită.

4. Funcții măsurabile

Trecem acum la introducerea noțiunii de funcție măsurabilă. Vom utiliza notațiile din punctul precedent.

D e f i n i ț i a 1.4.1. Vom spune că o funcție simplă $x(t) = \sum c_i \gamma_{A_i}(t)$ este măsurabilă $(\mathfrak{T})$, dacă mulțimile A_i sînt măsurabile $(\mathfrak{T})$.

Dacă $x(t)$ este o funcție simplă măsurabilă $(\mathfrak{T})$, atunci funcțiile $[x(t)]_+$, $[x(t)]_-$, $|x(t)|$ sînt de asemenea măsurabile $(\mathfrak{T})$. Dacă $x(t)$ și $y(t)$ sînt funcții simple măsurabile $(\mathfrak{T})$, atunci și $\alpha x(t) + \beta y(t)$ este măsurabilă $(\mathfrak{T})$ pentru α și β reale, precum și $x(t) \wedge y(t)$, $x(t) \vee y(t)$ sînt măsurabile $(\mathfrak{T})$.

D e f i n i ț i a 1.4.2. Vom spune că o funcție (oarecare) $x(t)$ este măsurabilă $(\mathfrak{T}, m)$, dacă există un șir de funcții simple măsurabile $(\mathfrak{T})$, $\{x_n(t),\}$ care converge aproape uniform către $x(t)$. Vom spune că șirul $\{x_n(t)\}$ este un *șir aproximant* al funcției $x(t)$.

Vom stabili acum principalele proprietăți ale funcțiilor măsurabile.

T e o r e m a 1.4.1. Dacă funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ sînt măsurabile $(\mathfrak{T}, m)$, atunci și funcțiile $x(t) \vee y(t)$, $x(t) \wedge y(t)$ sînt măsurabile $(\mathfrak{T}, m)$.

D e m o n s t r a ț i e. Fie $\{r_i(t)\}$ un șir aproximant al lui $x(t)$, p_1 un regulator corespunzător al măsurii, $\{y_i(t)\}$ un șir aproximant al lui $y(t)$ și p_2 un regulator al măsurii corespunzător șirului respectiv. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există submulțimile măsurabile $(\mathfrak{T})$, T_ε^1 și T_ε^2 ale mulțimii T, astfel încît $m([T_\varepsilon^1) \leqslant \varepsilon p_1$, $m([T_\varepsilon^2) \leqslant \varepsilon p_2$, $x_i(t) \xrightarrow{u} x(t)$ pentru $t \in T_\varepsilon^1$ și $y_i(t) \xrightarrow{u} y(t)$ pentru $t \in T_\varepsilon^2$. Fie $p = p_1 + p_2$ și $T_\varepsilon = T_\varepsilon^1 \cap T_\varepsilon^2$. Atunci

$$m([T_\varepsilon) = m([T_\varepsilon^1 \cup [T_\varepsilon^2) \leqslant m([T_\varepsilon^1) + m([T_\varepsilon^2) \leqslant \varepsilon(p_1 + p_2) = \varepsilon p$$

și pe mulțimea T_ε șirurile $\{x_i(t)\}$ și $\{y_i(t)\}$ converg uniform către funcțiile limită respective. În baza proprietății șirurilor convergente uniform

$$x_i(t) \vee y_i(t) \xrightarrow{u} x(t) \vee y(t) \quad , \quad (t \in T_\varepsilon).$$

În concluzie $\{x_i(t) \vee y_i(t)\}$ este un șir aproximant al lui $x(t) \vee y(t)$, ceea ce arată că ultima funcție este măsurabilă. În mod analog $x(t) \wedge y(t)$ este măsurabilă, avînd ca șir aproximant șirul $\{x_i(t) \wedge y_i(t)\}$.

T e o r e m a 1.4.2. Dacă funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ sînt măsurabile $(\mathfrak{T}, m)$, atunci $\alpha x(t) + \beta y(t)$ este măsurabilă $(\mathfrak{T}, m)$ oricare ar fi α și β reale.

D e m o n s t r a ț i e. Ca și în teorema precedentă există T_ε cu $m([T_\varepsilon) \leqslant \varepsilon p$ așa că $x_i(t) \xrightarrow{u} x(t)$ și $y_i(t) \xrightarrow{u} y(t)$ pe T_ε. În acest caz

$$\alpha x_i t) + \beta y_i(t) \xrightarrow{u} \alpha x(t) + \beta y(t) \text{ pe } T_\varepsilon$$

ceea ce arată că $\{\alpha x_i(t) + \beta y_i(t)\}$ este un șir aproximant al lui $\alpha x(t) + \beta y(t)$.

T e o r e m a 1.4.3. Dacă funcția $x(t)$ este măsurabilă $(\mathfrak{T}, m)$, atunci și funcțiile $[x(t)]_+$, $[x(t)]_-$ și $|x(t)|$ sînt măsurabile $(\mathfrak{T}, m)$.

D e m o n s t r a ț i e. Pentru a stabili măsurabilitatea lui $[x(t)]_+$ este suficient să considerăm în teorema 1.4.1, $y(t) \equiv 0$. Șirul $\{[x_i(t)]_+\}$ va fi un șir aproximant al său. Pentru $[x(t)]_-$ vom ține seama că $-x(t)$ este măsurabilă. Un șir aproximant al său va fi atunci $\{[x_i(t)]_-\}$. În sfîrșit, din teorema 1.4.2. va rezulta că $|x(t)|$ este măsurabilă și că $\{|x_i(t)|\}$ este un șir aproximant.

Teorema 1.4.4. Dacă $x(t)$ este măsurabilă $(\mathfrak{T}, m)$, atunci $\langle c, x(t)\rangle$ este de asemenea măsurabilă $(\mathfrak{T}, m)$ pentru orice P-operator (o)-continuu în al doilea argument.

Demonstrație. Rezultă din faptul că pentru orice T_ε pe care $x_i(t) \xrightarrow{u} x(t)$ avem și

$$\langle c, x_i(t)\rangle \xrightarrow{u} \langle c, x(t)\rangle,$$

ceea ce arată că $\{\langle c, x_i(t)\rangle\}$ este un șir aproximant al funcției $\langle c, x(t)\rangle$.

Teorema 1.4.5. Dacă $x(t)$ și $y(t)$ sînt funcții mărginite *a.p.t.* (m) și măsurabile $(\mathfrak{T}, m)$, atunci pentru orice P-operator parțial (o)-continuu, $\langle x(t), y(t)\rangle$ este de asemenea o funcție mărginită *a.p.t.* și măsurabilă $(\mathfrak{T}, m)$.

Demonstrație. Există T_ε cu $m([T_\varepsilon) \leqslant \varepsilon p$ astfel încît, atît $x(t)$ cît și $y(t)$ să fie « aproximate » uniform pe această mulțime de șirurile $\{x_i(t)\}$, $\{y_i(t)\}$ respectiv. Fie T_0, astfel încît $m([T_0) = 0$ și pe această mulțime $|x(t)| \leqslant a$, $|y(t)| \leqslant b$. Se poate presupune că $T_\varepsilon \subset T_0$ pentru orice ε, deoarece în caz contrar considerăm $T_\varepsilon \cap T_0$.

În baza proprietăților șirurilor uniform convergente,

$$\langle x_i(t), y_i(t)\rangle \xrightarrow{u} \langle x(t), y(t)\rangle \text{ pe } T_\varepsilon.$$

Aceasta arată că șirul $\{\langle x_i(t), y_i(t)\rangle\}$ este un șir aproximant al funcției $\langle x(t), y(t)\rangle$, deci aceasta din urmă este măsurabilă $(\mathfrak{T}, m)$. În plus $|\langle x(t), y(t)\rangle| \leqslant \langle |x(t), y(t)|\rangle \leqslant \langle a, b\rangle$ *a.p.t.*

Teorema 1.4.6. Fie $\mathcal{F}$ și $\mathcal{M}$ de tip (R^*). Dacă $\{x_i(t)\}$ este un șir de funcții măsurabile $(\mathfrak{T}, m)$ care converge aproape uniform către $x(t)$, atunci $x(t)$ este măsurabilă $(\mathfrak{T}, m)$.

Demonstrație. Funcțiile $x_i(t)$ fiind măsurabile, pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots$ există un șir $\{x_i^k(t)\}$ de funcții simple, așa ca

$$x_i^k(t) \xrightarrow{a.u.} x_i(t) \quad (k \to \infty)$$

Deoarece avem de asemenea

$$x_i(t) \xrightarrow{a.u.} x(t) \quad (i \to \infty),$$

în baza teoremei 1.3.2. există un subșir $\{x_i^{k_i}(t)\} \subset \{x_i^k(t)\}$, așa ca

$$x_i^{k_i}(t) \xrightarrow{a.u.} x(t),$$

deci $x(t)$ posedă un șir aproximant, adică este măsurabilă.

§ 2. INTEGRAREA FUNCȚIILOR SEMIORDONATE

Pentru crearea unui aparat integral general (tip Lebesgue) în spațiile semiordonate, vom presupune că atît funcția de integrat cît și măsura sînt semiordonate.

1. Integrala și proprietățile sale

Fie T o mulțime arbitrară de elemente, $\mathfrak{T}$ o familie complet aditivă de părți ale lui T și m o măsură (finită) pe $\mathfrak{T}$ cu valori în spațiul $\mathcal{M}$ de tip (R^*). Vom considera funcții $x(t)$ de la T la un spațiu $\mathcal{F}$ de tip (R^*).

Vom presupune că pe $\mathcal{F} \times \mathcal{M}$ este definit un P-operator $\langle x, m \rangle$ cu valori într-un spațiu $\mathcal{J}$ de tip (R).

Definiția 2.1.1. Dacă $x(t) = \sum_i c_i \gamma_{A_i}(t)$ este o funcție simplă măsurabilă $(\mathfrak{T})$, vom numi integrala lui $x(t)$ pe T, elementul spațiului $\mathcal{J}$ definit prin *)

$$\int_T \langle x(t), dm(t) \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle c_i, m(T_i) \rangle.$$

Integrala funcției $x(t)$ pe o mulțime $S \in \mathfrak{T}$ va fi

$$\int_T \langle x(t), dm(t) = \sum_{i=1}^{k} \langle c_i, m(T_i \cap S) \rangle.$$

Teorema 2.1.1. Integrala unei funcții simple măsurabile $(\mathfrak{T})$ are următoarele proprietăți:

i) $\int_T \langle \alpha x(t) + \beta y(t), dm(t) \rangle = \alpha \int_T \langle x(t), dm(t) \rangle +$

$$+ \beta \int_T \langle y(t), dm(t) \rangle, \quad (\alpha, \beta \in R),$$

ii) $\int_{S_1 \cup S_2} \langle x(t), dm(t) \rangle = \int_{S_1} \langle x(t), dm(t) \rangle + \int_{S_2} \langle x(t), dm(t) \rangle$

dacă $S_1 \cap S_2 = \varnothing$,

iii) dacă $x(t) \leqslant y(t)$ aproape peste tot pe T, atunci

$$\int_T \langle x(t), dm(t) \rangle \leqslant \int_T \langle y(t), dm(t) \rangle,$$

În particular, dacă $x(t) \geqslant \mathbf{0}$ aproape peste tot pe T, atunci

$$\int_T \langle x(t), dm(t) \rangle \geqslant \mathbf{0};$$

iv) $\left| \int_T \langle x(t), dm(t) \rangle \right| \leqslant \int_T \langle |x(t)|, dm(t) \rangle;$

v) dacă $d \leqslant x(t) \leqslant g$, atunci

$$\langle d, m(S) \rangle \leqslant \int_S \langle x(t), dm(t) \rangle \leqslant \langle g, m(S) \rangle.$$

*) Pentru simplificare, vom nota în cursul demonstrațiilor această integrală prin $\int_T x\, dm$.

Demonstrație. i) Fie

$$x(t) = \sum_i c_i \gamma_{A_i}(t) \quad \text{și} \quad y(t) = \sum_j d_j \gamma_{B_j}(t).$$

Avem

$$\int_T (dx+\beta y)\, dm = \sum_i \sum_j \langle \alpha c_i + \beta d_j, m(A_i \cap B_j)\rangle = \sum_i \sum_j [\langle \alpha c_i, m(A_i \cap B_j)\rangle +$$

$$+ \langle \beta d_j, m(A_i \cap B_j)\rangle] = \sum_i \langle \alpha c_i, \sum_j m(A_i \cap B_j)\rangle + \sum_j \langle \beta d_j, \sum_i m(A_i \cap B_j)\rangle =$$

$$= \alpha \sum_i \langle c_i, m(A_i)\rangle + \beta \sum_j \langle d_j, m(B_j)\rangle = \alpha \int_T x\, dm + \beta \int_T y\, dm.$$

ii) Fie $x(t) = \sum_i c_i \gamma_{A_i}(t)$ unde $\bigcup_i A_i = S_1 \cup S_2$. Avem

$$\int_{S_1 \cup S_2} x\, dm = \sum_i \langle c_i, m(A_i)\rangle = \sum_i \langle c_i, m[(A_i \cap S_1) \cup (A_i \cap S_2)]\rangle =$$

$$= \sum_i \langle c_i, m(A_i \cap S_1) + m(A_i \cap S_2)\rangle = \sum_i \langle c_i, m(A_i \cap S_1)\rangle +$$

$$+ \sum_i \langle c_i, m(A_i \cap S_2)\rangle = \int_{S_1} x\, dm + \int_{S_2} x\, dm.$$

iii) Dacă $y(t) \geqslant x(t)$ *a.p.t.*, atunci $z(t) = y(t) - x(t) \geqslant 0$ pentru $t \in T_0$ unde $T_0 \in \mathfrak{T}$ și $m(\complement T_0) = 0$. Avem

$$\int_T z\, dm = \int_{T_0} z\, dm + \int_{\complement T_0} z\, dm = \int_{T_0} z\, dm,$$

deoarece $\int_{\complement T_0} z\, dm = 0$, ceea ce este evident.

Dar

$$\int_{T_0} z\, dm \geqslant 0$$

ținînd seama de pozitivitatea *P*-operatorului. Propoziția iii) rezultă de aici cu ajutorul lui i).

iv) Datorită proprietății (5) din teorema 1.1.1 (cap. I) a *P*-operatorului, avem

$$\left|\int_T x\, dm\right| = \left|\sum_i \langle c_i, m(A_i)\rangle\right| \leqslant \sum_i \left|\langle c_i, m(A_i)\rangle\right| \leqslant \sum_i \langle |c_i|, m(A_i)\rangle =$$

$$= \int_T |x|\, dm.$$

v) Rezultă în baza propoziției iii) considerînd funcțiile simple (constante pe S), d și g.

Teorema 2.1.2. Dacă *P*-operatorul este asociativ (în cazul $\mathcal{F} = \mathcal{M} = \mathcal{J}$) atunci

$$\int_T \langle\langle c,\ x(t)\rangle,\ dm(t)\rangle = \left\langle c, \int_T \langle x(t),\ dm(t)\rangle \right\rangle.$$

Demonstrația este imediată.

Observația 2.1.1. Teorema are de asemenea loc în cazul cînd $\mathcal{F} \subset \mathcal{M} = \mathcal{J}$, iar P-operatorul este complet-regulat.

Definiția 2.1.2. O funcție $x(t)$ va fi numită integrabilă $(\mathcal{C}, m)$ pe T, dacă este măsurabilă $(\mathcal{C}, m)$ și dacă posedă un șir aproximant $\{x_i(t)\}$, astfel încît

$$(o) - \lim_{k\to\infty} \left[\sup_{i,j\geqslant k} \int_T \langle | x_i(t) - x_j(t) |, dm(t) \rangle \right] = 0.$$

Vom spune că șirul $\{x_i(t)\}$ este un *șir integrant* al funcției $x(t)$.

Din definiție rezultă într-un mod evident că dacă $x(t)$ este integrabilă pe T, ea este integrabilă și pe orice parte S măsurabilă $(\mathcal{C})$, a lui T.

Lema 2.1.3. Dacă $\{x_i(t)\}$ este un șir integrant al lui $x(t)$, atunci

$$(o) - \lim_i \int_T \langle x_i(t)\, dm(t) \rangle$$

există și este finită.

Demonstrație. Datorită proprietăților i) și v) ale integralei funcțiilor simple, oricare ar fi i și j.

$$\left| \int_T x_i\, dm - \int_T x_j\, dm \right| \leqslant \int_T | x_i - x_j |\, dm.$$

De aici se deduce că

$$(o) - \lim_k \left[\sup_{i,j\geqslant k} \left| \int_T x_i\, dm - \int_T x_j\, dm \right| \right] = 0.$$

Spațiul $\mathcal{J}$ fiind (o)-complet, (o)-$\lim_i \int_T x_i\, dm$ există și este finită.

Lema 2.1.4. Fie $\{x_i(t)\}$ un șir integrant al funcției integrabile $x(t)$. Pentru un regulator oarecare p, există $k \in \mathcal{J}$, astfel încît oricărui număr real $\varepsilon > 0$ să-i corespundă un număr real $\eta(\varepsilon)$ pentru care

$$\int_S \langle | x_i(t) |, dm(t) \rangle \leqslant \varepsilon h \quad \text{dacă } m(S) \leqslant \eta(\varepsilon).p \quad (S \in \mathcal{C})$$

oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots$

Demonstrație. Fie $x_i(t) = \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \gamma_{Aij}(t)$ și să notăm

$$g_i = |c_{i1}| \vee |c_{i2}| \vee \ldots \vee |c_{ik_i}|.$$

Avem atunci, datorită proprietății v) a integralei funcțiilor simple

$$\int_S | x_i |\, dm \leqslant \langle g_i, m(S) \rangle. \tag{2.1.1}$$

Fie $\{\lambda_i\}$ un șir care anulează șirul $\{g_i\}$. Avem deci $\lambda_i g_i \xrightarrow{o} 0$. Spațiul $\mathcal{F}$ fiind de tip (R^*) există r, astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$

$$\lambda_i g_i \leqslant \varepsilon r \text{ dacă } i \geqslant i_\varepsilon, \tag{2.1.2}$$

Să notăm cu h_1 regulatorul de convergență al șirului

$$l_k = \sup_{ij \geqslant k} l_{ij}, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

unde

$$l_{ij} = \int_T | x_i - x_j | \, dm.$$

Atunci, oricare ar fi mulțimea măsurabilă $S \subset T$, h_1 este un regulator de convergență și pentru șirul

$$l_k(S) = \sup_{i,j \geqslant k} l_{ij}(S),$$

unde

$$l_{ij}(S) = \left| \int_S | x_i | \, dm - \int_S | x_j | \, dm \right|.$$

Aceasta rezultă din faptul că

$$0 \leqslant l_{ij}(S) = \left| \int_S (|x_i| - |x_j|) \, dm \right| \leqslant \int_S | |x_i| - |x_j| | dm \leqslant \int_S | x_i - x_j | \, dm \leqslant$$

$$\leqslant \int_T | x_i - x_j | \, dm = l_{ij}$$

și luînd marginile superioare pentru $i, j \leqslant k$, avem

$$0 \leqslant l_k(S) \leqslant l_k.$$

Putem deci scrie

$$l_k(S) \leqslant \varepsilon h_1, \text{ dacă } k \geqslant k_\varepsilon \tag{2.1.3}$$

unde h_1 și k_ε nu depind de S. În plus putem presupune că $k_\varepsilon \geqslant i_\varepsilon$ (de exemplu putem lua $k_\varepsilon \vee i_\varepsilon$, deoarece ultima inegalitate este cu atît mai mult satisfăcută).

Să scriem acum următoarea inegalitate, valabilă oricare ar fi indicele fix i_0 și mulțimea măsurabilă $S' \subset T$:

$$\int_{S'} |x_i| \, dm \leqslant \left| \int_{S'} | x_i | \, dm - \int_{S'} | x_{i_0} | \, dm \right| + \int_{S'} | x_{i_0} | \, dm.$$

Datorită relațiilor (2.1.1) și (2.1.3) din aceasta deducem

$$\int_{S'} | x_i | \, dm \leqslant \varepsilon h_1 + \langle g_{k_\varepsilon}, m(S') \rangle \text{ dacă } i \geqslant k_\varepsilon. \tag{2.1.4}$$

Fie p un regulator al măsurii și $m(S') \leqslant \lambda_{k_\varepsilon} p$.

Folosind relația (2.1.2) deducem în acest caz:

$$\langle g_{k_\varepsilon}, m(S') \rangle \leqslant \langle g_{k_\varepsilon}, \lambda_{k_\varepsilon} p \rangle = \langle \lambda_{k_\varepsilon} g_{k_\varepsilon}, p \rangle \leqslant \langle \varepsilon r, p \rangle = \varepsilon \langle r, p \rangle$$

Notînd prin $h_2 = \langle r, p \rangle$, avem deci

$$\langle g_{k_\varepsilon}, m(S') \rangle \leqslant \varepsilon h_2.$$

Ținînd seama de această inegalitate în relația (2.1.4) și notînd $h' = h_1 + h_2$, obținem

$$\int_{S'} |x_i| \, dm \leqslant \varepsilon h' \quad \text{dacă } i \geqslant k_\varepsilon \tag{2.1.5}$$

cu condiția ca $m(S') \leqslant \lambda_{k\varepsilon} p$.

Să notăm acum prin $q = \sup \lambda_i g_i$, care este finit, șirul $\{\lambda_i g_i\}$ tinzînd către $\mathbf{0}$. Fie S'' o parte oarecare măsurabilă ($\mathfrak{T}$) a lui T. Avem, ținînd seama că $\lambda_j \neq 0$:

$$\int_{S''} |x_j| \, dm \leqslant \langle g_j, \; m(S'') \rangle = \left\langle \lambda_j g_j, \frac{1}{\lambda_j} m(S'') \right\rangle \leqslant \left\langle q, \frac{1}{\lambda_j} m(S'') \right\rangle .$$

Să notăm, mai departe, prin $\lambda^*_{k_\varepsilon} = \min \{\lambda_j \mid j = 1, 2, \ldots, k_\varepsilon - 1\}$ și să presupunem că

$$m(S'') \leqslant \lambda^*_{k_\varepsilon} \cdot \varepsilon p.$$

Obținem atunci pentru $j = 1, 2, \ldots, k_\varepsilon - 1$

$$\int_{S''} |x_j| \, dm \leqslant \left\langle q, \frac{1}{\lambda_j} \lambda^*_{k_\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot p \right\rangle \leqslant \varepsilon \langle q, p \rangle,$$

deoarece $\frac{1}{\lambda_j} \lambda^*_{k_\varepsilon} \leqslant 1$. Dacă notăm cu $h'' = \langle q, p \rangle$, avem deci

$$\int_{S''} |x_j| \, dm \leqslant \varepsilon h'' \text{ pentru } j = 1, 2, \ldots, k_\varepsilon - 1 \tag{2.1.6}$$

În sfîrșit, punînd $\eta(\varepsilon) = \min (\lambda^*_{k_\varepsilon} \cdot \varepsilon, \lambda_{k_\varepsilon})$ și $h = h' \vee h''$ din (2.1.5) și (2.1.6) rezultă

$$\int_S \langle |x_i(t)|, \, dm(t) \rangle \leqslant \varepsilon h \text{ dacă } m(S) \leqslant \eta(\varepsilon) \cdot p,$$

oricare ar fi i, ceea ce demonstrează lema.

L e m a 2.1.5. Dacă $x(t)$ este o funcție integrabilă pe T, iar $\{x_i(t)\}$, $\{y_i(t)\}$ sînt două șiruri integrante ale sale, atunci

$$(o)\text{-}\lim_i \int_T \langle x_i(t), \, dm(t) \rangle = (o)\text{-}\lim_i \int_T \langle y_i(t), \, dm(t) \rangle.$$

D e m o n s t r a ț i e. Pentru orice mulțime S măsurabilă ($\mathfrak{T}$), avem

$$\left| \int_T x_i \, dm - \int_T y_i \, dm \right| \leqslant \int_T |x_i - y_i| \, \mathrm{dm} =$$

$$= \int_S |x_i - y_i| \, dm + \int_{\complement S} |x_i - y_i| \, dm \tag{2.1.7}$$

Să evaluăm cea de a doua integrală din ultimul membru pentru anumită mulțime S. Avem mai întîi

$$\int_{\complement S} |x_i - y_i| \, dm \leqslant \int_{\complement S} |x_i| \, dm + \int_{\complement S} |y_i| \, dm. \tag{2.1.8}$$

Şirurile $\{x_i(t)\}$ şi $\{y_i(t)\}$ fiind aproape uniform convergente pe T către $x(t)$, există p' şi p'', astfel încît la orice număr $\eta > 0$ să corespundă respectiv mulţimile S'_η şi S''_η cu $m(\complement S'_\eta) \leqslant \eta p'$ şi $m(\complement S''_\eta) \leqslant \eta p''$, iar $x_i(t) \overset{u}{\to} x(t)$ pentru $t \in S'_\eta$, $y_i(t) \overset{u}{\to} x(t)$ pentru $t \in S''_\eta$. Fie $p = p' + p''$ şi $S_\eta = S'_\eta \cap S''_\eta$. Avem $m(\complement S_\eta) \leqslant \eta p$ şi $x_i(t) \overset{u}{\to} x(t)$, $y_i(t) \overset{u}{\to} x(t)$, pentru $t \in S_\eta$.

Pe de altă parte, datorită lemei 2.1.4, există h' şi h'', astfel ca, oricărui număr $\varepsilon > 0$ să-i corespundă respectiv numerele $\eta'(\varepsilon)$ şi $\eta''(\varepsilon)$, aşa ca

$$\int_{\complement S'_\eta} |x_i| \, dm \leqslant \varepsilon h' \quad \text{şi} \quad \int_{\complement S''_\eta} |y_i| \, dm \leqslant \varepsilon h'', \tag{2.1.9}$$

dacă $m(\complement S'_\eta) \leqslant \eta'(\varepsilon).p$ şi $m(\complement S''_\eta) \leqslant \eta''(\varepsilon).p$.

Să punem acum $h = h' \vee h''$ şi $\eta(\varepsilon) = \min(\eta'(\varepsilon), \eta''(\varepsilon))$. Deoarece p este un regulator al măsurii, pentru $\eta = \eta(\varepsilon)$, vom considera mulţimea corespunzătoare S_η, aşa ca $m(\complement S_\eta) \leqslant \eta(\varepsilon).p$ pe care şirurile $\{x_i(t)\}$ şi $\{y_i(t)\}$ converg uniform spre $x(t)$. Avem, în acest caz, din (2.1.7), (2.1.8), (2.1.9)

$$\left| \int_T x_i \, dm - \int_T y_i \, dm \right| \leqslant \int_{S_\eta} |x_i - y_i| \, dm + 2\varepsilon h \tag{2.1.10}$$

Deoarece, pentru $t \in S_\eta$

$$|x_i(t) - y_i(t)| \leqslant |x_i(t) - x(t)| + |y_i(t) - x(t)| \leqslant u_i(\eta) + v_i(\eta)$$

notînd $w_i(\eta) = u_i(\eta) + v_i(\eta)$, avem $w_i(\eta) \leqslant \delta_i r(\eta)$ cu $\delta_i \searrow 0$ şi deci

$$\int_{S_\eta} |z_i - y_i| \, dm \leqslant \delta_i \langle r(\eta), m(S_\eta) \rangle.$$

Ţinînd seama de această inegalitate în (2.1.10) şi trecînd la limită pentru $i \to \infty$, obţinem

$$(o)\text{-}\lim_i \left| \int_T x_i \, dm - \int y_i \, dm \right| \leqslant 2\varepsilon h.$$

Această inegalitate avînd loc pentru orice $\varepsilon > 0$, limita din primul membru este **0**, ceea ce demonstrează teorema.

Pe baza lemelor 2.1.3, 2.1.5 sîntem îndreptăţiţi a introduce

D e f i n i ţ i a 2.1.3. Dacă $x(t)$ este o funcţie integrabilă pe mulţimea T, vom numi integrala lui $x(t)$ pe T, (o)-limita către care converge şirul integralelor pe T ale unui şir integrant oarecare al său. Vom nota această integrală, ca şi pentru funcţiile simple, prin *)

$$\int_T \langle x(t), dm(t) \rangle$$

Integrala pe o parte $S \subset T$ va fi limita şirului integralelor funcţiilor integrante pe S.

---

*) Ca şi pentru funcţii simple vom nota uneori această integrală prin $\int_T x \, dm$.

O funcție integrabilă $x(t)$ pe T fiind integrabilă pe orice parte măsurabilă S a lui T, putem asocia funcției $x(t)$ o funcție semiordonată de mulțimi măsurabile $(\mathfrak{T})$, definită prin:

$$f(S) = \int_S \langle x(t), dm(t) \rangle$$

Vom numi această funcție, integrala nedefinită a lui $x(t)$ pe T.

Teorema 2.1.6. Integrala nedefinită a unei funcții $x(t)$ se bucură de următoarea proprietate: pentru un regulator oarecare p al măsurii, există $h \in \mathcal{J}$ astfel ca oricărui $\varepsilon > 0$ să-i corespundă $\eta(\varepsilon)$, așa ca

$$\left| \int_S \langle x(t), dm(t) \rangle \right| \leqslant \varepsilon h \quad \text{dacă } m(S) \leqslant \eta(\varepsilon)\, p.$$

Demonstrație. Fie $\{x_i(t)\}$ un șir integrant al lui $x(t)$ și p un anumit regulator al măsurii. În baza lemei 2.1.4 există $h \varepsilon \mathcal{J}$, astfel ca oricărui $\varepsilon > 0$, să-i corespundă un $\eta(\varepsilon)$ pentru care

$$m(S) \leqslant \eta(\varepsilon)\, p \quad \text{implică} \quad \int_S (x_i)\, dm \leqslant \varepsilon h.$$

De aici rezultă în baza definiției integralei lui $x(t)$:

$$\left| \int_S x\, dm \right| = \left| \lim_i \int_S x_i\, dm \right| = \lim_i \left| \int_S x_i\, dm \right| \leqslant \lim_i \int_S |x_i|\, dm \leqslant \varepsilon h,$$

ceea ce demonstrează teorema.

Trecem acum la stabilirea proprietăților funcțiilor integrabile și a integralelor lor.

În teoremele următoare vom folosi următoarea observație. Dacă S' și S'' sînt mulțimi măsurabile $(\mathfrak{T})$ și disjuncte, atunci

$$\int_{S' \cup S''} \langle x(t), dm(t) \rangle = \int_{S'} \langle x(t), dm(t) \rangle + \int_{S''} \langle x(t), dm(t) \rangle$$

pentru orice funcție $x(t)$ integrabilă $(\mathfrak{T}, m)$ pe $S' \cup S''$.

Într-adevăr, dacă $\{x_i(t)\}$ este un șir integrant al lui $x(t)$ atunci

$$\int_{S' \cup S''} x_i\, dm = \int_{S'} x_i\, dm + \int_{S''} x_i\, dm$$

oricare ar fi i (teorema 2.1.1). Egalitatea de mai sus rezultă atunci prin trecere la limită.

Teorema 2.1.7. Dacă $x(t)$ este o funcție nulă *a.p.t.* pe T, atunci ea este integrabilă și

$$\int_T \langle x(t), dm(t) \rangle = 0$$

Demonstrație. Rezultă din faptul că șirul format din funcții simple nule *a.p.t.* este un șir integrant al său.

Teorema 2.1.8. Dacă $x(t)$ este o funcție integrabilă iar S este o mulțime de măsură nulă, atunci

$$\int_S \langle x(t), dm(t) \rangle = 0.$$

Demonstrație. Rezultă din faptul că pentru orice șir integrant al său integralele funcțiilor acestui șir pe S sînt toate nule.

Teorema 2.1.9. Dacă $x(t)$ și $y(t)$ sînt funcții integrabile iar $x(t) \leqslant y(t)$ *a.p.t.* pe T atunci

$$\int_T \langle x(t),\ dm(t)\rangle \leqslant \int_T \langle y(t),\ dm(t)\rangle.$$

Demonstrație. Fie $\{x_i(t)\}$ un șir integrant al lui $x(t)$ și $\{y_i(t)\}$ un un șir integrant al lui $y(t)$. Fie T_0 mulțimea pentru care $x(t) \leqslant y(t)$. Șirul $\{x_i(t) \vee y_i(t)\}$ este de asemenea un șir integrant al lui $y(t)$ pe T_0 și în plus $x_i(t) \leqslant x_i(t) \vee y_i(t)$. Datorită proprietăților integralei funcțiilor simple

$$\int_{T_0} x_i\, dm \leqslant \int_{T_0} (x_i \vee y_i)\, dm$$

de unde, prin trecere la limită

$$\int_{T_0} x\, dm \leqslant \int_{T_0} (x \vee y)\, dm = \int_{T_0} y\, dm.$$

Deoarece, în baza teoremei 2.1.8

$$\int_{\mathfrak{C}T_0} x\, dm = \int_{\mathfrak{C}T_0} y\, dm = 0$$

atunci

$$\int_T x\, dm = \int_{T_0} x\, dm + \int_{\mathfrak{C}T_0} x\, dm \leqslant \int_{T_0} y\, dm + \int_{\mathfrak{C}T_0} y\, dm = \int_T y\, dm$$

ceea ce demonstrează teorema.

Corolar 2.1.10. Dacă $x(t)$ este o funcție măsurabilă și $a \leqslant x(t) \leqslant b$ *a.p.t.*, atunci

$$\langle a,\ m(S)\rangle \leqslant \int_S \langle x(t),\ dm(t)\rangle \leqslant \langle b,\ m(S)\rangle.$$

Teorema 2.1.11. Dacă $x(t)$ și $y(t)$ sînt integrabile pe T, atunci pentru α și β reale, $\alpha x(t) + \beta y(t)$ este integrabilă și avem

$$\int_T \langle \alpha\, x(t) + \beta y(t),\ dm(t)\rangle = \alpha \int_T \langle x(t),\ dm(t)\rangle + \beta \int_T \langle y(t),\ dm(t)\rangle.$$

Demonstrație. Fie $\{x_i(t)\}$ un șir integrant al lui $x(t)$ și $\{y_i(t)\}$ un șir integrant al lui $y(t)$. După cum s-a văzut, șirul $\{\alpha x_i(t) + \beta y_i(t)\}$ este un șir aproximant al lui $\alpha x(t) + \beta y(t)$ și avem

$$\int_T |(\alpha x_i + \beta y_i) - (\alpha x_j + \beta y_j)|\, dm \leqslant |\alpha| \int_T |x_i - x_j|\, dm + |\beta| \int_T |y_i - y_j)\, dm,$$

de unde rezultă integrabilitatea funcției $\alpha x(t) + \beta y(t)$.

A doua parte a teoremei rezultă din egalitatea

$$\int_T (\alpha x_i + \beta y_i)\, dm = \alpha \int_T x_i\, dm + \beta \int_T y_i\, dm,$$

prin trecere la limită.

Teorema 2.1.12. O funcție măsurabilă $x(t)$ este integrabilă atunci și numai atunci cînd sînt integrabile funcțiile

$$[x(t)]_+ , \quad [x(t)]_-$$

și avem

$$\int_T \langle x(t),\, dm(t)\rangle = \int_T \langle [x(t)],\, dm(t)\rangle - \int_T \langle [x(t)]_- ,\, dm(t)\rangle.$$

Demonstrație. Fie $\{x_i(t)\}$ un șir integrant al lui $x(t)$. Atunci șirurile $\{[x_i(t)]_+\}$, $\{[x_i(t)]_-\}$ sînt șiruri aproximante pentru $[x(t)]_+$, $[x(t)]_-$ respectiv, iar din

$$\int_T |(x_i)_+ - (x_j)_+|\, dm \leqslant \int_T |x_i - x_j|\, dm, \quad \int_T |(x_i) - (x_j)_-|\, dm \leqslant \int_T |x_i - x_j|\, dm$$

rezultă că ele sînt chiar șiruri integrante pentru funcțiile pe care le «aproximează».

Reciproc, dacă $[x(t)]_+$ și $[x(t)]_-$ sînt integrabile, atunci în baza teoremei 2.1.11, funcția $x(t) = [x(t)]_+ - [x(t)]_-$ este integrabilă.

Egalitatea din enunțul propoziției are de asemenea loc în baza teoremei 2.1.11.

Teorema 2.1.13. Dacă $x(t)$ este o funcție măsurabilă iar $y(t)$ o funcție integrabilă astfel încît $|x(t)| \leqslant y(t)$ aproape peste tot atunci și $x(t)$ este integrabilă.

Demonstrație. Fie $\{x_i(t)\}$ un șir aproximant al lui $x(t)$, iar $\{y_i(t)\}$ un șir integrant al lui $y(t)$. Să considerăm funcțiile definite prin

$$\bar{x}_i(t) = |x_i(t)| \wedge y_j(t).$$

Șirul $\{\bar{x}_i(t)\}$ este evident un șir aproximant al lui $|x(t)|$. Vom arăta că el este chiar un șir integrant al acestei funcții.

Pentru aceasta să observăm mai întîi că pentru orice mulțime $S \subset T$ măsurabilă ($\mathfrak{S}$) are loc inegalitatea

$$\int_T |\bar{x}_i - \bar{x}_j|\, dm \leqslant \int_S |\bar{x}_i - \bar{x}_j|\, dm + \int_{\complement S} y_i\, dm + \int_{\complement S} y_j\, dm \qquad (2.1.11)$$

deoarece

$$|\bar{x}_i(t) - \bar{x}_j(t)| \leqslant |\bar{x}_i(t)| + |\bar{x}_j(t)| \leqslant y_i(t) + y_j(t) \quad a.p.t.$$

Șirul $\{\bar{x}_i(t)\}$ fiind aproape uniform convergent pe T către $|x(t)|$ există un regulator al măsurii p, astfel încît oricărui număr $\eta > 0$ să-i corespundă o mulțime $S_\eta \in \mathfrak{S}$ cu $m(\complement S_\eta) \leqslant \eta p$ iar $\bar{x}_i(t) \xrightarrow{u} x(t)$ pentru $t \in S_\eta$.

Există atunci $r = r(\eta) \in \mathfrak{F}$, așa ca

$$\sup_{i,j \geqslant k} |\bar{x}_i(t) - \bar{x}_j(t)| \leqslant \varepsilon_k r \text{ pentru } t \in S_\eta \ (\varepsilon_k \searrow 0).$$

Avem atunci pentru $i, j \geqslant k$

$$\int_{S_\eta} |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \, dm \leqslant \varepsilon_k \langle r(\eta), m(S_\eta) \rangle.$$

de unde rezultă, oricare ar fi $\eta > 0$

$$(o)\text{-}\lim_k \left[\sup_{i,j \geqslant k} \int_{S_\eta} |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \, dm \right] = \mathbf{0}. \tag{2.1.12}$$

Pe de altă parte, conform lemei 2.1.4, există $h \in \mathcal{J}$, astfel ca oricărui $\varepsilon > 0$ să-i corespundă $\eta(\varepsilon)$ cu

$$\int_{\complement S_\eta} y_i \, dm \leqslant \varepsilon h \quad \text{dacă} \quad m(\complement S_\eta) \leqslant \eta(\varepsilon) p \tag{2.1.13}$$

oricare ar fi i.

Folosind în (2.1.11) relațiile (2.1.12) și (2.1.13) deducem

$$(o)\text{-}\lim_k [\sup_{i,j \geqslant k} \int_T |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \, dm] \leqslant 2\varepsilon h$$

oricare ar fi $\varepsilon > 0$, ceea ce înseamnă că membrul stîng al inegalității este $\mathbf{0}$. În baza definiției 2.1.3, funcția $|x(t)|$ este integrabilă.

Deoarece $\mathbf{0} \leqslant [x(t)]_+ \leqslant |x(t)|$, $\mathbf{0} \leqslant [x(t)]_- \leqslant |x(t)|$ rezultă în baza demonstrației precedente că $[x(t)]_+$ și $[x(t)]_-$ sînt integrabile. În baza teoremei 2.1.12 rezultă că funcția $x(t)$ este integrabilă.

Corolar 2.1.14. O funcție $x(t)$ măsurabilă și mărginită *a.p.t.* este integrabilă.

Teorema 2.1.15. O funcție $x(t)$ este integrabilă dacă și numai dacă $|x(t)|$ este integrabilă.

Demonstrație. Fie $\{x_i(t)\}$ un șir integrant al lui $x(t)$. Atunci $\{|x_i(t)|\}$ este un șir aproximant al lui $|x(t)|$, iar din

$$\int_T \| |x_i| - |x_j| \| \, dm \leqslant \int_T |x_i - x_j| \, dm.$$

rezultă că $\{|x_i(t)|\}$ este un șir integrant al lui $|x(t)|$, ceea ce arată că această funcție este integrabilă.

Reciproc, dacă $|x(t)|$ este integrabilă, datorită teoremei 2.1.13 rezultă că și $x(t)$ este integrabilă.

Teorema 2.1.16. Dacă funcția $x(t)$ este integrabilă, atunci

$$\left| \int_T \langle x(t), dm(t) \rangle \right| \leqslant \int_T \langle |x(t)|, dm(t) \rangle.$$

Demonstrație. Dacă $\{x_i(t)\}$ este un șir integrant al său, atunci

$$\left| \int_T x_i \, dm \right| \leqslant \int_T |x_i| \, dm,$$

inegalitatea avînd loc pentru funcții simple. Din aceasta deducem

$$(o)\text{-}\lim_i \left|\int_T x_i\,dm\right| = \left|(o)\text{-}\lim_i \int_T x_i\,dm\right| = \left|\int_T x\,dm\right| \leqslant (o)\text{-}\lim_i \int_T |x_i|\,dm =$$

$$= \int_T |x|\,dm,$$

ținînd-seama că $\{|x_i(t)|\}$ este un șir integrant al lui $|x(t)|$.

Teorema 2.1.17. Dacă $x(t)$ este integrabilă, iar P-operatorul este asociativ (în cazul $\mathcal{F} = \mathcal{M} = \mathcal{J}$), atunci

$$\int_T \langle\langle c,\ x(t)\rangle, dm(t)\rangle = \langle c, \int_T \langle x(t),\ dm(t)\rangle\rangle, \quad (c \in \mathcal{F}). \quad (21.1.14)$$

Demonstrație. Fie $\{x_i(t)\}$ un șir integrant al lui $x(t)$. Atunci $\{\langle c,\ x_i(t)\rangle\}$ este un șir integrant al lui $\langle c,\ x(t)\rangle$. Într-adevăr, el este evident un șir aproximativ al ultimei funcții, deoarece pe fiecare mulțime T_ε pe care $x_i(t) \xrightarrow{u} x(t)$ avem și $\langle c,\ x_i(t)\rangle \xrightarrow{u} \langle c,\ x(t)\rangle$ (teorema 1.1.1). Faptul că este integrant rezultă din

$$\int_T |\langle c,\ x_i\rangle - \langle c,\ x_j\rangle|\,dm \leqslant \int_T \langle |c|, |x_i - x_j|\rangle\,dm =$$

$$= \langle |c|, \int_T \langle |x_i - x_j|,\ dm\rangle\rangle.$$

Egalitatea din enunțul teoremei rezultă din

$$\int_T \langle\langle c,\ x_i\rangle,\ dm\rangle = \langle c,\ \int_T \langle x_i,\ dm\rangle\rangle$$

prin trecere la limită.

Teorema 2.1.18. Dacă $x(t)$ este integrabilă, iar P-operatorul este complet-regulat (în cazul $\mathcal{F} \subset \mathcal{M} = \mathcal{J}$), atunci egalitatea (2.1.14) se menține de asemenea.

Demonstrație. Se face ca și pentru teorema 2.1.17.

Observația 2.1.2. Teorema 2.1.18 rezultă ca un caz particular al următoarei propoziții mai generale.

Dacă $x(t)$ este integrabilă, iar P-operatorul este regulat în cazul $\mathcal{M} = \mathcal{J}$, atunci

$$\int_T \langle [c,\ x(t)],\ dm(t)\rangle = \langle c,\ \int_T \langle x(t),\ dm(t)\rangle\rangle, \quad (c \in \mathcal{F})$$

(folosind notația din cap. I, § 1, punctul 3).

Teorema 2.1.19. Dacă pentru o măsură reală μ, $x(t)$ este o funcție integrabilă, atunci pentru un P-operator de la $\mathcal{X} \times \mathcal{T}$ la $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}$ fiind un spațiu *l.c-s.* de tip (R^*), avem

$$\int_T \langle c,\ x(t)\rangle\,d\mu(t) = \langle c,\ \int_T x(t)\,d\mu(t)\rangle.$$

Demonstrație. Se face ca și pentru teorema 2.1.17.

Observația 2.1.3. Dacă $\mathfrak{X} = \mathcal{H}_r(\mathfrak{F})$, atunci obținem în particular

$$U\left[\int_T x(t)\, d\mu(t)\right] = \int_T U[x(t)]\, d\mu(t).$$

Teorema 2.1.20. Dacă $x(t)$ și $y(t)$ sînt funcții măsurabile $(\mathfrak{T}, m)$ și mărginite *a.p.t.*, atunci $\langle x(t), y(t)\rangle$ este integrabilă (P-operatorul fiind definit pe $\mathcal{M} = \mathfrak{F} = \mathcal{J}$).

Demonstrație. Rezultă pe baza teoremei 1.4.5 și a corolarului 2.1.10.

Teorema 2.1.21. Pentru orice funcție integrabilă $x(t)$, există $h \in \mathcal{J}$ astfel că oricărui $\varepsilon > 0$ să corespundă o funcție simplă $s(t)$, astfel încît

$$\int_T \langle |x(t) - s(t)|,\ dm(t)\rangle \leqslant \varepsilon h.$$

Demonstrație. Fie $\{x_i(t)\}$ un șir integrant al lui $x(t)$. În acest caz $\{|x_i(t) - x_j(t)|\}$ este un șir integrant al lui $|x(t) - x_j(t)|$. Într-adevăr mai întîi este evident că șirul amintit este un șir aproximant. Faptul că este integrant rezultă din inegalitatea

$$\int_T \| x_i - x_j | - | x_k - x_j \|\, dm \leqslant \int_T |(x_i - x_j) - (x_k - x_j)|\, dm =$$

$$= \int_T |x_i - x_k|\, dm.$$

Putem astfel scrie

$$\int_T |x - x_j|\, dm = (o)\text{-}\lim_i \int_T |x_i - x_j|\, dm, \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Există însă h, astfel pentru orice $\varepsilon > 0$.

$$\int_T |x_i - x_j|\, dm \leqslant \varepsilon h \text{ dacă } i, j \geqslant k_\varepsilon.$$

Dacă luăm deci $s(t) = x_{k_\varepsilon}(t)$, atunci

$$\int_T |x - s|\, dm \leqslant \varepsilon h,$$

ceea ce demonstrează teorema.

Teorema 2.1.22. Fie $\{x_i(t)\}$ un șir de funcții măsurabile pe mulțimea T, mărginită *a.p.t.* de o funcție integrabilă $y(t)$: $|x_i(t)| \leqslant y(t)$. Dacă șirul converge aproape uniform către funcția $x(t)$, atunci $x(t)$ este integrabilă și

$$(o)\text{-}\lim_i \int_T \langle x_i(t), dm(t)\rangle = \int_T \langle x(t), dm(t)\rangle.$$

Demonstrație. Datorită teoremei 2.1.9, funcțiile $x_i(t)$ sînt integrabile. Datorită teoremei 1.3.1, șirul $\{x_i(t)\}$ converge *a.p.t.* către $x(t)$ și deci $|x(t)| \leqslant y(t)$ *a.p.t.* și iarăși în baza teoremei 2.1.9., $x(t)$ este integrabilă.

Oricare ar fi mulțimea $T_0 \in \mathfrak{T}$, avem

$$\left| \int_{\complement T_0} x_i \, dm - \int_{\complement T_0} x \, dm \right| \leqslant \int_{\complement T_0} y \, dm + \int_{\complement T_0} |x| \, dm. \tag{2.1.15}$$

Conform teoremei 2.1.6, pentru un regulator p al măsurii există $h' \in \mathcal{J}$, astfel încît oricărui număr $\varepsilon > 0$ să-i corespundă $\eta(\varepsilon)$ pentru care

$$m\left(\complement T'_{\eta'}\right) \leqslant \eta'(\varepsilon)\, p \text{ implică} \int_{\complement T'_{\eta'}} |x| \, dm \leqslant \varepsilon h'.$$

În mod analog există $h'' \in \mathcal{J}$, astfel încît

$$m\left(\complement T''_{\eta''}\right) \leqslant \eta''(\varepsilon).\, p \text{ implică } \int_{\complement T''_{\eta''}} y \, dm \leqslant \varepsilon h''.$$

Să notăm cu $h = h' \vee h''$ și cu $\eta(\varepsilon) = \min\,(\eta'(\varepsilon), \eta''(\varepsilon))$. Din (2.1.15) deducem atunci pentru $T_0 = T_\eta$.

$$\left| \int_{\complement T_\eta} x_i dm - \int_{\complement T_\eta} x \, dm \right| \leqslant 2\varepsilon h \text{ dacă } m\left(\complement T_\eta\right) \leqslant \eta(\varepsilon)\, p. \tag{2.1.16}$$

Pe de altă parte, șirul $\{x_i(t)\}$ fiind aproape uniform convergent către $x(t)$, există regulatorul p, astfel ca numărului $\eta(\varepsilon)$ să-i corespundă o mulțime $T_{\eta(\varepsilon)}$ cu $m\left(\complement T_\eta\right) \leqslant \eta(\varepsilon).\, p$, iar $x_i(t) \overset{u}{\to} x(t)$ pentru $t \in T_\eta$. Există atunci $r = r(\eta) \in \mathcal{F}$, astfel încît $|x_i(t) - x(t)| \leqslant \delta_i r$ cu $\delta_i \to 0$ pentru $t \in T_\eta$. Rezultă atunci

$$\left| \int_{T_\eta} x_i \, dm - \int_{T_\eta} x \, dm \right| \leqslant \int_{T_\eta} |x_i - x| \, dm \leqslant \delta_i \int_{T_\eta} r \, dm = \delta_i \langle r, m(T_\eta) \rangle,$$

ceea ce arată că primul membru tinde la $\mathbf{0}$ cînd $i \to \infty$. Folosind aceasta împreună cu relația (2.1.16) în inegalitatea

$$\left| \int_T x_i \, dm - \int_T x \, dm \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{T_\eta} x_i \, dm - \int_{T_\eta} x \, dm \right| + \left| \int_{\complement T_\eta} x_i \, dm - \int_{\complement T_\eta} x \, dm \right|,$$

deducem

$$(o)\text{-}\lim_i \left| \int_T x_i \, dm - \int_T x \, dm \right| \leqslant 2\varepsilon h,$$

oricare ar fi $\varepsilon > 0$. Aceasta înseamnă că primul termen este $\mathbf{0}$, ceea ce demonstrează teorema.

Corolar 2.1.23. Dacă $\{x_i(t)\}$ este un șir de funcții măsurabile și pozitive, și dacă seria $\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t)$ este aproape uniform convergentă către o funcție integrabilă, atunci

$$\int_T \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t), dm(t) \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \int_T \langle x_i(t), dm(t) \rangle,$$

adică seria poate fi integrată termen cu termen.

Demonstrație. Spunem că seria este aproape uniform convergentă, în cazul cînd $\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$ converge aproape uniform către funcția limită $x(t)$, pentru $n \to \infty$. Deoarece $x(t) \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i(t)$ pentru orice n, funcțiile $x_i(t)$ sînt integrabile și propoziția noastră rezultă imediat din teoremele 2.1.7 și 2.1.22.

Observația 2.1.4. Teorema 2.1.22 poate fi stabilită de asemenea înlocuind convergența aproape uniformă prin convergența în măsură cu un anumit regulator.

Teorema 2.1.24. Dacă $\{x_i(t)\}$ este un șir de funcții integrabile care converge uniform cu excepția unei mulțimi de măsură nulă spre o funcție $x(t)$, atunci funcția $x(t)$ este integrabilă și

$$(o)\text{-}\lim_i \int_T \langle x_i(t),\ dm(t)\rangle = \int_T \langle x(t),\ dm(t)\rangle .$$

Demonstrație. Din inegalitatea

$$|x_i(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon_i r \ \ a.p.t. \ \text{cu} \ \varepsilon_i \searrow 0 \ \ (r \in \mathfrak{F})$$

rezultă în primul rînd

$$|x(t)| \leqslant |x_i(t)| + |x(t) - x_i(t)| \leqslant |x_i(t)| + \varepsilon_i r,$$

ceea ce arată că $x(t)$ este majorată *a.p.t.* de o funcție integrabilă. Funcția $x(t)$ fiind evident măsurabilă (teorema 1.4.6), ea este integrabilă conform teoremei 2.1.9.

În al doilea rînd, din

$$|x_i(t)| \leqslant |x(t)| + |x_i(t) - x(t)| \leqslant |x(t)| + \varepsilon_i r \leqslant |x(t)| + \nu \ \ a.p.t.,$$

unde am ținut seama că există $\nu \in \mathfrak{F}$ așa ca $\varepsilon_i r \leqslant \nu$, rezultă că șirul $\{x_i(t)\}$ este mărginit *a p t.* de o funcție integrabilă.

Prezenta teoremă rezultă atunci din teorema precedentă.

Corolar 2.1.25. Dacă $\{x_i(t)\}$ este un șir de funcții integrabile și dacă seria $\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t)$ este uniform convergentă *a.p.t.*, atunci ea reprezintă o funcție integrabilă și seria poate fi integrată termen cu termen.

Teorema 2.1.26. Fie $\{S_i\}$ un șir de mulțimi măsurabile $(\mathfrak{T})$ disjuncte două cîte două și $x(t)$ o funcție integrabilă pe reuniunea lor. În acest caz

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i} \langle x(t),\ dm\ (t)\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{S_i} \langle x(t),\ dm\ (t)\rangle$$

Demonstrație. Fie $\{x_i(t)\}$ un șir integrant al lui $x(t)$. Dacă mulțimile S' și S'' măsurabile $(\mathfrak{T})$ sînt disjuncte, atunci oricare ar fi indicele i

$$\int_{S' \cup S''} x_i\, dm = \int_{S'} x_i\, dm + \int_{S''} x_i\, dm$$

și prin trecere la limită obținem deci

$$\int_{S' \cup S''} x\, dm = \int_{S'} x\, dm + \int_{S''} x\, dm \tag{2.1.17}$$

(după cum am remarcat și mai înainte, la p. 85).

Fie acum $\{S_i\}$ un șir de mulțimi măsurabile $(\mathfrak{T})$ disjuncte două cîte două și să notăm

$$S_k' = \bigcup_{i=1}^{k} S_i,\ S_k'' = S \cap \complement S_k' \quad \text{unde } S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i,$$

Deoarece $S_k' \cap S_k'' = \varnothing$, folosind (2.1.17) putem scrie

$$\int_S x\, dm = \int_{S_k'} x\, dm + \int_{S_k''} x\, dm. \tag{2.1.18}$$

Șirul de mulțimi $\{S_k''\}$ tinzînd monoton către $\varnothing$, datorită teoremei 1.2.1, avem: $(o)\text{-}\lim_k m(S_k'') = 0$; există în acest caz un regulator de convergență p al șirului $\{m(S_k'')\}$, astfel ca oricărui $\eta > 0$ să-i corespundă k_η pentru care

$$m(S_k'') \leqslant \eta\, p \quad \text{dacă } k \geqslant k_\eta. \tag{2.1.19}$$

Pe de altă parte, în baza teoremei 2.1.6, există $h \in \mathcal{J}$, astfel ca oricărui $\varepsilon > 0$ să-i corespundă $\eta(\varepsilon)$, pentru care

$$m(S_k'') \leqslant \eta(\varepsilon)\, p \qquad \text{implică } \left|\int_{S_k''} x\, dm\right| \leqslant \varepsilon\, h.$$

Să luăm atunci $\eta = \eta(\varepsilon)$ în (2.1.19). Din (2.1.18) rezultă în acest caz

$$\left|\int_S x\, dm - \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} x\, dm\right| \leqslant \varepsilon\, h \quad \text{pentru } k \geqslant k_\varepsilon' = k_{\eta(\varepsilon)}$$

ceea ce înseamnă că

$$\int_S x\, dm = (o)\text{-}\lim_k \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} x\, dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{S_i} x\, dm$$

și teorema este demonstrată.

Definiția 2.1.4. O funcție (semiordonată) $f(S)$ de mulțimi măsurabile $(\mathfrak{T})$ o numim absolut aditiv-continuă $(\mathfrak{T}, m)$ dacă satisface la

a) Pentru orice șir $\{S_i\} \subset \mathfrak{T}$ de mulțimi disjuncte două cîte două

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(S_i),$$

b) Pentru orice regulator p al măsurii există elementul h, astfel ca oricărui număr $\varepsilon > 0$ să-i corespundă un număr $\eta(\varepsilon)$ cu proprietatea $m(S) \leqslant \eta(\varepsilon) \cdot p$ implică $f(S) \leqslant \varepsilon\, h$.

Observația 2.1.5. Integrala nedefinită a unei funcții integrabile $(\mathfrak{T}, m)$ este o funcție absolut aditiv-continuă $(\mathfrak{T}, m)$.

Reciproca acestei propoziții nu este în general adevărată.

Analogul noțiunii de măsură (reală) generalizată [33] este dat de următoarea

D e f i n i ț i e 2.1.5. O funcție q de la $\mathfrak{T}$ la K-spațiul regulat $\mathcal{M}$ va fi numită o *măsură semiordonată generalizată* *) dacă satisface condițiilor

1. $\sup_{A \in \mathfrak{T}} |q(A)| < +\infty$
2. Dacă $A_i \in \mathfrak{T}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ și $A_i \cap A_j = \varnothing$ pentru $i \neq j$, atunci

$$q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} q(A_i).$$

Din definiție rezultă că funcțiile de mulțimi definite prin:

$$q_+(A) = \sup_{B \subset A} q(B); \quad q_-(A) = -\inf_{B \subset A} q(B); \quad |q|(A) = \sup_{B \subset A} |q(B)|$$

(unde $A, B \in \mathfrak{T}$) sînt măsuri semiordonate și

$$q(A) = q_+(A) - q_-(A); \quad |q|(A) = q_+(A) + q_-(A)$$

Dacă q este o măsură semiordonată generalizată, se poate defini integrala unei funcții $x(t)$ în raport cu $q(A)$ cu condiția ca $x(t)$ să fie integrabilă față de $|q|(A)$. Vom defini în acest caz

$$\int_T \langle x(t), dq(t) \rangle = \int_T \langle x(t), dq_+(t) \rangle - \int_T \langle x(t), dq_-(t) \rangle .$$

Un exemplu de măsură semiordonată generalizată este dat de egalitatea

$$q(A) = \int_A x(t)\, d\mu(t),$$

unde $x(t)$ este o funcție semiordonată oarecare de la T la $\mathcal{M}$, iar μ o măsură reală pe $\mathfrak{T}$, $x(t)$ fiind integrabilă față de μ.

2. P-integrabilitate

În punctul precedent am definit integrala unei funcții semiordonate în raport cu o măsură semiordonată și am demonstrat proprietățile, sale presupunînd că P-operatorul respectiv este definit pe $\mathfrak{F} \times \mathcal{M}$. Aceasta a simplificat enunțurile și demonstrațiile.

Se poate însă considera cazul mai general cînd $\mathfrak{F} \times \mathcal{M}$ este numai suportul P-operatorului, iar nu domeniul său de definiție. În acest caz, «produsul» $\langle x, p \rangle$ neavînd sens pentru orice pereche de elemente $x \in \mathfrak{F}$, $p \in \mathcal{M}$, condiția ca o funcție să fie integrabilă în sensul definiției 2.1.2 va fi insuficientă pentru definirea integralei. Condițiile în care se poate defini integrala în raport cu un P-operator al cărui domeniu de definiție nu coincide cu suportul său, le numim condiții de P-integrabilitate.

În acest punct, vom da unele condiții de P-integrabilitate, definind noțiunea de măsură compatibilă cu un P-operator și noțiunea de funcție P-integrabilă.

*) Finită

În primul rînd, pentru a ne asigura de existența integralei unei funcții simple măsurabile $(\mathfrak{S}, m)$ oarecare (în particular a unei constante), vom introduce următoarea

Definiție 2.2.1. Măsura semiordonată m este compatibilă cu un anumit P-operator (avînd $\mathfrak{F} \times \mathcal{M}$ ca suport), dacă elementul $\langle x, m(T) \rangle$ este definit oricare ar fi $x \in \mathfrak{F}$.

Vom presupune în acest punct că măsura este compatibilă cu P-operatorul considerat.

Integrala unei funcții simple măsurabile $(\mathfrak{S})$ va fi definită, în acest caz, tot prin definiția 2.1.1. Ea are întotdeauna sens și proprietățile sale stabilite în teorema 2.1.1 se mențin.

Fie acum $x(t)$ o funcție măsurabilă $(\mathfrak{S}, m)$ oarecare. Există atunci un șir $\{x_i(t)\}$ de funcții simple măsurabile $(\mathfrak{S})$, așa ca $x_i(t) \xrightarrow{a.u.} x(t)$. Fie

$$g_i = \sup_{t \in T} | x_i(t) |$$

Spațiul $\mathfrak{F}$ fiind de tip (R^*) există șirurile de numere reale $\lambda_i \to 0$ și $\lambda'_i \to \infty$ așa ca

$$g_i^* = \lambda'_i \lambda_i g_i \xrightarrow{o} \mathbf{0}.$$

Fie

$$r = \sup_i g_i^*.$$

Vom introduce atunci următoarea

Definiția 2.2.2. O funcție $x(t)$ este P-integrabilă $(\mathfrak{S}, m)$ dacă este integrabilă $(\mathfrak{S}, m)$ și dacă pentru un șir integrant $\{x_i(t)\}$ al său, elementul *) $\langle r, p \rangle$ este definit pentru orice $p \in \mathcal{M}$.

Vom numi un astfel de șir, un șir P-integrant.

Se verifică că lemele 2.1.3, 2.1.4, 2.15 se mențin, înlocuind cuvintele «șir integrant» prin «șir P-integrant». Integrala unei funcții P-integrabile se va defini în acest caz tot prin definiția 2.1.3, făcînd aceeași înlocuire de cuvinte.

Proprietățile fundamentale ale integralei rămîn valabile.

3. Integrarea în spații complexe

Vom utiliza noțiunea de spațiu liniar semiordonat complex în sensul lui T. Ogasawara [34].

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar σ-semiordonat de tip (R^*), vom nota prin $\mathfrak{X}^* = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{X}\}$ totalitatea perechilor $\{x, y\}$ cu $x, y \in \mathfrak{X}$ pe care le vom nota prin $z = x + iy$. Vom presupune că există elementul $|x + iy| = \{(\cos \varphi) x + (\sin \varphi) y\}$. (Existența lui este asigurată în cazul cînd $\mathfrak{X}$ este de exemplu un K-spațiu). Prin definiție se consideră

a) $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ dacă $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$,

b) $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + x_2)$,

c) $(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$ cu α, β reale.

*) Pentru anumite șiruri $\{\lambda_i\}$, $\{\lambda'_i\}$ satisfăcând condițiile indicate.

Se arată că:

i) $|x| \vee |y| \leqslant |z| \leqslant |x| + |y|$

ii) $|az| = |a|\,|z|$ (a complex)

iii) $|z| = |\bar{z}|$ unde $\bar{z} = x - iy$.

Într-un spațiu $\mathfrak{X}^*$ prin $z \geqslant 0$, se înțelege, că, dacă $z = x + iy$, atunci $x \geqslant 0$ și $y \geqslant 0$.

Vom extinde pe $\mathcal{T}^* \times \mathcal{M}^*$ operatorul $\langle x, m\rangle$ definit pe $\mathcal{T} \times \mathcal{M}$ prin

$$\langle x + iy, m + in\rangle = (\langle x, m\rangle) - \langle y, n\rangle) + i\,(\langle x, n\rangle) + \langle y, m\rangle)$$

valorile sale aparținînd lui $\mathcal{T}^*$.

Acest operator are proprietățile următoare

1) $z \geqslant 0$, $m^* \geqslant 0$ implică $\langle z, m^*\rangle \geqslant 0$;

2) $\langle z_1 + z_2, m^*\rangle = \langle z_1, m^*\rangle + \langle z_2, m^*\rangle$;

$\langle z, m_1^* + m_2^*\rangle = \langle z, m_1^*\rangle + \langle z, m_2^*\rangle$.

O aplicație m^* a lui $\mathfrak{T}$ în $\mathcal{T}^*$ va fi numită o măsură semiordonată complexă dacă $m^* = m_1 + i\ m_2$, unde m_1 și m_2 sînt măsuri semiordonate în sensul definiției 1.2.1.

Într-un spațiu complex $\mathfrak{X}^*$ prin $z_i \xrightarrow{o} z$, vom înțelege că $|z_i - z| \xrightarrow{o} 0$. Din *i*) rezultă că aceasta echivalează cu $x_i \xrightarrow{o} x$ și $y_i \xrightarrow{o} y$.

Vom păstra definițiile obișnuite ale convergenței uniforme și aproape uniforme. În ultimul caz vom cere ca mulțimile S_η din definiția corespunzătoare să satisfacă la: $|m^*([S_\eta)| \leqslant \eta$. *p.* Se observă că $z_i(t) \xrightarrow{a.u.} z(t)$ echivalează cu $x_i(t) \xrightarrow{a.u.} x(t)$ și $y_i(t) \xrightarrow{a.u.} y(t)$ în raport atît cu m_1 cît și cu m_2.

O funcție simplă, $z(t)$, va fi de forma

$$z(t) = \sum_k g_k \gamma_{A_k}(t) = \left(\sum_k c_{1k}\gamma_{A_k}(t)\right) + i\left(\sum_k c_{2k}\gamma_{A_k}(t)\right)$$

cu notații evidente.

În acest caz se observă că, păstrînd definiția măsurabilității $(\mathfrak{T}, m^*)$ dată mai înainte, $z(t)$ este măsurabilă, dacă și numai dacă părțile sale «reală» și «imaginară» sînt măsurabile simultan $(\mathfrak{T}, m_1)$ și $(\mathfrak{T}, m_2)$.

Integrala unei funcții simple va fi de forma

$$\int_T \langle z(t), dm^*(t)\rangle = \sum_k \langle g_k, m^*(A_k)\rangle = \sum_k \langle c_{1k} + i\,c_{2k},\ m_A(A_k) + i\,m_2(A_k)\rangle =$$

$$= \sum_k \langle c_{1k}, m_1(A_k)\rangle - \sum_k \langle c_{2k}, m_2(A_k)\rangle + i \sum_k \langle c_{ik}, m_2(A_k)\rangle +$$

$$+ i \sum_k \langle c_{2k}\, m_1(A_k)\rangle = \int_T \langle x(t), dm_1\rangle - \int_T \langle y(t), dm_2, (t)\rangle +$$

$$+ i\int_T \langle x(t), dm_2(t)\rangle + i\int_T \langle y(t), dm_1(t)\rangle$$

În cazul spațiilor complexe, vom spune că funcția măsurabilă $z(t)$ este integrabilă $(\mathfrak{T}, m^*)$, dacă pentru un șir aproximant $\{z_i(t_j)\}$

$$(o)\text{-}\lim_k \left[\sup_{i,j \geqslant k} \int_T \langle |z_j(t) - z_k(t)|, dm_k(t) \rangle \right] = 0 \quad (h = 1,2)$$

și vom defini

$$\int_T \langle z(t)\, dm^* \rangle(t) = (o)\text{-}\lim_j \int \langle z_j(t), dm^*(t) \rangle.$$

În acest caz funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ sînt integrabile $(\mathfrak{T}, m_1)$ și $(\mathfrak{T}, m_2)$, (deoarece $|\langle z, m_h \rangle| \leqslant \langle |z|, m_h \rangle$, $h = 1, 2$). Reciproc, dacă $x(t)$ și $y(t)$ sînt integrabile $(\mathfrak{T}, m_1)$ și $(\mathfrak{T}, m_2)$, atunci $z(t)$ este integrabilă $(\mathfrak{T}, m^*)$.

Integrala lui $z(t)$ va avea expresia

$$\int_T \langle z(t), dm^*(t) \rangle = \int_T \langle x(t), dm_1(t) \rangle - \int_T \langle x(t), dm_2(t) \rangle$$

$$+ i\left\{ \int_T \langle x(t), dm_2(t) \rangle + \int_T \langle y(t), dm_1(t) \rangle \right\}.$$

Studiul integării funcțiilor în spațiile complexe se reduce astfel la acela al integrării funcțiilor semiordonate « reale ».

În cazul particular cînd măsura este semiordonată « reală », vom avea

$$\int_T \langle z(t), dm(t) \rangle = \int_T \langle x(t); dm(t) \rangle + i \int_T \langle y(t)\, dm, (t) \rangle,$$

egalitate analogă integralei Lebesgue a funcțiilor complexe.

4. Derivarea integralei

Vom considera aici cazul $T = [a, b] \subset R$, iar $\mathfrak{T}$ conține toate mulțimile boreliene ale lui T. Vom presupune că $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{J}$ sînt K-spații regulate.

Vom introduce mai întîi următoarea

Definiția 2.4.1. Vom spune că o măsură semiordonată pe dreaptă este derivabilă în punctul t, dacă funcția de distribuție asociată este derivabilă în punctul t.

Un exemplu imediat de măsură derivabilă aproape peste tot pe intervalul [0,1] este dat de

$$m(A) = \int_A f(s, t)\, dt, \text{ unde } f(s\,t) \in L[0,1]^2.$$

În acest caz

$$m([0, t]) = \int_o^t f(s, t)\, dt \quad \text{și} \quad m'(t) = f(., t).$$

Teoremă 2.4.1. Dacă măsura m este derivabilă în punctul t_0 iar $x(t)$ este continuă în t_0, atunci*)

$$(o)\text{-}\lim_{\delta \to o} \frac{1}{\delta} \int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle |x(t) - x(t_0)|, dm(t) \rangle = 0.$$

Aceeași egalitate are loc prin înlocuirea lui $[t_0, t_0 + \delta)$ prin $[t_0 - \delta\, t_0)$.

*) Vom înlocui semnul $\int_{[\xi_1, \xi_2)}$ prin $\int_{\xi_1}^{\xi_2}$

Demonstrație. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există δ_ε așa ca

$$| x(t) - x(t_0) | \leqslant \varepsilon r(t_0) \quad \text{dacă} \quad | t - t_0 | \leqslant \delta_\varepsilon .$$

Avem pentru $\delta \leqslant \delta_\varepsilon$

$$\frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle | x(t) - x(t_0) |, dm(t) \rangle \leqslant \frac{1}{\delta}\varepsilon \langle r(t_0)\, m(t_0, t_0+\delta) \rangle =$$

$$= \varepsilon \langle r(t_0), \frac{1}{\delta}[m(t_0+\delta) - m(t_0)] \rangle .$$

Funcția $m(t)$ fiind derivabilă pentru $t = t_0$, avem

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle | x(t) - x(t_0) |, dm(t) \rangle \leqslant \varepsilon \langle r(t_0), m'(t_0) \rangle .$$

Deoarece ε este arbitrar de mic, rezultă că primul membru al inegalității este **0**. Același lucru are pentru intervalele $[t_0 - \delta, t_0)$.

Vom nota acum prin

$$X(t) = \int_a^t \langle x(t), dm(t) \rangle .$$

Are loc următoarea

Teorema 2.4.2. Dacă $x(t)$ este continuă în punctul t_0, iar măsura m este derivabilă în t_0,

$$X'(t_0) = \langle x(t_0), m'(t_0) \rangle$$

Demonstrație. Avem

$$\left| \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle x(t), dm(t) \rangle - \langle x(t_0), \frac{1}{\delta}[m(t_0+\delta) - m(t_0)] \rangle \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle x(t), dm(t) \rangle - \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle x(t_0), dm(t) \rangle \right| \leqslant \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle | x(t) -$$

$$- x(t_0), | dm(t) \rangle .$$

Datorită teoremei 2.4.1 ultima integrală (o)-converge spre **0**. Din

$$\langle x(t_0), \frac{1}{\delta}[m(t_0+\delta) - m(t_0)] \rangle \xrightarrow{o} \langle x(t_0), m'(t_0) \rangle$$

rezultă atunci

$$\frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle x(t), dm(t) \rangle \xrightarrow{o} \langle x(t_0), m'(t_0) \rangle ,$$

cînd $\delta \to 0$. Pentru intervalele $[t_0 - \delta, t_0)$ se deduce același lucru

Observație. Dacă m este măsura reală Lebesgue, atunci $m'(t) \equiv 1$ și $X'(t) = x(t)$, oricare ar fi t.

5. Operațiile regulate și integrarea

Vom considera operații regulate definite pe spațiile $\mathscr{M}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{T}$ de tip (R^*) cu valori în K-spațiul $\mathscr{Y}$ de tip (R^*).

Vom utiliza notațiile din punctul 1.

Teorema 2.5.1. Dacă U este o operație aditivă și pozitivă definită pe spațiul $\mathscr{M}$ cu valori în $\mathscr{Y}$ și dacă $m(A)$ este o măsură de la $\mathscr{C}$ la $\mathscr{M}$, atunci $U[m(A)]$ este o măsură de la $\mathscr{C}$ la $\mathscr{Y}$. Dacă U este regulata oarecare, atunci $U[m(A)]$ este o măsură generalizată.

Demonstrația este imediată, ținînd seama că U este și (oo)-liniară.

Dacă în particular U este o funcțională aditivă și pozitivă, atunci $U[m(A)]$ este o măsură reală. Dacă U este regulată oarecare, atunci $U[m(A)]$ este o măsură reală generalizată.

Observația 2.5.1. Dacă U este o operație pozitivă (oo)-continuă și aditivă pentru termeni pozitivi, atunci $U[m]$ este de asemenea o măsură. Un caz particular este dat de norma unui KB-spațiu cu normă aditivă pentru termeni pozitivi.

Teorema 2.5.2. Dacă U este o operație regulată de la $\mathscr{F}$ la $\mathscr{Y}$, iar $x(t)$ este o funcție măsurabilă $(\mathscr{C}, m)$ de la T la $\mathscr{F}$ atunci funcția $y(t) = U[x(t)]$ este o funcție măsurabilă $(\mathscr{C}, m)$ de la T la $\mathscr{Y}$.

Demonstrație. Să observăm mai întîi că pentru o funcție simplă $x(t) = \{c_1, A_1; \ldots; c_n, A_n\}$ avem $y(t) = \{U(c_1), A_1; \ldots; U(c_n), A_n\}$, deci $y(t)$ este tot o funcție simplă. Dacă $x(t)$ este măsurabilă există $x_i(t)$ simple-măsurabile așa ca

$$|x_i(t) - x(t)| \leqslant \varphi_i(\eta) \text{ pentru } t \in S_\eta \text{ cu } m(\complement S_\eta) \leqslant \eta p \ (\eta \text{ arbitrar}).$$

Avem

$$|y_i(t) - y(t)| = |U[x_i(t)] - U[x(t)]| = |U[x_i(t) - x(t)]| \leqslant$$
$$\leqslant |U|[|x_i(t) - x(t)|] \leqslant |U|[\varphi_i(\eta)] = \omega_i(\eta) \quad (t \in S_\eta)$$

unde $\omega_i(\eta) \xrightarrow{o} 0$ cînd $i \to \infty$. Aceasta înseamnă că $\{y_i(t)\}$ este un șir aproximant al lui $y(t)$ și deci acesta este măsurabilă.

Teorema 2.5.3. Dacă U este o operație regulată de la $\mathscr{F}$ la $\mathscr{Y}$ iar $x(t)$ este o funcție integrabilă (de la T la $\mathscr{F}$) față de măsura μ reală, atunci funcția $y = U[x(t)]$ este o funcție integrabilă (de la T la $\mathscr{Y}$) și

$$U\left\{\int_T x(t)\, d\mu(t)\right\} = \int_T U[x(t)]\, d\mu(t).$$

Demonstrație. Fie $\{x_i(t)\}$ un șir integrant al lui $x(t)$. Atunci $y_i(t) = U[x_i(t)]$ formează un șir aproximant al lui $y(t)$, în baza teoremei precedente. Mai departe avem

$$\sup_{i,j \geqslant k} \int_T |y_i - y_j|\, d\mu = \sup_{ij \geqslant k} \int_T |U(x_i) - U(x_j)|\, d\mu \leqslant \sup_{ij \geqslant k} \int_T |U|(|x_i - x_j|)\, d\mu$$

$$= \sup_{i,j \geqslant k} |U| \left[\int_T |x_i - x_j|\, d\mu\right] \leqslant |U| \left[\sup_{c,j \geqslant k} \int_T |x_i - x_j|\, d\mu\right].$$

Ultimul membru (o)-converge la $\mathbf{0}$, deoarece $|U|$ este (oo)-continuă iar argumentul său tinde la $\mathbf{0}$. Aceasta arată că $\{y_i(t)\}$ este un șir integrant al lui $y(t)$.

Egalitatea din enunțul teoremei se stabilește cu ușurință.

Observația 2.5.2. Dacă μ este măsura reală Lebesgue iar Φ este o funcțională regulată pe $\mathcal{F}$, atunci pentru $x(t)$ integrabilă, funcția reală $\xi(t) = \Phi[x(t)]$ este integrabilă Lebesgue.

Vom considera acum cazul $\mathcal{F} = \mathcal{M} = \mathcal{J} = \mathfrak{X}$. Vom considera un K-spațiu. $\mathcal{Y}$ de tip (R^*) și vom presupune că pe $\mathcal{Y}$ este definit de asemenea un P-operator cu valori în $\mathcal{Y}$ pe care-l vom nota prin $\langle y_1, y_2 \rangle$ ca și cel din spațiul $\mathfrak{X}$.

Definiție. Vom spune că operația U de la $\mathfrak{X}$ la $\mathcal{Y}$ este P-*multiplicativă* (mai exact P_1P_2-multiplicativă- dacă notăm prin P_1 și P_2 cei doi P-operatori) dacă

$$U(\langle x_1, x_2 \rangle) = \langle U(x_1), U(x_2) \rangle. \tag{2.5.1}$$

Observația 2.5.3. Noțiunea de operație P_1P_2-multiplicativă poate fi definită într-un mod mai general presupunînd că $\mathfrak{X}$ și $\mathcal{Y}$ sînt K-liniale oarecari, iar $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ și $\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ sînt numai suporturi pentru operatorii-produs respectivi. În acest caz vom impune condiția: dacă $\langle x_1, x_2 \rangle$ este definit, atunci și $\langle U(x_1), U(x_2) \rangle$ este definit și are loc egalitatea (2.5.1). În cazul cînd $\mathfrak{X} = \mathcal{Y}$, iar P-operatorul este complet V-disjunctiv, orice operație P-multiplicativă este și disjunctivă. Dacă $\mathfrak{X}$ este un K-spațiu cu unitate iar o operație (oo)-liniară U este P-multiplicativă față de un P-operator complet V-disjunctiv, atunci U devine liniar-multiplicativă (în sensul lui Vulih) la o alegere convenabilă a unității.

Observația 2.5.4. În cazul unui P-operator V-disjunctiv și parțial (o)-continuu, definit pe un K-spațiu lărgit sau de elemente mărginite $\mathfrak{X}$, faptul că U este o operație P-multiplicativă (de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{X}$) înseamnă că aceasta satisface relației

$$U[V(x \cdot y)] = V[U(x) \cdot U(y)], \tag{2.5.2}$$

unde $V(x) = \langle x, 1 \rangle$ (a se vedea teorema 2.1.3, cap. I).

Are loc următoarea

Teoremă 2.5.4. Dacă U este o operație aditivă și pozitivă, P-multiplicativă de la $\mathfrak{X}$ la $\mathcal{Y}$ iar $x(t)$ este integrabilă $(\mathfrak{T}, m)$, atunci $U[x(t)]$ este integrabilă față de $U[m(A)]$ și

$$U\left\{\int_T \langle x(t), dm(t) \rangle\right\} = \int_T \langle U[x(t)], dU[m(t)] \rangle.$$

Demonstrație. În baza teoremei 2.5.1, $m^*(A) = U[m(A)]$ este o măsură de la $\mathfrak{T}$ la $\mathcal{Y}$. În baza teoremei 2.5.2, ținînd seama de relația dintre m^* și m, rezultă că $y(t) = U[x(t)]$ este măsurabilă $(\mathfrak{T}, m^*)$.

Dacă $x(t)$ este o funcție simplă, vom avea

$$U\left\{\int_T x\,dm\right\} = U[\Sigma \langle c_i, m(A_i) \rangle] = \Sigma U[\langle c_i, m(A_i) \rangle] =$$

$$= \Sigma \langle U(c_i), U[m(A_i)] \rangle = \int_T dm^*.$$

Fie acum $x(t)$ oarecare și $\{x_i(t)\}$ un șir integrant al său (relativ la m). Șirul $y_i(t) = U[x_i(t)]$ este un șir aproximant al lui $y(t)$ (relativ la m^*).

Faptul că este chiar un șir integrant (relativ la m^*) rezultă din următoarele relații, ținînd seama că U este (oo)-continuă.

$$\sup_{ij\geqslant k}\int_T (y_i - y_j)\,dm^* = \sup_{ij\geqslant k}\int_T |\,U(x_i) - U(x_j)\,|\,dU[m] \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{i,j\geqslant k}\int_T U(|\,x_i - x_j\,|)\,dU[m] = \sup_{i,j\geqslant k} U\left\{\int_T |\,x_i - x_j\,|\,dm\right\} \leqslant$$

$$\leqslant U\left\{\sup_{i,j\geqslant k}\int_T |\,x_i - x_j\,|\,dm\right\}.$$

În plus avem

$$U\left\{\int_T x\,dm\right\} = U\left\{(o)\text{-}\lim_i \int_T x_i\,dm\right\} = (o)\text{-}\lim_i U\left\{\int_T x_i\,dm\right\} =$$

$$= (o)\text{-}\lim_i \int_T y_i\,dm^* = \int_T y\,dm^*$$

care demonstrează teorema.

Observația 2.5.5. Propoziția precedentă are loc în particular dacă $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt K-spații cu unitate, $\mathfrak{X}$ fiind lărgit, iar $\langle x, y\rangle$ fiind produsul lui Vulih. În acest caz U va fi o operație liniar-multiplicativă în sensul lui Vulih (se știe că o astfel de operație este și pozitivă).

Propoziția are de asemenea loc pentru cazul mai particular încă, al proiectorilor în spațiul $\mathfrak{X}$.

Observația 2.5.6. În cazul $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}$ fiind un K-spațiu lărgit sau de elemente mărginite, iar P-operatorul fiind V-disjunctiv, egalitatea (2.5.1) devine, datorită lui (2.5.2)

$$U\left\{V\left[\int_T x(t)\,dm(t)\right]\right\} = V\left\{\int_T U[x(t)]\,dU[m(t)]\right\}.$$

Observația 2.5.7. Teorema 2.5.3 se poate generaliza dacă definim o noțiune mai generală de operație multiplicativă.

Fie pe $\mathfrak{I}\times\mathfrak{J}$ un P-operator cu valori în $\mathfrak{J}$. Vom spune că operația U de la $\mathfrak{I}$ la $\mathfrak{J}$ este multiplicativă relativ la P-operatorii din $\mathfrak{F}\times\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{I}\times\mathfrak{I}$, dacă există operațiile U_1 de la $\mathfrak{F}$ la $\mathfrak{I}$ și U_2 de la $\mathfrak{M}$ la $\mathfrak{I}$, astfel încît

$$U(\langle x, m\rangle) = \langle U_1(x), U_2(m)\rangle.$$

Dacă $\mathfrak{I} = \mathfrak{J}$ este un K-spațiu lărgit sau de elemente mărginite și considerăm produsul lui Vulih în ele, atunci, dacă U este o operație aditivă-pozitivă de la $\mathfrak{F}$ la $\mathfrak{I}$, V este o operație aditivă-pozitivă de la $\mathfrak{M}$ la $\mathfrak{I}$, după cum știm (cap. I, exemple 1.12) prin egalitatea

$$\langle x, y\rangle = U(x)\cdot V(y)$$

definim un P-operator de la $\mathfrak{F}\times\mathfrak{M}$ la $\mathfrak{I}$. Dacă W este o operație liniar-multiplicativă (în sensul lui Vulih) de la $\mathfrak{I}$ la $\mathfrak{I}$ atunci

$$W(\langle x, y\rangle) = W[U(x)\cdot V(y)] = W[U(x)]\cdot W[V(y)] = W_1(x)\cdot W_2(y),$$

ceea ce ne dă un exemplu de operație multiplicativă în sensul definit mai înainte, față de produsul $\langle x, y\rangle$ și produsul lui Vulih din $\mathfrak{I}$.

Dacă U este aditivă-pozitivă și multiplicativă în sensul general definit mai sus, iar operațiile asociate U_1 și U_2 sînt aditive și pozitive, atunci teorema 2.5.3 se menține, avînd

$$U\left\{\int_T \langle x(t),\ dm(t)\rangle\right\} = \int_T \langle U_1[x(t)],\ U_2[dm(t)]\rangle,$$

egalitate care generalizează pe aceea din enunțul teoremei 2.5.3.

În următoarele două puncte vom da alte moduri de a introduce o integrală pentru funcții semiordonate. Unul se referă la cazul funcțiilor de o variabilă reală, iar altul la cazul funcțiilor cu valori într-un K-spațiu cu unitate.

6. Integrarea funcțiilor de o variabilă reală

În acest punct vom considera funcții semiordonate definite pe un interval $[a, b]$ de pe dreapta reală. Vom presupune că este dată o funcție de distribuție $m(t)$ pe segmentul $[a, b]$ cu valori în spațiul $l.c\text{-}s.$ $\mathcal{M}$, adică o funcție semiordonată, pozitivă, monoton crescătoare și continuă la stînga. Dacă $[c, d)$ este un interval deschis la dreapta inclus în $[a, b]$, vom nota

$$m([c, d)) = m(d) - m(c)$$

și vom numi $m([c, d))$ măsura intervalului $[c, d)$. Măsura unei mulțimi compusă dintr-un singur punct, $\{t\}$, va fi definită prin $m(\{t\}) = m(t + 0) - m(t)$. Măsura unui interval oarecare se va defini apoi într-un mod evident.

Se verifică că dacă $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$ iar Δ, Δ_1, Δ_2, sînt intervale oarecari, atunci $m(\Delta) = m(\Delta_1) + m(\Delta_2)$.

Vom introduce o integrală tip Riemann a unei funcții semiordonate uniform continue de variabilă reală, în raport cu o funcție de distribuție. Ea poate fi apoi extinsă pentru funcții care nu sînt uniform continue.

Vom considera funcții definite pe un interval $[a, b]$ cu valori într-un spațiu $l.\sigma\text{-}s.$ $\mathcal{F}$ și vom presupune că pe $\mathcal{F} \times \mathcal{M}$ este definit un P-operator cu valori în spațiul $l.\sigma\text{-}s.$ $\mathcal{J}$.

Definiția 2.6.1. O funcție semiordonată $x(t)$ definită pe un segment $[a, b]$ va fi numită Δ-simplă dacă se poate pune sub forma

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_{\Delta_i}(t),$$

unde Δ_i sînt intervale oarecare disjuncte, așa ca $\bigcup \Delta_i = [a, b]$.

Definiția 2.6.2. Dacă $x(t)$ este o funcție Δ-simplă, vom numi integrala sa pe intervalul $[a, b]$ elementul

$$\int_{[a,b]} \langle x(t),\ dm(t)\rangle = \sum_i \langle c_i, m(\Delta_i)\rangle.$$

Teorema [a, b]. Dacă $x(t)$ este o funcție uniform continuă pe $[a, b]$ atunci sumele

$$\sum_i \langle x(t_i),\ m(\Delta_i)\rangle \quad \text{cu} \quad t_i \in \Delta_i,\ \bigcup_i \Delta_i = [a, b],\ \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$$

tind către o limită unică pentru un șir descrescător de partiții a căror normă *) tinde către zero.

*) Prin norma unei partiții înțelegem cea mai mare lungime a subintervalelor.

Demonstrație. Fie $\mathcal{D}^k = \{\Delta_i^k\}$ un șir descrescător de partiții al intervalului $[a, b]$ formate din intervale oarecare, astfel încît normele lor δ^k să tindă către 0. Funcția $x(t)$ fiind uniform continuă, dacă t_i, $t_i' \in \Delta_i^k$ avem $|x(t_i) - x(t_i')| \leqslant u(\delta^k)$ cu $u(\delta^k) \to 0$ pentru $k \to \infty$.

Să notăm cu s_k sumele corespunzătoare diviziunilor. Se verifică

$$|s_k - s_j| \leqslant \langle u(\delta^l), m([a, b])\rangle.$$

pentru $k, j \geqslant l$. De aici rezultă că

$$(o)\text{-}\lim_l [\sup_{k,j\geqslant l} |s_k - s_j|] = \mathbf{0}$$

deci există $s = (o)\text{-}\lim_k s_k$.

Dacă $\mathcal{D}_1^k$ ar fi un alt șir de diviziuni, conform celor de mai sus există $s^1 = (o)\text{-}\lim_k s_k^1$. Fie $\mathcal{D}_2^k = \mathcal{D}^k \cup \mathcal{D}_1^k$ și $s^2 = (o)\text{-}\lim s_k^2$. Din

$$|s^2 - s_k| \leqslant |s^2 - s_k^2| + |s_k^2 - s_k| \leqslant u_k + v_k$$
$$|s^2 - s_k^1| \leqslant |s^2 - s_k^2| + |s_k^2 - s_k^1| \leqslant u_k + w_k$$

unde $u_k \searrow 0$, $v_k \searrow \mathbf{0}$ și $w_k \searrow \mathbf{0}$, rezultă că $s = s^1 = s^2$, deci limita este unică.

În baza acestei teoreme introducem următoarea:

Definiție 2.6.3. Dacă $x(t)$ este o funcție uniform continuă pe $[a, b]$ vom numi integrala lui $x(t)$ pe $[a, b]$, și o vom nota prin

$$\int_{[a,b]} \langle x(t), dm(t)\rangle,$$

limita sumelor de forma

$$\sum_i \langle x(t_i^k), m(\Delta_i^k)\rangle \quad (t_i^k \in \Delta_i^k)$$

$\{\Delta_1^k, \ldots, \Delta_{n_k}^k\}$ fiind un șir descrescător de partiții format din intervale oarecare ale lui $[a, b]$ a căror normă tinde la zero.

Din definiție rezultă că această integrală este (o)-limita integralelor unui șir de funcții Δ-simple care converg uniform către $x(t)$. De aici deducem că dacă $m(t)$ este funcția de distribuție a unei măsuri, atunci pentru funcțiile uniform continue, integrala introdusă prin definiția 2.6.3 este echivalentă cu aceea introdusă prin definiția 2.1.3 (în cazul spațiilor de tip (R^*)).

Observația 2.6.1. Într-un mod analog se poate defini integrala Stieltjes a unei funcții semiordonate $x(t)$ în raport cu o funcție semiordonată $g(t)$ cu variație mărginită și în raport cu un P-operator continuu în primul argument.

Integrala Stieltjes a funcțiilor semiordonate în K-spațiile cu element unitate a fost introdusă de B. Z. Vulih, folosind produsul introdus de el. Nu ne vom opri de aceea la studiul acestui tip de integrală*). Singura observație pe care o facem aici este aceea privitor la posibilitatea generalizării ei prin considerarea în rol de produs a unui P-operator abstract.

*) Nu cunoaștem de altfel detalii asupra lucrării lui B. Z. Vulih, avînd cunoștință de ea numai din recenzia din Mathematical Reviews, vol. 8, 1947.

Observaţia 2.6.2. Integrala riemanniană introdusă mai sus poate fi extinsă în K-spaţii regulate pînă la o integrală tip Lebesgue pentru funcţii care nu sînt uniform continue, printr-un procedeu asemănător celui clasic Dacă $m(t)$ este o funcţie de distribuţie a unei măsuri semiordonate, atunci integrala obţinută va fi mai restrictivă decît cea introdusă la începutul acestui paragraf.

7. Integrarea în spaţii cu unitate

Dăm aici un alt mod de a introduce noţiunea de integrală tip Lebesgue pentru cazul cînd mulţimea valorilor funcţiilor este un spaţiu $l.\sigma - s.$ cu element unitate.

Vom presupune că $\mathcal{F}$ $\mathcal{M}$ şi $\mathcal{J}$ sînt spaţii $l.\sigma - s.$ de tip (R^*), iar $\mathcal{F}$ este în plus un spaţiu cu element unitate. Vom presupune că $\mathcal{F} \times \mathcal{M}$ este suportul unui P-operator cu valori în $\mathcal{J}$ astfel ca $\langle \mathbf{1}, m \rangle$ să fie definit pentru orice $m \in \mathcal{M}$, iar măsura considerată va fi presupusă compatibilă cu acest P-operator*) (definiţia 2.2.1.) Vom păstra definiţia funcţiilor simple măsurabile şi a integralei sale. Vom păstra de asemenea definiţia măsurabilităţii unei funcţii oarecare.

O funcţie $x(t)$ definită pe T cu valori în $\mathcal{F}$ va fi numită $\mathbf{1}$-mărginită, dacă există ξ real, aşa ca $|x(t)| \leqslant \xi \mathbf{1}$ pentru orice $t \in T$.

Dacă $x(t)$ este măsurabilă şi $\mathbf{1}$-mărginită, atunci ea posedă un şir aproximant format din funcţii $\mathbf{1}$-mărginite în ansamb'u.

Într-adevăr, fie $\{x_n(t)\}$ un şir aproximant arbitrar şi $|x(t)| \leqslant \xi \mathbf{1}$. Punînd

$$x_n'(t) = [x_n(t)]_+ \wedge \xi\mathbf{1} - [x_n(t)]_- \wedge \xi\mathbf{1}$$

atunci $x_n'(t)$ sînt tot simple şi $x_n'(t) \overset{a.u}{\to} x(t)$, datorită inegalităţilor

$$|[x_n'(t)]_+ - [x(t)]|_+ \leqslant |[x_n(t)]_+ - [x(t)]_+|;$$
$$|[x_n'(t)]_- - [x(t)]_-| \leqslant |[x_n(t)]_- - [x(t)]_-|.$$

Deoarece

$$x_n'(t) \overset{a.u}{\to} x(t),$$

există $p \in \mathcal{M}$ astfel încît, oricare ar fi $\varepsilon > 0$

$$|x_n'(t) - x(t)| \leqslant u_n(\varepsilon),$$

unde $u_n(\varepsilon) \searrow \mathbf{0}$, pentru $t \in T_\varepsilon$ cu $m(\complement T_\varepsilon) \leqslant \varepsilon p$.

Datorită inegalităţii

$$|x_i'(t) - x_j'(t)| \leqslant |x_i'(t) - x(t)| + |x(t) - x_j'(t)|,$$

dacă $t \in T_\varepsilon$, atunci

$$\sup_{i,j \geqslant k} |x_i'(t) - x_j'(t)| \leqslant 2\, u_k(\varepsilon).$$

Pe de altă parte, deoarece $|x_i'(t)| \leqslant \xi\mathbf{1}$

$$|x_i'(t) - x_j'(t)| \leqslant |x_i'(t)| + |x_j'(t)| \leqslant 2\xi\mathbf{1}.$$

*) Alte notaţii utilizate vor fi cele de la punctul 1.

Avem atunci, pentru $i, j \geqslant k$

$$\int_T |x_i' - x_j'| \, dm = \int_{T_\varepsilon} |x_i' - x_j'| \, dm + \int_{\complement T_\varepsilon} |x_i' - x_j| \, dm \leqslant \langle u_k(\varepsilon), m(T_\varepsilon) \rangle +$$

$$2\xi \langle \mathbf{1}, m(\complement T_\varepsilon) \rangle \leqslant \langle u_k(\varepsilon), m(T) \rangle + 2\xi\varepsilon \langle \mathbf{1}, p \rangle.$$

De aici rezultă că există

$$(o)\text{-}\lim_i \int_T x_i' \, dm.$$

Să presupunem că $\{x_i''(t)\}$ este un alt șir aproximant, așa ca $|x_i''(t)| \leqslant \xi \mathbf{1}$. Atunci

$$(o)\text{-}\lim_i \int_T x_i'' \, dm = (o)\text{-}\lim_i \int_T x_i' \, dm.$$

Într-adevăr, deoarece

$$x_i(t) \xrightarrow{au} x(t)$$

există $w_i(\varepsilon)$, așa ca

$$|x_i'(t) - x_i''(t)| \leqslant w_i(\varepsilon) \quad (w_i(\varepsilon) \searrow 0)$$

pentru $t \in T_\varepsilon^*$ cu T_ε^* convenabil aleasă, unde $m(\complement T_\varepsilon^*) \leqslant \varepsilon p^*$ (a se vedea demonstrația lemei 2.1.5).

Avem, în acest caz,

$$\left| \int_T x_i' \, dm - \int_T x_i'' \, dm \right| \leqslant \int_T |x_i' - x_i''| \, dm = \int_{T_\varepsilon^*} |x_i' - x_i''| \, dm +$$

$$+ \int_{\complement T_\varepsilon^*} |x_i' - x_i''| \, dm \leqslant \langle w_i(\varepsilon), m(T) \rangle + 2\varepsilon\xi \langle \mathbf{1}, p \rangle,$$

ceea ce demonstrează afirmația noastră.

Vom defini atunci pentru o funcție $x(t)$, $\mathbf{1}$-mărginită

$$\int_T \langle x(t), dm(t) = (o)\text{-}\lim_i \int_T \langle x_i(t), dm(t) \rangle,$$

unde $\{x_i(t)\}$ este un șir aproximant al lui $x(t)$, așa ca

$$|x_i(t)| \leqslant \xi \mathbf{1}.$$

Fie acum $x(t)$ o funcție măsurabilă oarecare pozitivă. Dacă elementele

$$\int_T \langle x(t) \wedge n\mathbf{1}, dm(t) \rangle \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

formează un șir mărginit, vom spune că $x(t)$ este P-integrabilă și vom defini

$$\int_T \langle x(t), dm(t) \rangle = (o)\text{-}\lim_n \int_T \langle x(t) \wedge n\mathbf{1}, dm(t) \rangle = \sup_n \int_T \langle x(t) \wedge n\mathbf{1}, dm(t) \rangle.$$

Dacă $x(t)$ este o funcție măsurabilă oarecare nu neapărat pozitivă, vom spune că ea este P-integrabilă, dacă $[x(t)]_+$ și $[x(t)]_-$ sînt integrabile și vom defini:

$$\int_T \langle x(t), dm(t) \rangle = \int_T \langle [x(t)]_+, dm(t) \rangle - \int_T \langle [x(t)]_-, dm(t) \rangle .$$

În cazul unui P-operator definit pentru orice pereche de elemente din $\mathfrak{F}$ și $\mathfrak{M}$ integrala aceasta este mai puțin restrictivă decît cea introdusă la începutul acestui paragraf. Existența elementului unitate în spațiul $\mathfrak{F}$ permite în plus prin definițiile introduse mai sus să se dea o condiție mai simplă de P-integrabilitate (în cazul cînd domeniul de definiție al P-operatorului nu coincide cu suportul său). În particular se poate considera $\mathfrak{F} = \mathcal{M} = \mathcal{J}$, P-operatorul fiind produsul lui Vulih, iar $m(T)$ un element mărginit în $\mathfrak{F}$ (de exemplu în cazul măsurii lui Sobolev).

CAPITOLUL IV

APLICAȚIILE TEORIEI INTEGRĂRII

Noțiunea de integrală introdusă în capitolul III are multiple aplicații în diverse probleme ale analizei funcționale în spațiile liniare semiordonate.

În spațiile Banach cunoscutele integrale ale funcțiilor vectoriale (Bochner, Pettis) și-au găsit aplicații în cele mai diferite probleme cum ar fi teoria integralelor singulare, teoria funcțiilor vectoriale de variabilă complexă etc. Integrala funcțiilor semiordonate poate fi de asemenea utilizată în probleme asemănătoare precum și în probleme noi.

Scopul acestui capitol este prezentarea unora dintre aplicațiile teoriei integrării în spațiile liniare semiordonate. Ne vom opri mai întîi asupra problemei reprezentării integrale a operațiilor liniare considerînd două spații concrete. Aceasta va face obiectul paragrafului 1. În paragraful 2 vom indica aplicațiile noțiunii de integrală în teoria ecuațiilor funcționale integrale, în teoria integralelor singulare și în generalizarea problemei momentelor lui Hausdorff.

Diverse alte probleme — pe care nu le vom considera aici — pot folosi de asemenea noțiunea de integrală introdusă în capitolul precedent, cum ar fi teoria ergodică, studiul inelelor semiordonate, teoria funcțiilor semiordonate de variabilă reală etc.

§ 1. REPREZENTAREA INTEGRALĂ A OPERAȚIILOR LINIARE

Vom stabili în acest paragraf, două teoreme asupra reprezentării integrale a operațiilor (oo)-liniare și pozitive. Una se va referi la cazul K-spațiului S_T al funcțiilor măsurabile și finite aproape peste tot pe o mulțime măsurabilă T. Alta va considera spațiul tuturor complexelor de n funcții aparținînd lui S_T. Metoda prin care vom stabili forma integrală va fi asemănătoare pentru ambele spații și de altfel relativ simplă. Ea poate fi aplicată pentru obținerea unor rezultate asemănătoare și pentru alte spații. De asemenea se pot considera și operații care nu sînt pozitive, dar sînt regulate, integrala reprezentativă fiind în raport cu o măsură semiordonată generalizată.

1. Operații pe subspațiile spațiului S

Fie T o mulțime oarecare de elemente, $\mathfrak{T}$ o familie complet aditivă de părți ale lui T și μ o măsură reală complet aditivă pe T, astfel ca $\mu(T)$ să fie finită. Vom nota în tot acest paragraf prin $\gamma_A(t)$ funcția caracteristică a mulțimii A. Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu l.s. cu unitate. Vom nota prin $\mathfrak{X}_u$ baza sa și prin $\mathfrak{X}_s$ mulțimea elementelor sale simple. În sfîrșit vom nota prin S_T spațiul funcțiilor măsurabile finite *a.p.t.* pe T liniarizat și ordonat în modul obișnuit și vom considera γ_T ca element unitate în S_T.

Vom stabili următoarea propoziție (dată anterior în [35]).

Teoremă. Fie $\mathfrak{X}$ un subspațiu normal al lui S_T astfel încît $\mathfrak{X}_u = (S_T)_u$ Pentru orice operație U (oo)-liniară și pozitivă definită pe $\mathfrak{X}$ cu valori într-un spațiu l.σ-s $\mathfrak{Y}$ de tip (R)*), există o măsură m^* *c.a.* pe $\mathfrak{T}$ cu valori în $\mathfrak{Y}$, absolut (t)-continuă *) în raport cu μ, așa ca

$$U(f) = \int_T f(t)\, dm^*(t). \tag{1.1.1}$$

Reciproc, orice operație de forma (1.1.1) este (oo)-liniară și pozitivă de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{Y}$.

Demonstrație. Să considerăm elementul $\gamma_A \in \mathfrak{X}_u$.

Atunci funcția de mulțime

$$m^*(A) = U(\gamma_A) \tag{1.1.2}$$

este o măsură *c.a.* pe $\mathfrak{T}$ cu valori în $\mathfrak{Y}$. Într-adevăr, în primul rînd din $\gamma_A \geqslant 0$, oricare ar fi $\gamma_A \in \mathfrak{X}_u$ rezultă $m^*(A) \geqslant 0$ pentru orice $A \in \mathfrak{T}$, operația U fiind pozitivă. Să considerăm acum șirul de mulțimi $\{A_n\} \subset \mathfrak{T}$ disjuncte două cîte două: $A_i \cap A_j = \varnothing$, $(i \neq j)$; atunci $\gamma_{Ai} \perp \gamma_{Aj}$ pentru $i \neq j$, deoarece funcțiile γ_{Ai}, γ_{Aj} sînt diferite de zero pe mulțimi disjuncte. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{An}$ este (o)-convergentă, termenii săi fiind disjuncți doi cîte doi și aparținînd bazei spațiului.

Dacă notăm cu $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, atunci $\gamma_A = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{An}$, deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{An} = \sup_n \gamma_{An} \in \mathfrak{X}_u.$$

Operația U fiind aditivă și (oo)-continuă, vom avea

$$m^*(A) = U(\gamma_A) = U\left((o)\text{-}\lim_n \sum_{i=1}^{n} \gamma_{Ai}\right) = (o)\text{-}\lim_n U\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{A_i}\right) =$$

$$= (o)\text{-}\lim_n \sum_{i=1}^{n} U(\gamma_{Ai}) = \sum_{n=1}^{\infty} U(\gamma_{Ai}) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

ceea ce stabilește aditivitatea completă a lui m^*.

Să considerăm acum un șir de mulțimi $\{A_n\} \subset \mathfrak{T}$ așa ca

$$\mu(A_n) \to 0. \tag{1.1.3}$$

Rezultă atunci că

$$\gamma_{An}(t) \to 0 \text{ în măsură}$$

*) Adică $\mu(A_n) \to 0$ implică $m^*(A_n) \xrightarrow{t} 0$.

și deci există un subșir de indici $\{k_n\}$, așa ca

$$\gamma_{A_{k_n}}(t) \to 0 \text{ a.p.t.}, \tag{1.1.4}$$

ținînd seama că, convergența aproape uniformă implică (și deci $\mu(T)$ fiind finită, este echivalentă cu) convergența *a.p.t.*

Din (1.1.4) rezultă însă

$$\gamma_{A_{k_n}} \xrightarrow{o} 0, \text{ (în } X) \tag{1.1.5}$$

deoarece convergența are loc în S_T și $\{\gamma_{A_{k_n}}\} \subset \mathfrak{X}_u$ Din (1.1.5) deducem atunci

$$m^*(A_{kn}) \xrightarrow{o} 0, \tag{1.1.6}$$

deoarece $m^*(A_{k_n}) = U(A_{k_n})$, iar U este (oo)-liniară.

În concluzie, convergența (1.1.3) implică convergența (1.1.6). De aici rezultă în același timp absolut (t)-continuitatea măsurii m^*, deoarece pentru orice subșir $\{A_{n_i}\} \subset \{A_n\}$, avem de asemenea $\mu(A_{n_i}) \to 0$ și deci există un subșir $\{A_{n_{i_k}}\} \subset \{A_{n_i}\}$ așa ca $m^*(A_{n_{i_k}}) \xrightarrow{o} 0$, adică $m^*(A_n) \xrightarrow{t} 0$.

Fie acum $f \in \mathfrak{X}_s$. Avem deci

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_{A_i}, \ \gamma_{A_i} \perp \gamma_{A_j} \ (i \neq j), \ \alpha_i \in R.$$

În acest caz

$$U(f) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U(\gamma_{A_i}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m^*(A_i) = \int_T f(t)\, dm^*(t).$$

Mai departe fie $f \in \mathfrak{X}$, arbitrar. Există atunci un șir de elemente $\{f_i\} \subset \mathfrak{X}_s$, astfel încît

$$f_i \xrightarrow{o} f. \text{ (în } X) \tag{1.1.7}$$

Aceasta arată că $f_i(t) \to f(t)$ *a.p.t.* pe T în raport cu μ, deoarece un șir (o)-convergent în $\mathfrak{X}$ este (o)-convergent și în S_T $\mathfrak{X}$ fiind cuprins normal în S_T. Mai departe rezultă că $f_i(t) \to f(t)$ aproape uniform în raport cu măsura reală μ. Există deci un șir de mulțimi $\{A_i\} \subset \mathfrak{S}$, astfel ca $\mu(A_n) \to 0$ și $f_i(t) \to f(t)$ uniform pe $\complement A_n$, oricare ar fi n.

Din $\mu(A_n) \to 0$ rezultă însă, după cum am văzut mai sus, că $m^*(A_{k_n}) \xrightarrow{o} 0$. Spațiul $\mathfrak{Y}$ fiind de tip (R^*), rezultă că

$$f_n(t) \xrightarrow{a.u.} f(t),$$

în raport cu măsura m^* (ținînd seama de observația 1.3.1 cap. III).

Pe de altă parte, din (1.1.7) deducem, folosind pozitivitatea și (oo)-continuitatea lui U

$$\sup_{n,k \geqslant l} \int_T |f_n(t) - f_k(t)|\, dm^*(t) = \sup_{n,k \geqslant l} U(|f_n - f_k|) \leqslant U(\sup_{n,K \geqslant l} |f_n - f_k|) \xrightarrow{o} 0$$

ceea ce ne arată că $\{f_n\}$ este un șir integrant al lui f.

Deoarece

$$U(f_n) \xrightarrow{o} U(f),$$

rezultă că

$$\overset{\cdot}{U}(f) = \int_T f(t)\, dm^*(t),$$

și prima parte a propoziției este demonstrată.

Reciproc, să presupunem că m^* este o măsură pe $\mathfrak{T}$ cu valori în $\mathfrak{Y}$ absolut (t)-continuă în raport cu μ, și astfel ca orice funcție $f(t)$ (cu $f \in \mathfrak{X}$) să fie integrabilă față de m^*. Fie U o operație de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{Y}$ dată în acest caz de formula (1.1.1). Ea este evident aditivă și pozitivă, datorită proprietăților integralei. Dacă $f_n \xrightarrow{o} f$, atunci există g, așa ca $|f_n| \leqslant g$, ceea ce implică

$$|f_n(t)| \leqslant g(t) \quad a.p.t. \quad (m^*), \tag{1.1.8}$$

deoarece, dacă $\mu(A) = 0$, atunci $m^*(A) = \mathbf{0}$.

Pe de altă parte, din $f_n \xrightarrow{o} f$ rezultă că $f_n(t) \to f(t)$ *a.p.t.* față de μ și deci și aproape uniform (μ). Măsura m^* fiind absolut (t)-continuă față de μ,

$$f_n(t) \xrightarrow{a.u.} f(t) \quad (m^*) \tag{1.1.9}$$

Din (1.1.8) și (1.1.9) deducem, în baza teoremei (2.1.21), capitolul II, că

$$\int_T f_n(t)\, dm^*(t) \xrightarrow{o} \int_T f(t)\, dm^*(t).$$

Teorema este astfel demonstrată.

Această teoremă se aplică în particular operațiilor definite pe spațiile S, L, L^p, M.

După cum se știe [36], [1], orice KB-spațiu cu unitate este izomorf și izometric cu un anumit K-spațiu de funcții sumabile definite pe un bicompact total discontinuu. Mai general, pot fi considerate K-spațiile cu normă aditivă generalizată.

Un astfel de spațiu este un K-spațiu $\mathfrak{X}$ în care pentru elementele sale pozitive este definit un număr real $\|x\|$ finit sau $+\infty$ numit norma generalizată a elementului x, satisfăcînd condițiilor

1) $\|x\| > \mathbf{0}$ pentru orice $x > \mathbf{0}$, $\|\mathbf{0}\| = 0$;

2) $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ pentru $x,\ y \geqslant \mathbf{0}$;

3) pentru orice element $x > \mathbf{0}$ există un element y, așa ca

$$\mathbf{0} < y \leqslant x \quad \text{și} \quad \|y\| < +\infty;$$

4) dacă $\{x_\alpha\}$ $\alpha < A$ este un șir monoton crescător de elemente pozitive, iar $z = \sup\limits_{\alpha} \{x_\alpha\}$, atunci $\sup\limits_{\alpha} \{\|x_\alpha\|\} = \|x\|$.

Aceste spații au fost studiate de A. G. Pinscher. Se arată că în orice KB-spațiu se poate defini o normă generalizată, așa ca el să devină un K-spațiu cu normă aditivă generalizată. Aceste K-spații permit o realizare cu ajutorul

funcțiilor măsurabile și sînt singurele spații care admit o astfel de realizare. Mai precis, A. G. Pinscher stabilește următoarele rezultate:

Orice K-spațiu $\mathfrak{X}$ cu normă aditivă generalizată și cu unitate în care norma unității este finită este izomorf cu un subspațiu normal al spațiului S_Q al funcțiilor măsurabile definite pe un anumit bicompact Q total discontinuu cu o măsură finită c. a. Dacă $\mathfrak{X}$ este un K-spațiu cu normă aditivă generalizată oarecare, atunci el se descompune în componente, fiecare fiind izomorfă cu un K-spațiu de funcții măsurabile.

Teorema de mai sus permite o reprezentare integrală specială a elementelor unui K-spațiu regulat cu normă aditivă generalizată (în particular al oricărui KB-spațiu) și a operațiilor aditive și pozitive definite pe ele.

Astfel, dacă $\mathfrak{X}$ este un K-spațiu cu normă aditivă generalizată, regulat, cu unitate și cu $\| \mathbf{1} \|$ finită, fie S_Q^* spațiul de funcții măsurabile, subspațiu normal (și complet) al lui S_Q, așa ca $\mathfrak{X} \rightleftarrows S_Q^*$ și fie U acest izomorfism. În acest caz, dacă $\xi = U(x)$ pentru $x \in \mathfrak{X}$, atunci

$$x = \int_Q \xi(t)\, dm^*(t), \tag{1.1.10}$$

unde $m^*(A) = U^{-1}(\gamma_A)$.

Dacă $\| \mathbf{1} \|$ nu este finită sau $\mathfrak{X}$ nu posedă unitate, atunci formula analogă cu (1.1.10) are de asemenea loc, pentru fiecare componentă a descompunerii menționate m^* și Q depinzînd însă de componenta ce conține elementul x.

Dacă V este o operație aditivă și pozitivă de la $\mathfrak{X}$ la K-spațiul regulat $\mathfrak{Y}$, atunci $m(A) = V[m^*(A)]$ este tot o măsură *c.a.* și

$$V(x) = \int_Q \xi(t)\, dm(t),$$

egalitate care se stabilește pe baza teoremei 2.5.3 capitolul III.

Teorema de mai sus ne permite de asemenea să regăsim unele rezultate cunoscute privitor la reprezentarea operațiilor cînd concretizăm spațiile $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$.

Fie $\mathfrak{X} = M[a, b]$ și $\mathfrak{Y} = R$. Măsura m fiind reală și fiind o funcție pozitivă și absolut continuă de mulțimi, se poate pune sub forma

$$m(A) = \int_A y(t)\, dt, \qquad (y \in L)$$

cu $y(t) \geqslant 0$ *a.p.t.*

Fie acum $x \in M$, și x_n simple, cu $x_n \xrightarrow{o} x$. Avem

$$\int_T x_n(t)\, dm(t) = \sum_i c_i^n m(T_i^n) = \sum_i c_i^n \int_{T_i^n} y(t)\, dt = \sum_i c_i^n \int_T \gamma_{T_i^n}(t)\, y(t)\, dt =$$

$$\int_T \left[\sum_i c_i^n \gamma_{T_i^n}(t)\right] y(t)\, dt = \int_T x_n(t)\, y(t)\, dt.$$

Deoarece $x_n(t)\, y(t) \to x(t)\, y(t)$ aproape peste tot, iar $|x_n(t)\, y(t)| \leqslant \alpha y(t)$ (ținînd seama de sensul (o)-convergenței în M) conchidem

$$U(x) = \int_T x(t)\, y(t)\, dt.$$

Dacă U nu este pozitivă, atunci, deoarece orice funcțională (oo)-liniară este regulată, ea se poate pune sub forma

$$U = U_1 - U_2 \quad \text{cu} \quad U_1,\ U_2 \text{ pozitive.}$$

În acest caz,

$$U(x) = U_1(x) - U_2(x) = \int_T x(t)\, y_1(t)\, dt - \int_T x(t)\, y_2(t)\, dt = \int_T x(t)\, y(t)\, dt,$$

unde

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t) \in L$$

Regăsim în acest mod cunoscuta teoremă a lui G. M. Fihtengolț [37], [13], asupra formei generale a funcționalelor (o)-liniare în $M[a, b]$.

Se poate de asemenea stabili forma generală a funcționalelor (o)-liniare pe $L[a, b]$.

2. Operații pe subspațiile spațiului S_n

Fie T, $\mathfrak{S}$ și μ cu aceleași semnificații ca la punctul precedent.

Vom nota prin S_n mulțimea tuturor complexelor de n funcții reale măsurabile $(\mathfrak{S}, \mu)$ și finite *a.p.t.*

$$x = \{\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ \ldots,\ \xi_n(t)\}$$

definite pe mulțimea T.

Mulțimea S_n se liniarizează punînd

$$x + y = \{\xi_1(t) + \eta_1(t) \ldots,\ \xi_n(t) + \eta_n(t)\}$$

$$\lambda x = \{\lambda\, \xi_1(t),\ \ldots, \lambda \xi_n(t)\}.$$

Considerăm $x = y$ dacă $\xi_i(t) = \eta_i(t)$ *a.p.t.* pentru $i = 1, 2, \ldots, n$.

Elementul nul este

$$\mathbf{0} = \{\theta_1(t),\ \theta_2(t),\ \ldots,\ \theta_n(t)\},$$

unde $\theta_i(t) = 0$ *a.p.t.* $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Mulțimea se ordonează astfel: $x > \mathbf{0}$ dacă $\xi_i(t) \geqslant 0$ *a.p.t.* pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, și există j, așa ca $\xi_j(t) > 0$ pe o mulțime de măsură pozitivă.

Se verifică ușor, ținînd seama de proprietățile spațiului S, că S_n este un spațiu $l.\sigma$—s. (și chiar un K-spațiu) de tip (R^*). Avem

$$(\sup_i x_i)(t) = \sup_i \{\xi_1^i(t),\ \ldots,\ \xi_n^i(t)\} = \{\zeta_1(t), \ldots,\ \zeta_n(t)\},$$

unde

$$\zeta_i = \sup_i \xi_i^i \ (\text{în } S) \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

În particular

$$(\sup_k x_k)(t) = \{\sup_k \xi_1^k(t),\ \ldots,\ \sup_k \xi_n^k(t)\} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

În S_n, $x_k \xrightarrow{o} x$ înseamnă

$$\xi_i(t) = \lim_k \xi_i^k(t)$$

a.p.t. pentru $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vom stabili acum următoarea

L e m ă 1.2.1. Orice element $x \in S_n$ poate fi considerat ca o funcție măsurabilă $(\mathfrak{T}, \mu)$ de la T la spațiul euclidian n-dimensional R_n.

D e m o n s t r a ț i e. Se știe că pentru orice funcție măsurabilă $\xi(t)$ există un șir de funcții simple măsurabile $\{\xi^k(t)\}$, așa ca

$$\xi^k(t) \to \xi(t) \qquad a.p.t.$$

și în plus să avem

$$|\xi^k(t)| \leqslant |\xi(t)|. \qquad a.p.t.$$

Vom nota cu $\mathfrak{D}^k$ partiția mulțimii T formată din mulțimi măsurabile $(\mathfrak{T})$, corespunzătoare funcției $\xi^k(t)$.

Fie acum n funcții măsurabile $\xi_i(t)$, fie $\{\xi_i^k(t)\}$ șirul aproximant de funcții simple pentru fiecare i și fie $\mathfrak{D}_i^k$ partiția asociată funcției $\xi_i^k(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $k = 1, 2, \ldots\}$. Se poate forma atunci pentru fiecare k, partiția

$$\mathfrak{D}^k = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{D}_i^k,$$

astfel ca partițiilor $\mathfrak{D}^k$ să se asocieze funcțiile simple $\overline{\xi}_i^k(t)$ formate din $\xi_i^k(t)$ într-un mod evident (egale de fapt cu acestea) cu

$$\overline{\xi}_i^k(t) \to \xi_i(t) \qquad a.p.t. \tag{1.2.1}$$

și

$$|\overline{\xi}_i^k(t)| \leqslant |\xi_i(t)| \qquad a.p.t. \tag{1.2.2}$$

În acest caz, după cum se observă imediat

$$x^k(t) = \{\overline{\xi}_1^k(t), \ldots, \overline{\xi}_n^k(t)\} \tag{1.2.3}$$

este, pentru fiecare k, o funcție semiordonată simplă și măsurabilă $(\mathfrak{T})$ de la T la R_n, adică

$$x^k(t) = \sum_{i=1}^{p_k} \{\lambda_{1i}^k, \ldots, \lambda_{ni}^k\} \gamma A_i^k(t). \tag{1.2.4}$$

Fie acum

$$x(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)\}$$

un element oarecare al lui S_n, considerat (ceea ce este evident posibil) ca o funcție semiordonată, de la T la R_n. Să arătăm că este măsurabilă $(\mathfrak{T}, \mu)$. Pentru aceasta vom considera funcțiile simple date de formula (1.2.3). În acest caz, datorită lui (1.2.1)

$$\xi_i^k(t) \to \xi_i(t) \qquad (k \to \infty)$$

aproape uniform. Pentru orice i și η există $T_{i\eta}$ cu $\mu([T_{i\eta}) < \frac{\eta}{n}$, astfel ca pe $T_{i\eta}$

$$\xi_i^k(t) \underset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} \xi_i(t) \text{ uniform.}$$

Dacă luăm

$$T_\eta = \bigcap_{i=1}^{n} T_{i\eta},$$

atunci

$$\mu([T_\eta) = \mu\left([\bigcap_{i=1}^{n} T_{i\eta}\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} [T_{i\eta}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu([T_{i\eta}) \leqslant \eta,$$

iar pe T_η, $\xi_i^k(t) \to \xi_i(t)$ uniform, oricare ar fi i.

Aceasta înseamnă că

$$|\xi_i^k(t) - \xi_i(t)| \leqslant \varepsilon_i^k \qquad (t \in T_\eta)$$

unde $\lim_k \varepsilon_i^k = 0$ oricare ar fi i.

Fie

$$u^k = \{\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k, \ldots, \varepsilon_n^k\}.$$

Atunci $u^k \xrightarrow{o} \mathbf{0}$ în spațiul R_n.

Vom avea apoi pentru $t \in T_\eta$

$$|\{\xi_i^k(t), \ldots, \xi_n^k(t)\} - \{\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}| =$$

$$= \{|\xi_1^k(t) - \xi_1(t)|, \ldots, |\xi_n^k(t) - \xi_n(t)|\} \leqslant \{\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k, \ldots, \varepsilon_n^k\},$$

adică

$$|x^k(t) - x(t)| \leqslant u^k,$$

punînd

$$x^k(t) = \{\xi_1^k(t), \ldots, \xi_n^k(t)\},$$

ceea ce înseamnă că

$$x^k(t) \to x(t) \text{ uniform pe } T_\eta.$$

Numărul η fiind arbitrar

$$x^k(t) \to x(t)$$

aproape uniform pe T în raport cu μ.

Șirul de funcții simple $\{x^k(t)\}$ este deci un șir aproximant al lui $x(t)$, adică $x(t)$ este măsurabilă $(\mathfrak{T}, \mu)$. Lema este astfel demonstrată.

Corolar 1.2.2. Orice element $x \in S_n$ poate fi considerat ca o funcție măsurabilă $(\mathfrak{T}, m)$ cu $m(A) = U[\gamma_A]$, oricare ar fi U, aditivă și pozitivă pe S.

Într-adevăr, dacă $x^k(t) \to x(t)$ aproape uniform relativ la μ, există un șir de mulțimi $\{T_j\}$, așa ca $\mu([T_j) \to 0$ și pe Tj convergența să fie uniformă.

Se poate extrage însă un subșir T_{k_j} (ca și în teorema 1.1.1), așa ca $m([T_{k_j}) \leqslant \eta p$ pentru η arbitrar și $j \geqslant i_\eta$.

Trecem acum la stabilirea formei generale a operațiilor (oo)-liniare și pozitive definite pe subspațiile lui S_n.

Vom nota prin $\mathfrak{X}_n$ spațiul definit ca și S_n unde $\mathfrak{X}$ este însă un subspațiu normal și regulat al lui S. Se poate evident presupune întotdeauna că $R_n \subset \mathfrak{X}_p$, deoarece R_n este submulțimea complexelor de funcții constante din $\mathfrak{X}_n$. De asemenea, se poate presupune că $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_n$.

Vom considera următorul P-operator de la $S_n \times S_n$ la S_n, care joacă un rol natural de înmulțire:

$$\langle x, y\rangle = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\} \cdot \{\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)\} = \{\xi_1(t)\,\eta_1(t), \ldots, \xi_n(t)\,\eta_n(t)\}.$$

În cazul subspațiilor $\mathfrak{X}_n \subset S_n$ acest P-operator este în orice caz definit pe $R_n \times \mathfrak{X}_n$ și are valori în $\mathfrak{X}_n$:

$$R_n \times \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{X}_n. \tag{1.2.5}$$

Pentru $\langle x, y\rangle$ vom înțelege P-operatorul definit prin corespondența (1.2.5), care este complet regulat. Are atunci loc următoarea

Teorema 1.2.3. Pentru orice operație U aditivă și pozitivă definită pe $\mathfrak{X}_n$ cu valori în $\mathfrak{X}_n$ satisfăcînd condiției

$$U(\langle x, y\rangle) = \langle x, U(y)\rangle \tag{1.2.6}$$

există o măsură $c.a.m$ de la $\mathfrak{T}$ la $\mathfrak{X}_n$, astfel încît

$$U(x) = \int_T \langle x(t), dn(t)\rangle \tag{1.2.7}$$

Reciproc, orice operație dată de (1.2.7) este o operație aditivă și pozitivă de la $\mathfrak{X}_n$ la $\mathfrak{X}_n$ și satisface (1.2.6).

Demonstrație. Fie mai întîi x de forma

$$x = \sum_{j=1}^{h} \{c_{1j}\gamma_{Aj}, \ldots, c_{nj}\gamma_{Aj}\},$$

Atunci, deoarece x se mai scrie

$$x = \sum_j \{c_{1j}, \ldots, c_{nj}\}\gamma_{Aj} = \sum_j \langle c_j, \gamma_{Aj}\rangle$$

unde $c_j = \{c_{1j}, \ldots, c_{nj}\}$, avem

$$U(x) = \sum_j \{c_{1j}, \ldots, c_{nj}\}\, U(\gamma_{A_j}) = \sum_j \langle c_j, U(\gamma_{A_j})\rangle =$$

$$= \sum_j \langle c_j\, m(A_j)\rangle = \int_T \langle x(t), dm(t)\rangle.$$

Fie x oarecare. Există atunci un șir de elemente de forma

$$x^k = \sum_j \left\langle {}^k_j, \gamma_{A_j^k}\right\rangle,$$

așa ca

$$x^k(t) \xrightarrow{a.u.} x(t), (m)$$

dar în același timp și *a.p.t.*, față de măsura reală μ (vezi lema 1.2.1). Deci pentru $t \in T_0$ cu $\mu([T_0) = 0$, avem

$\{\xi_1^k(t), \ldots, \xi_n^k(t)\} \xrightarrow{o} \{\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}$ în R_n (cu notații evidente), adică, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\lim_k \xi_i^k(t) = \xi_i(t). \qquad a.p.t.\ (\mu)$$

Rezultă

$$x^k \xrightarrow{o} x \text{ în } S_n.$$

Deoarece putem presupune de asemenea $|\xi_i^k(t)| \leqslant |\xi_i(t)|$ pentru orice i, (a se vedea demonstrația lemei 1.2.1), rezultă

$$|x^k| \leqslant |x|$$

și cum din normalitatea lui $\mathfrak{X}$ în S rezultă și aceea a lui $\mathfrak{X}_n$ în S_n și ținînd seama de proprietățile subspațiilor normale, deducem

$$x^k \xrightarrow{o} x \text{ în } \mathfrak{X}_n.$$

Operația U fiind (oo)-liniară, deoarece $\mathfrak{X}_n$ este de tip (R^*), rezultă

$$U(x^k) \xrightarrow{o} U(x).$$

Acest lucru asigură integrabilitatea lui $x(t)$. Cum

$$\int_T x^k\, dm \xrightarrow{o} \int_T x\, dm$$

și

$$U(x^k) = \int x^k\, dm$$

rezultă

$$U(x) = \int_T \langle x(t), dm(t) \rangle$$

și prima parte a teoremei este demonstrată.

A doua parte a teoremei rezultă din proprietățile integralei. În particular, egalitatea (1.2.6) este îndeplinită datorită faptului că orice element $x \in R_n$ poate fi considerat ca o funcție constantă în $\mathfrak{X}_n$ și a complet-regularității P-operatorului (teorema 2.1.18, Cap. III).

Teorema precedentă se aplică în particular spațiilor L_n^p $(p \geqslant 1), S_n$.

§. 2. ALTE APLICAȚII

În acest paragraf vom indica aplicațiile integralei la ecuațiile funcționale integrale, la problema integralelor singulare și în problema momentelor lui Hausdorff generalizată.

1. Ecuații (o)-integrale

Vom considera aici ecuații în care funcția necunoscută este semiordonată și intră sub semnul integralei. Le vom numi ecuații (o)-integrale.

Fie $\mathfrak{X}$ un K-spațiu regulat pe care este definit un P-operator cu valori tot în $\mathfrak{X}$, care este asociativ. Vom considera funcții definite pe intervalul $[0,1]$ cu valori în $\mathfrak{X}$. Fie $\mathcal{T}$ o familie complet aditivă de părți ale intervalului $[0,1]$ care conține toate mulțimile boreliene. Vom presupune că pe $\mathcal{T}$ este definită o măsură complet aditivă cu valori în $\mathfrak{X}$. Introducem următoarea

D e f i n i ț i e. O măsură semiordonată m definită pe $\mathcal{T}$ va fi numită *închisă*, dacă funcția $m(A \cap [o, t))$ este măsurabilă $(\mathcal{T}, m)$, oricare ar fi $A \in \mathcal{T}$.

Ca un exemplu de măsură închisă poate servi aceea dată de o măsură semiordonată absolut continuă în raport cu măsura reală Lebesgue.

L e m a 2.1.1. Fie m o măsură semiordonată închisă pe $\mathcal{T}$. Dacă $x(t)$ este măsurabilă $(\mathcal{T}, m)$ și mărginită *a.p.t.*, atunci funcția

$$y(t) = \int_{[0,t)} \langle x(t), dm(t) \rangle \tag{2.1.1}$$

posedă aceleași proprietăți.

D e m o n s t r a ț i e. Dacă $x(t)$ este de forma

$$x(t) = \begin{cases} c & \text{pentru } t \in A \quad (A \in \mathcal{T}) \\ 0 & \text{pentru } t \in \complement A, \end{cases}$$

atunci

$$y(t) = \langle c, m(A \cap [0, t)) \rangle \tag{2.1.2}$$

și deci este măsurabilă $(\mathcal{T}, m)$ și mărginită în baza teoremei 1.4.5. Capitolul III. Dacă $x(t)$ este simplă, atunci $y(t)$ este o sumă de funcții de forma (2.1.2) și se deduce același lucru.

Fie acum $x(t)$ măsurabilă și mărginită oarecare. Există atunci un șir de funcții simple $\{x_i(t)\}$, așa ca $x_i(t) \xrightarrow{a.u.} x(t)$, și în plus șirul integralelor funcțiilor $|x_i(t) - x(t)|$ să tindă spre 0. Avem

$$\left| \int_{[0,t)} \langle x_i(t), dm(t) \rangle - \int_{[0,t)} \langle x(t), dm(t) \rangle \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{[0,t)} \langle |x_i(t) - x(t)|, dm(t) \rangle \leqslant$$

$$\leqslant \int_{[0,1]} \langle x_i |t| - x|t|, dm(t) \rangle = u_i \xrightarrow{o} 0$$

ceea ce arată că funcțiile măsurabile

$$y_i(t) = \int_{[0,t)} \langle x_i(t), dm(t) \rangle$$

converg uniform către $y(t)$. În baza teoremei 1.4.6, capitolul III rezultă că $y(t)$ este măsurabilă. Mărginirea ei rezultă din inegalitățile

$$\left| \int_{[0,t)} \langle x(t),\ dm(t) \rangle \right| \leqslant \int_{[0,t)} \langle |x(t)|,\ dm(t) \rangle \leqslant \int_{[0,1]} \langle |x(t)|,\ dm(t) \rangle \leqslant$$

$$\leqslant \int_{[0,1]} \langle \rho,\ dm(t) \rangle = \langle \rho,\ m([0,1)) \rangle,$$

unde $\rho \geqslant |x(t)|$.

Lema este astfel demonstrată.

Din această lemă rezultă că dacă $x(t)$ este măsurabilă și mărginită *a.p.t.*, m fiind închisă, atunci funcția (2.1.1) este integrabilă (în raport cu m).

Vom presupune în acest punct că măsura m este închisă. Vom considera aici ecuația de forma

$$y(t) = \int_{[0,t)} \langle\langle x(t),\ y(t) \rangle,\ dm(t) \rangle + y_0(t), \tag{2.1.3}$$

unde funcțiile care intervin sînt presupuse măsurabile $(\mathcal{T},\ m)$ și mărginite *a.p.t.* (m). Funcția $x(t)$ va fi numită nucleul ecuației.

În ceea ce urmează vom nota: $m = m([0,1])$.

Teorema 2.1.2. Dacă există $\rho > 0$ $(\rho \in \mathfrak{X})$ așa ca

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle \rho^n,\ l,\ m^n \rangle < \infty$$

oricare ar fi $l \in \mathfrak{X}$, și dacă $|x(t)| \leqslant \rho$, atunci ecuația (2.1.3) posedă o soluție măsurabilă și mărginită, unică.

Demonstrație. Să notăm

$$y_n(t) = \int_{[0,t)} \langle\langle x(t),\ y_{n-1}(t) \rangle,\ dm(t) \rangle, \quad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

Seria

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \tag{2.1.4}$$

este absolut și uniform (o)-convergentă.

Într-adevăr, dacă $|y_0(t)| \leqslant l$, atunci

$$|y_1(t)| \leqslant \int_{[0,1]} \langle\langle |x(t)|,\ |y_0(t)| \rangle,\ dm(t) \rangle \leqslant \langle \rho,\ l,\ m \rangle$$

și prin inducție obținem

$$|y_n(t)| \leqslant \langle \rho^n,\ l,\ m^n \rangle.$$

sensul notațiilor fiind evident.

Seria obținută din (2.1.4) prin «înmulțirea» cu $x(t)$ fiind absolut și uniform convergentă poate fi integrată termen cu termen și avem

$$y_0(t) + \int_{[0,t)} \langle\langle x(t),\ y(t) \rangle, dm(t) \rangle = y_0(t) + \int_{[0,t)} \langle\langle x(t)\ y_0(t) \rangle,\ dm(t) \rangle +$$

$$+ \int_{[0,t)} \langle\langle x(t),\ y_1(t) \rangle,\ dm(t) \rangle + \ldots = y_0(t) + y_1(t) + \ldots = y(t),$$

ceea ce arată că $y(t)$ este o soluție a ecuației.

Să presupunem acum că $y^*(t)$ ar fi o altă soluție măsurabilă și mărginită a ecuației. În acest caz

$$y(t) - y^*(t) = \int_{[0,t)} \langle\langle x(t), y(t) - y^*(t) \rangle, dm(t).$$

Notînd

$$\overline{y}(t) = y(t) - y^*(t)$$

vom avea

$$\overline{y}(t) = \int_{[0,t)} \langle\langle x(t), \overline{y}(t) \rangle, dm(t) \rangle.$$

De aici rezultă, simplificînd notațiile

$$z_1 = \int_{[0,t)} x\,\overline{y}\,dm = \int_{[0,t)} x\left[\int_{[0,t)} x\,\overline{y}\,dm\right]dm = \int_{[0,t)} x\,z_1\,dm = z_2$$

și prin inducție,

$$z_n(t) = z_{n+1}(t) \tag{2.1.5}$$

unde

$$z_n(t) = \int_{[0,t)} \langle\langle x(t), z_{n-1}(t) \rangle, dm(t) \rangle, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

notînd $z_0(t) = \overline{y}(t)$.

Funcția $y^*(t)$ fiind presupusă mărginită, există q așa ca $|\overline{y}(t)| \leqslant q$ și deci

$$|z_n(t)| \leqslant \langle \nu^n, q, m^n \rangle.$$

Deoarece membrul al doilea al acestei inegalități converge spre $\mathbf{0}$, rezultă că $z_n(t) \overset{o}{\to} \mathbf{0}$ pentru orice t, deci $z_n(t) \equiv \mathbf{0}$ oricare ar fi n în baza lui (2.1.5). În particular $\overline{y}(t) \equiv z_0(t) \equiv \mathbf{0}$ deci $y^*(t) \equiv y(t)$.

Teorema este demonstrată.

Observația 2.1.1. Dacă $\langle x, y \rangle$ este produsul lui Vulih, atunci condiția teoremei precedente se va scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\nu\, m)^n < \infty.$$

Observația 2.1.2. Un caz special al teoremei este acela cînd $\langle x, y \rangle = x\,y$, $m([0, 1]) \leqslant \mathbf{1}$, iar $\nu = \alpha \mathbf{1}$ (α real, pozitiv). Condiția se va reduce atunci la: $\alpha < 1$.

Să considerăm acum ecuația de tip Fredholm

$$y(t) = \int_{[0,1]} f(t, s) \langle y(s), dm(s) \rangle + y_0(t), \tag{2.1.6}$$

nucleul fiind o funcție reală. Vom presupune *) că $f(t, s)$ este măsurabilă Lebesgue și mărginită iar m este absolut continuă față de măsura Lebesgue, $m(E_t)$ fiind măsurabilă (T, m) (E_t) secțiunea lui $E \subset [0,1]^2$.

*) Condiția nu este esențială. O impunem pentru simplificare.

L e m a 2.1.3. Dacă $y(t)$ este măsurabilă $(\mathcal{T}, m)$ și mărginită, atunci funcția

$$z(t) = \int_{[0,1]} f(t, \xi) \langle y(\xi)\, dm(\xi)\rangle$$

posedă aceleași proprietăți.

Demonstrația acestei leme se face într-un mod asemănător lemei 2.1.1.

Fie acum α, așa ca $|f(t, s)| \leqslant \alpha$. În acest caz se poate enunța o propoziție asemănătoare teoremei 2.1.1 cu condiții mai simple însă, și anume:

T e o r e m a 2.1.4. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n m^n < \infty$, atunci ecuația 2.1.6 are o soluție măsurabilă $(\mathcal{T}, m)$ și mărginită unică.

Să presupunem acum că nucleul este de forma

$$f(t, s) = g(t)\, h(s). \tag{2.1.7}$$

Dacă notăm

$$\nu = \int_{[0,1]} g(\xi)\, h(\xi)\, dm(\xi), \quad w = \int_{[0,1]} h(\xi) \langle y_0(\xi), dm(\xi)\rangle$$

atunci, dacă z este o soluție a ecuației P-operatoriale

$$z = \langle z, \nu\rangle + w, \tag{2.1.8}$$

ecuația (2.1.6) are o soluție de forma

$$y(t) = g(t) \cdot z + y_0(t). \tag{2.1.9}$$

Reciproc, orice soluție a ecuației (2.1.6) cu nucleul (2.1.7) este de forma (2.1.9), unde z satisface ecuația (2.1.8).

Rezultă că studiul ecuațiilor de forma (2.1.6) cu nucleu de forma (2.1.7) se reduce la studiul ecuațiilor P-operatoriale considerate în capitolul II.

Remarcăm în sfîrșit că pot fi studiate ecuații (o)-integrale de forma (2.1.6) cu diferitele forme de nuclee care intervin în teoria clasică, obținîndu-se unele rezultate analoge. Se poate de asemenea considera cazul nucleului nereal, discuțiile fiind însă în unele cazuri mai complicate.

2. Integrale singulare

Se știe că multe considerații din teoria clasică a integralelor singulare s-au putut transpune la funcții cu valori în spații Banach folosind integrala lui Bochner [38]. În cazul funcțiilor semiordonate pot fi făcute considerații analoge. Vom da aici numai o teoremă privind aproximarea punctuală a funcțiilor măsurabile și mărginite. Ea va avea un enunț și o demonstrație asemănătoare cazului spațiilor Banach.

Vom presupune că $\mathfrak{X}$ este un K-spațiu regulat pe care este definit un P-operator $\langle x, y\rangle$ cu valori în $\mathfrak{X}$, care posedă un element neutru u. Vom presupune că $\mathcal{T}$ este o familie *c.a.* de părți ale dreptei reale care conține toate mulțimile boreliene, iar pe $\mathcal{T}$ este definită o măsură cu valori în $\mathfrak{X}$.

Vom considera funcții de variabile reale

T e o r e m ă. Fie $\{f_n(s, t)\}$ un șir de funcții reale măsurabile $(\mathcal{T} m)$ în s și în t (separat) și mărginite în t, care satisfac condițiilor.

1) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\mu(s, \varepsilon)$, așa ca

$$|f_n(s, t)| \leqslant \mu(s, \varepsilon), \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dacă $t \notin (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$.

2) Pentru orice interval deschis $\Delta \ni s$

$$(o)\text{-}\lim_n \int_\Delta f_n(s, t)\, dm(t) = u.$$

3) Există $q(s)$ astfel ca

$$\int_{(s-1,\, s+1)} |f_n(s, t)|\, dm(t) \leqslant q(s), \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

În acest caz, dacă $x(t)$ este o funcție semiordonată (de la T la $\mathfrak{X}$) măsurabilă $(\mathcal{T}, m)$ și mărginită, atunci funcția

$$x_n(s) = \int_{(-\infty,+\infty)} f_n(s, t) \langle x(t), dm(t) \rangle \tag{2.2.1}$$

există pentru orice n și

$$x(s) = (o)\text{-}\lim_n x_n(s)$$

în orice punct de continuitate al lui $x(s)$.

Demonstrație. Existența funcțiilor $x_n(s)$ se datorește faptului că $f_n(s, t)\, x(t)$ este un produs de două funcții (în t) măsurabile $(\mathcal{T}, m)$ și mărginite, și deci posedă aceleași proprietăți (teorema 1.4.5 cap. III).

Fie acum s un punct de continuitate al lui $x(s)$, δ un număr real arbitrar de mic și fie ε așa ca

$$|t - s| < \varepsilon \quad \text{implică} \quad |x(t) - x(s)| \leqslant \delta r(s) \tag{2.2.2}$$

$r(s)$ fiind regulatorul de continuitate al funcției $x(s)$.

Să facem descompunerea (cu notație simplificată):

$$x_n = \int_{(-\infty,\, s+\varepsilon]} f_n\, x\, dm + \int_{(s-\varepsilon,\, s+\varepsilon)} f_n\, x\, dm + \int_{[s+\varepsilon,\, +\infty)} f_n\, x\, dm \tag{2.2.3}$$

și să evaluăm modulul diferenței $x_n(s) - x(s)$. Avem mai întîi

$$l_n(s) = \int_{(s-\varepsilon,\, s+\varepsilon)} f_n(s, t) \langle x(t), dm(t) \rangle - x(s) = \left\{ \int_{(s-\varepsilon,\, s+\varepsilon)} f_n(s, t) \langle x(s), dm(t) \rangle - x(s) \right\} +$$

$$+ \int_{(s-\varepsilon,\, s+\varepsilon)} f_n(s, t) \langle x(t) - x(s), dm(t) \rangle.$$

După condiția 2) primul termen din ultimul membru tinde spre **0**. Al doilea termen, datorită condiției 3), și relației (2.2.2) este majorată de elementul $\delta \langle r(s), q(s) \rangle$.

În concluzie,

$$\overline{\lim_n} |l_n(s)| \leqslant \delta \langle r(s), q(s) \rangle. \tag{2.2.4}$$

Pentru evaluarea primei și celei de a treia integrale din (2.2.3) să presupunem mai întîi că $x(t)$ este simplă și fie

$$x(t) = \{c_1 T_1;\ c_2 T_2, \ldots, c_k T_k\}, \quad c = \sum_{i=1}^{n} |c_i|.$$

Atunci

$$\left| \int_{[-\infty, s-\varepsilon]} f_n\, x\, dm + \int_{[s+\varepsilon, +\infty)} f_n\, x\, dm \right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left\langle |c_i|, \left| \int_{T_i \cap T} f_n\, dm \right| \right\rangle \leqslant \left\langle c, \left| \int_{T} f_n\, dm \right| \right\rangle$$

unde $T = (-\infty, s-\varepsilon] \cup [s+\varepsilon, \infty)$, și cum

$$\int_T f_n\, dm \xrightarrow{o} \mathbf{0}.$$

care se deduce pe baza condiției 2), rezultă că primul membru al acestor inegalități tinde la $\mathbf{0}$.

Fie acum $x(t)$ oarecare. Există atunci (teorema 2.1.20) cap. III) $l \in \mathfrak{X}$, astfel ca pentru orice $\eta > 0$ să existe o funcție simplă $y(t)$ cu

$$\int_{(-\infty, +\infty)} \langle |x(t) - y(t)|, dm(t) \rangle \leqslant \eta\, l.$$

Avem, în acest caz, folosind și condiția 1)

$$\left| \int_{(-\infty, s-\varepsilon]} f_n\, x\, dm + \int_{[s+\varepsilon, +\infty)} f_n\, x\, dm - \int_{(-\infty, s-\varepsilon]} f_n\, y\, dm - \int_{[s+\varepsilon, \infty)} f_n\, y\, dm \right| \leqslant \eta \mu l,$$

deci

$$\overline{\lim_n} \left| \int_{[-\infty, s-\varepsilon]} f_n(s, t) \langle x(t)\, dm(t) \rangle + \int_{[s+\varepsilon, \infty]} f_n\, s(t), \langle x, (t), dm(t) \rangle \right| \leqslant \eta\, \mu(s_i \varepsilon) l.$$

Folosind aceasta împreună cu (2.2.3) și (2.2.4) obținem

$$\overline{\lim_n} \left| x_n(s) - x(s) \right| \leqslant \delta \langle r(s), q(s) \rangle + \eta\, \mu(s; \varepsilon)\, l$$

cu δ și η arbitrari de mici, ceea ce înseamnă că primul membru este $\mathbf{0}$. Aceasta demonstrează teorema.

Făcînd unele modificări condițiilor teoremei, ea poate fi stabilită și prin înlocuirea dreptei reale printr-un interval.

Se poate de asemenea studia cazul cînd funcțiile $f_n(s, t)$ sînt funcții semiordonate.

§3. Problema momentelor

Problema momentelor a lui Hausdorff a fost generalizată pentru o integrală în raport cu o funcție vectorială pozitivă finit aditivă de intervale, de S. Bochner și Ky. Fan [27]. În acest punct vom da o teoremă analogă pentru cazul integralei în raport cu o măsură complet aditivă de mulțimi măsurabile (introduse în cap. III).

Vom nota prin $B[0,1]$ spațiul funcțiilor reale și mărginite pe segmentul $[0,1]$ liniarizat și ordonat în modul obișnuit. Are loc următoarea

T e o r e m ă. Fie $\mathfrak{X}$ un K-spațiu regulat și $\{x_n\}$ un șir de elemente ale sale. Pentru ca elementele x_n să poate fi puse sub forma

$$x_n = \int_{[0,1]} t^n \, dm\,(t) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{2.3.1}$$

m fiind o măsură (complet aditivă) cu valori în $\mathfrak{X}$ definită pentru orice mulțime măsurabilă (L) din [0, 1], este necesar și suficient ca

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i \, x_{n+i} \geqslant \mathbf{0} \qquad (n,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{2.3.2}$$

D e m o n s t r a ț i e. Dacă x_n sînt de forma (2.3.1), atunci, folosind proprietățile integralei:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i \, x_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i \int_{[0,1]} t^{n+i} \, dm\,(t) = \int_{[0,1]} t^n (1-t)^k \, dm\,(t) \geqslant \mathbf{0},$$

deoarece $t^n (1-t)^k \geqslant \mathbf{0}$.

Reciproc, să considerăm un șir $\{x_n\}$ care satisface condiția (2.3.2). Vom defini o operație pe sub-spațiul funcțiilor măsurabile (L) din spațiul B [0,1] care să fie (oo)-liniară și pozitivă și astfel încît

$$U(t^n) = x_n \tag{2.3.3}$$

Să notăm prin P [0,1] mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali definite pe [0, 1].

Vom defini mai întîi o operație pe mulțimea P ([0, 1]). Fie $p(t) = t^n$. Vom pune în acest caz, $U(p) = x_n$ pentru a îndeplini condiția (2.3.3). Pentru un polinom oarecare, U se va defini apoi într-un mod evident. Dacă $p(t) = t^n (1-t)^k$, atunci

$$U(p) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i \, x_{n+i} \geqslant \mathbf{0}$$

Deoarece orice polinom pozitiv în [0,1] este o combinație liniară finită cu coeficienți pozitivi de expresii de forma $t^n (1-t)^k$, rezultă că operația U, ne va da operație aditivă și pozitivă pe P [0,1]).

Fie acum C [0,1] mulțimea funcțiilor continue pe [0,1]. Deoarece P [0,1] este o submulțime liniară majorantă a lui C [0,1], iar ultimul fiind un K-lineal, operația U poate fi prelungită pe C [0,1] cu păstrarea aditivității și pozitivității datorită unei teoreme a lui L. V. K a n t o r o v i c i [1]. (p. 315)

Operația U este continuă pe C [0,1]. Pentru a arăta acest lucru va fi suficient să considerăm doar șiruri monotone, operația fiind pozitivă. Fie deci $f_k(t) \searrow 0$ (monoton descrescător). Șirul $\{f_n(t)\}$ tinzînd descrescînd (monoton) spre zero pe intervalul închis [0, 1] în baza cunoscutei teoreme a lui Dini, converge uniform. Pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar există deci n_ε, așa ca $f_n(t) < \varepsilon$ dacă $n \geqslant n_\varepsilon$. Operația U fiind pozitivă.

$$U(f_n) \leqslant \varepsilon \, U(\mathbf{1}) \qquad (n \geqslant n_\varepsilon).$$

unde $\mathbf{1}$ este funcția identică egală cu 1, ceea ce arată că

$$U(f_n) \xrightarrow{o} \mathbf{0}.$$

Operația U este astfel (oo)-continuă pe $C[0,1]$ $CB[0,1]$.

Deoarece $C[0, 1]$ este un K-lineal majorant și exact în $B[0, 1]$, în baza unei alte teoreme a lui L. V. Kantorovici [39], operația U poate fi prelungită pe mulțimea tuturor funcțiilor măsurabile (L) din $B([0, 1]$ cu păstrarea aditivității, pozitivității și (oo)-continuității pe această mulțime.

Ca și în teorema 1.1.1 stabilită mai înainte și ținînd seama de proprietățile funcțiilor măsurabile și mărginite, există o măsură m pe $[0, 1]$ cu valori în $\mathfrak{X}$, astfel ca

$$U(f) = \int_{[0,1]} f(t)\, dm(t),$$

de unde, pentru $f(t) = t^n$ obținem egalitatea (2.3.1).

Teorema este astfel demonstrată.

ОПЕРАТОР-ПРОИЗВЕДЕНИЯ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Теория полуупорядоченных линейных пространств, разработанная Л. В. Канторовичем и Х. Фреуденталем в 1935—36 гг., возбудила ряд новых вопросов в функциональном анализе. Указываем задачу функциональных уравнений в K-пространствах, а также и задачу развития теории функций с значениями в полуупорядоченном линейном пространстве.

Билинейные операции, мало изученные в случае полуупорядоченных пространств, все же имеют значение и для этих пространств, где они имеют различные применения. Из билинейных операций, определенных на декартовом произведении векторных структур с значениями в векторной структуре, положительные билинейные операции являются более важными и нередко играют роль произведения между аргументами и таким образом применяются в некоторых задачах к теории полуупорядоченных пространств.

В настоящей работе рассматриваем более широкий класс операций двух аргументов, играющих роль произведения между элементами, данный следующим определением, введенным в раздел I.

Пусть — $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ векторные структуры и $0', 0'', 0$ являются соответственно их нулевыми элементами.

Операция $z = \langle x, y \rangle$, определенная для некоторых элементов (x, y) $\mathfrak{X} \in \times \mathfrak{Y}$ с значениями в $\mathfrak{Z}$ есть оператор-произведение (или P-оператор), если удовлетворяет условиям:

I. Операция является (относительно) биадитивной, то-есть: если $\langle x_1, y \rangle$ и $\langle x_2\, y \rangle$ определены, тогда и $\langle x_1 + x_2, y \rangle$ определено и

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle;$$

если $\langle x, y_1 \rangle$ и $\langle x, y_2 \rangle$ определены, тогда и $\langle x, y_1 + y_2 \rangle$ определено и

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle.$$

II. Операция положительная, то есть: если $x \geqslant 0'$, $y \geqslant 0''$, а $\langle x, y \rangle$ определено, тогда $\langle x, y \rangle \geqslant 0$.

III. Операция нормально определена, то-есть: если $|x| \leqslant |x_1|, |y| \leqslant |y_1|$, а $\langle x_1, y_1 \rangle$ определено, тогда и $\langle x, y \rangle$ определено; к тому же $\langle 0, y \rangle$ и $\langle x, 0'' \rangle$ определены для любого x и y.

Множество $\mathcal{S} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ называем носителем оператора-произведения, множество же $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ такое, чтобы для любого $(x, y) \in \mathcal{D}$, $\langle x, y \rangle$ было определено, называем областью определения оператора-произведения.

Работа является вкладом в функциональный анализ полуупорядоченных линейных пространств в области задач, связанных с понятием оператора-произведения. Объектом настоящей работы является изучение оператора-произведения и некоторых специальных типов таких операторов, их применение и использование оператора-произведения в двух больших задачах: функциональные уравнения и абстрактное интегрирование. Работа имеет 4 раздела. Разделы 1 и 2 составляют I часть работы, разделы 3 и 4 — II часть работы.

В разделе I, вначале дается определение оператора-произведения, а затем другой ряд других определений, в числе которых определения, касающиеся непрерывности.

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ $\mathcal{Z} \mid \sigma \mid$ —полные векторные структуры, а $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$—носитель P-оператора со значениями в $\mathcal{Z}$.

P-оператор является (o)-непрерывным по отношению к первому аргументу, если $x_n \xrightarrow{o} x$ влечет $\langle x_n, y \rangle \xrightarrow{o} \langle x, y \rangle$ при любом y, для которого $\langle x_n, y \rangle$ и $\langle x, y \rangle$ определены (при каком угодно n).

Аналогичным путем определяем (o)-непрерывность по отношению к второму аргументу.

(o)-непрерывный P-оператор по отношению к каждому из аргументов называем частично (o)-непрерывным.

P-оператор—непрерывный (mo), если условия: $x_n \xrightarrow{o} x$, $y_n \xrightarrow{o} y$ и $\langle x_n, y_n \rangle$ существуют для любого n и образуют ограниченную последовательность, влекут существование элемента $\langle x, y \rangle$ и $\langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow{o} \langle x, y \rangle$. Устанавливаем некоторые теоремы, относительно свойств оператора-произведения.

Вводим также некоторые более специальные классы P-операторов. Приводим некоторые из них.

P-оператор является бидизъюнктивным, если: условие $x_1 \perp x_2$ влечет $\langle x_1, y_1 \rangle \perp \langle x_2, y_2 \rangle$ при любом y_1, y_2, для которого $\langle x_1, y_1 \rangle$ и $\langle x_2, y_2 \rangle$ определены; условие $y_1 \perp y_2$ влечет $\langle x_1, y_1 \rangle \perp \langle x_2, y_2 \rangle$ при любом x_1, x_2, для которого $\langle x_1, y_1 \rangle$ и $\langle x_2, y_2 \rangle$ определены.

P-оператор, имеющий в качестве носителя $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, является V-дизъюнктивным, если условие $x_1 \perp x_2$ влечет существование элемента $\langle x_1, x_2 \rangle$ и равенство $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

Общая форма V-дизъюнктивного и частично (o)-непрерывного P-оператора, определенного на расширенном K-пространстве либо из ограниченных элементов $\mathcal{X}$ (то есть имеющего $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ в качестве области определения), являются

$$\langle x, y \rangle = U(x.\, y)$$

где U есть положительная и (oo)-линейная операция на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, обозначает произведение Вулиха в $\mathfrak{X}$.

В разделе I вводим также понятие V-произведения,—обобщения произведения Вулиха для случая, когда множители принадлежат различным пространствам.

Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ $\tilde{\mathfrak{Z}}$ K-пространства с единицами $1', 1''$, 1 и $\mathfrak{X}_u, \mathfrak{Y}_u, \tilde{\mathfrak{Z}}_u$ соответственно их базы. Оператор-произведение с $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ носителем $\mathfrak{X}$ и со значениями в $\tilde{\mathfrak{Z}}$ называем V-произведением, если он обладает свойствами:

I. $e \in \mathfrak{X}_u$, $f \in \mathfrak{Y}_u$ влечет существование элемента $g = \langle e, f \rangle$, и $g \in \tilde{\mathfrak{Z}}_u$.

II. Для любого $g \in \tilde{\mathfrak{Z}}_u (g \neq 0)$ существует $e \in \mathfrak{X}_u$, $f \in \mathfrak{Y}_u$, так что $0 < \langle e, 1'' \rangle \leqslant g$, $0 < \langle 1', f \rangle \leqslant g$.

III. $\langle 1', 1'', \rangle = 1'$ и $\langle e, 1'' \rangle > 0, \langle 1', f \rangle > 0$ при любых единичных элементах $e > 0', f > 0''$.

IV. Является бидизъюнктивным.

V. Если $\langle x, y \rangle$ определено и $e \in \mathfrak{X}_u$, $f \in \mathfrak{Y}_u$, тогда, если $g = \langle e, f \rangle$

$$(g) \langle x, y \rangle = \langle (e)\, x, (f)\, y \rangle,$$

(где (ν) указывает проектор, порожденный элементом (ν).

VI. Является (mo)-непрерывным.

Для построения V-произведения в случае, когда оно существует, поступаем как следует далее:

Обозначим $\bar{e} = \langle e, 1'' \rangle$, $\bar{f} = \langle 1', f \rangle$ m. Пусть x, y простые элементы, то есть $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{m} \beta_j f_j$

$e_i \in \mathfrak{X}_u$, $f_j \in \mathfrak{Y}_u$, α_i, β_j вещественны. Определяем

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \bar{e}_i \wedge \bar{f}_j.$$

Если x и y ограничены, существуют последовательности простых элементов $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ такие, что $x_n \xrightarrow{o} x$, $y_n \xrightarrow{o} y$, $|x_n| \leqslant \xi 1'$ $|y_n| \leqslant \eta 1''$.

В этом случае определяем

$$\langle x, y \rangle = (o)\text{-}\lim \langle x_n, y_n \rangle$$

для любой такой последовательности, причем предел существует и зависит только от x и y.

Если x и y суть любые положительные элементы, определяем

$$\langle x, y \rangle = (o)\text{-}\lim \langle x \wedge n 1', y \wedge n 1'' \rangle$$

тогда, когда последовательность $\{\langle x \wedge n 1' \; y \wedge n 1'' \rangle$ ограничена.

В противном случае говорим, что $\langle x, y \rangle$ не существует.

Если x и y неположительные, определяем

$$\langle x, y \rangle = \langle x_+, y_+ \rangle + \langle x_-, y_- \rangle - \langle x_+, x_- \rangle - \langle x_-, y_+ \rangle$$

если каждое слагаемое существует. В противном случае будем говорить, что $\langle x, y \rangle$ не существует.

В разделе II рассматриваем уравнения вида

$$y - \langle x_0, y \rangle = y_0, \tag{1}$$

где введенный P-оператор определен на декартовом произведении $X \times Y$ векторных структур, векторных подструктур некоторых K-пространств X_1, Y_1 с значениями в Y_1. Делаем различные предположения относительно элемента x_0 —ядра уравнений. Для случая $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ ($\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1$) полагаем, что P-оператор является ассоциативным и частично (o)-непрерывным.

В § 1 устанавливаем несколько теорем о существовании и единственности решения, без предположения, что ядро обладает разложением какого-либо специального вида.

Для случая $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, если элемент $\varphi_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} x_0^n$ существует (то-есть, если ряд является (o)-сходящимся), тогда уравнение (1) имеет единственное решение вида

$$y = y_0 - \langle \varphi_0, y_0 \rangle .$$

Элемент φ_0 является резольвентным ядром ядра x_0. Среди неразложимых ядер (для случая $X = Y$) различаем u-ограниченные и регулярные ядра.

Ядро x_0 называем u-ограниченным, если $|x_0| \leqslant \xi u$, где ξ—вещественное число, а u есть элемент, удовлетворяющий условию $\langle u, u \rangle \leqslant \omega u$ (ω вещественно). Предполагаем, что такой элемент существует и фиксирован.

Ядро x_0 называем регулярным, если существует элемент r такой, что $\langle r, u \rangle \leqslant \gamma u$, $\langle r, r \rangle \leqslant \beta u$ и $|x_0| \leqslant \varepsilon r$ с $\varepsilon < 1/\gamma$.

Любое регулярное ядро обладает резольвентным ядром: u-ограниченное ядро обладает резольвентным ядром по крайней мере в случае, когда $\xi < \omega^{-1}$.

В § 2 исследуется случай разложимых ядер. Вначале вводятся понятия вырожденного и полностью вырожденного ядра.

Ядро x_0 называем P-вырожденным относительно линейного подмножества $\mathfrak{Y}^* \subset \mathfrak{Y}$, если оно имеет вид

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i , \quad (x_j \in \mathfrak{X})$$

и существуют ненулевые элементы $y_i \in \mathfrak{Y}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\langle x_i , y \rangle = \nu_i y_i \qquad \varphi_i = \nu_i (y)$$

вещественые) при любых $y \in \mathfrak{Y}^*$. При этом существует z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такое, что $\nu_i (z_i) \neq 0$.

Решение уравнений с вырожденным ядром сводится как и в классическом случае к обыкновенной линейной системе алгебраических уравнений.

Ядро x_0 называем квази-разрешимым (в случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$), если оно разлагается в виде $x_0 = x' + x''$, где x' обладает резольвентным ядром, а z'' или вырожденным, или также обладает резольвентым ядром.

Исследование уравнения с квази-разрешимым ядром связано с исследованием уравнения

$$y - \langle x^*, y \rangle = y_0 , \tag{2}$$

где $x^* = x'' - \langle x'', \varphi' \rangle$, φ' является резольвентным ядром, принадлежащим x''.

Вводим некоторые типы квази-разрешимых ядер, в числе которых ядра типа (MD) и ядра типа (MR^*). У ядер типа (MD) x' является u-ограниченным, а x''—вырожденным (относительно некоторого подпространства). В этом случае и x^*—вырождено и решение уравнения с ядром типа (MD) сводится к решению двух уравнений: одно с u-ограниченным и другое с вырожденным ядром. У ядер типа (MR^*) x' — u-ограниченный, а x'' — регулярный и удовлетворяет дополнительному условию. В этом случае ядро x^* из уравнения (2) регулярное и, следовательно, необходимо будет решить одно уравнение с u-ограниченным ядром и другое с регулярным ядром.

Другие рассматриваемые ядра связаны с понятием P-ортогональности, обобщение понятия ортогональности двух функций.

В последнем параграфе этого раздела устанавливаем несколько теорем относительно приближения решения.

Вторая часть работы посвящена теории интегрирования относительно P-оператора и его применений.

Построенный в разделе III интеграл был введен в предыдущей работе [26]. В настоящей работе проводим более полную теорию интегрирования, приводим некоторые обобщения интеграла и рассматриваем ряд новых задач.

В § 1 раздела III в начале приводим разные соображения относительно полуупорядоченных функций и разных видов сходимости этих функций. Пусть T—произвольное множество, $\mathcal{T}$ — вполне аддитивное семейство частей T, а $\mathcal{M}$ и $\mathcal{F}$ — две (o)-полные векторные структуры. Рассматриваем вполне аддитивную и конечную меру m, определенную на T с значениями в $\mathcal{M}$.

Пусть $\{x_n(t)\}$ последовательность функций (отображений из T в $\mathcal{F}$), а $x(t)$ также функция из T в $\mathcal{F}$. Последовательность $\{(x(t)\}$ сходится почти равномерно $(\mathcal{T}, m)$ к $x(t)$, если существует $p \in \mathcal{M}$ так, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $S_\varepsilon \in \mathcal{T}$ с $m(CS_\varepsilon) \leqslant \varepsilon p$, последовательность же $\{x_n(t)\}$ стремится равномерно на T к $x,(t))$.

Вводим также понятия сходимости по мере с регулятором и сходимости почти всюду. Устанавливаем свойства упомянутых сходимостей и соотношения между ними. Если в $\mathcal{F}$ и $\mathcal{M}$ выполнено предложение диагональной последовательности [ ] (когда говорим, что они суть пространства типа (R^*)), то почти равномерная сходимость удовлетворяет теореме Фреше.

Далее определяем понятие измеримой функции. Если $x(t) = \{C_1 A_1 \ldots; C_n, A_n\}$ есть простая функция, тогда она измерима $(\mathcal{T})$, если $A_i \in \mathcal{T}$ $(i = 1, \ldots n)$. Если $x(t)$ является произвольной, то она измерима $(\mathcal{T}, m)$, если существует последовательность $\{(x_n(t)\}$ измеримых простых функций (аппроксимирующая последовательность), почти равномерно сходящаяся $(\mathcal{T}, m)$ к $x(t)$.

Построение интеграла имеет место в § 2 (как в [26]). Напомним это построение.

Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{J}$ пространства типа (R^*) и пусть $\mathcal{F} \times \mathcal{M}$ область определения для некоторого P-оператора со значениями в $\mathcal{J}$. Если $x(t) = \{c_1, A_1 \ldots c_n, A_n\}$ есть простая и $(\mathcal{T})$ измеримая функция, тогда ее интеграл есть элемент

$$\int_T \langle x(t), dm(t) \rangle = \sum_{i=s}^{n} \langle c_i, m(A_i) \rangle.$$

Любая $(\mathfrak{T}\ m)$ измеримая функция $x(t)$ интегрируема, если для ее аппроксимирующей последовательности $\{x_i(t)\}$ имеем

$$(o)\text{-}\lim_k \left[\sup_{i,j>k} \int_T \langle |x_i(t) - x_j(t)|, dm(t)\rangle\right] = 0,$$

тогда последовательность $\{x_i(t)\}$ будем называть ее интегрирующей последовательностью. Интеграл интегрируемой функции $x(t)$ является элементом

$$\int_T \langle x(t)\, dm(t)\rangle = (o)\text{-}\lim_i \int_T \langle x_i(t),\ dm(t)\rangle$$

при любой аппроксимирующей ее последовательности $\{x_i(t)\}$, так как в этом случае существует предел с правой стороны и зависит лишь от $x(t)$.

Все основные свойства интеграла Лебега сохраняются и для этого интеграла, представляющего прямое обобщение интеграла С. Бохнера [30]. (помимо теорем данных в [26] в работе приводятся и некоторые новые теоремы).

Мы предполагали, что P-оператор определен на $\mathcal{T} \times \mathcal{M}$. В более общем случае, когда $\mathcal{T} \times \mathcal{M}$ является лишь носителем предыдущие соображения могут быть обобщены путем введения понятия P-интегрируемой функции. Будем полагать, что $\langle x, m(T)\rangle$ определено для любых $x \in \mathcal{T}$. Функция $x(t)$ является P-интегрируемой $(\mathfrak{T}\ m)$, если она $(\mathfrak{T}, m)$-интегрируема и если для интегрирующей последовательности обозначая $g_i = \sup_t |x_i(t)|$,

и рассматривая элементы $g_i = \lambda_i' \lambda_i g_i$, где $\lambda_i \to 0$, $\lambda_i' \to \infty$, а $g_i^* \xrightarrow{o} 0'$ $\langle \sup_i g_i^*, p\rangle$

определено для любого $p \in \mathcal{M}$. Для определения интеграла заменим интегрируемые функции P-интегрируемыми функциями.

Общий интеграл, введенный выше для обыкновенных полуупорядоченных линейных пространств, распространяем и на случай комплексных полуупорядоченных линейных пространств (в смысле Т. Огасавара). Приходим к обобщению интеграла Лебега комплексных функций,

В том же разделе обсуждается вкратце проблема интегрируемости полуупорядоченных функций вещественной переменной, функций со значениями регулярного K-пространства с единицей, проблемы дифференцирования интеграла, и приводятся некоторые соображения относительно регулярных операций в теории интегрирования.

Напомним, что если $x(t)$ есть полуупорядоченная функция, определенная на сегменте $[a, b]$, непрерывная в t_0, интегриуемая относительно полуупорядоченной меры m, дифференцируемой в t_0, то обозначая

$$X(t) = \int_a^t \langle x(t)\, dm, (t)\rangle$$

имеем

$$X'(t) = \langle x(t_0), m'(t_0)\rangle$$

(причем штрих указывает дифференцирование в обычном смысле [31]), а $\mathcal{T}$, $\mathcal{M}$ $\mathcal{I}$ регулярные K пространство.

В разделе IV даем некоторые применения теории интегрирования. В §1 устанавливаем две теоремы об интегральном представлении некоторых линейных операций.

Пусть T—множество элементов, $\mathfrak{T}$—вполне аддитивное семейство частей T и μ—вполне аддитивная вещественная мера на $\mathfrak{T}$ с конечным $\mu(T)$.

Пусть $S(T)$ пространство измеримых и почти всюду конечных функций, линеаризированное и обычным методом упорядоченное, в котором была выбрана в качестве единицы функция, тождественно равная единице.

Пусть X—любое нормальное подпространство $S(T)$, имеющее тот же базис.

Общий вид (oo)-линейных и положительных U операций из X в регулярное K-пространство Y дается равенством

$$U(f) = \int_T f(t)\, dm(t),$$

где m есть мера на $\mathfrak{T}$ с значениями Y абсолютно (t)—непрерывная относительно μ.

Эта теорема позволяет дать специальное интегральное представление элементов любого регулярного K-пространства с обобщенной аддитивной нормой и аддитивных и положительных операций, определенных на таком пространстве.

Пусть теперь $S_n(T)$пространство комплексов из n -функций, принадлежащих пространству $S(T)$, линеаризированному и упорядоченному естественным способом, а X_n определенное как и $S_n(T)$ пространство, причем X является нормальным и регулярным подпространством $S'(T)$.

Пусть R_n n мерное эвклюдово пространство (t-полуупорядоченное). В $R_n \times X_n$ будем рассматривать в качестве оператора-произведения со значениями в X_n естественное произведение между элементом из R_n и элементом из $\mathfrak{X}_n$. Имеет место следующее предложение.

Общий вид аддитивных и положительных операций U определенных на X_n со значениями в X_n, удовлетворяющих условию

$$U(\langle x, y \rangle) = \langle x\, U(y) \rangle$$

дается равенством

$$U(x) = \int_T \langle x(t), dm(t) \rangle,$$

причем $x(t)$ есть элемент x, рассматриваемый как функция из T в R_n, а m мера из $\mathfrak{T}$ в X_n.

В § 2 этого раздела исследуются вкратце следующие задачи: (o)-интегральные уравнения, сингулярные интегралы, задача моментов.

L'OPÉRATEUR-PRODUIT DANS LES ESPACES LINÉAIRES SEMI-ORDONNÉS ET SES APPLICATIONS

(RÉSUMÉ)

La théorie des espaces linéaires semi-ordonnés, que les travaux de L. V. Kantorovitch et H. Freudenthal parus en 1935—36, a fait connaître, a soulevé une série de nouveaux problèmes dans l'Analyse fonctionnelle. L'Auteur mentionne le problème des équations fonctionnelles en K-espaces, ainsi que le problème du développement d'une théorie des fonctions aux valeurs dans un espace linéaire semi-ordonné.

Les opérations bilinéaires, peu considérées dans le cas des espaces semi-ordonnés, offrent une certaine importance dans de tels espaces aussi et ont différentes applications. Parmi les opérations linéaires définies dans un produit cartésien de lattices vectorielles ayant des valeurs dans une lattice vectorielle les opérations positives sont plus importantes et, dans plusieurs cas, jouent le rôle d'un produit entre les arguments, ayant par conséquent des applications à certains problèmes de la théorie des espaces semi-ordonnés.

Dans ce travail, l'Auteur considère une plus large classe d'opérations de deux arguments jouant le rôle de produit entre les éléments, classe donnée par la définition ci-après, qu'il introduit au Ier chapitre.

Soit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ des lattices vectorielles et $0'. 0''$, respectivement, leurs éléments nuls.

Une opération $z = \langle x, y \rangle$, définie pour certains éléments $(x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, à valeurs en $\mathfrak{Z}$ est un *opérateur-produit* (ou *P*-opérateur) si elle satisfait aux conditions:

I. L'opération est (relativement) *bi-additive*, c'est-à-dire: si $\langle x_1, y \rangle$ et $\langle x_2, y \rangle$ sont définis, $\langle x_1 + x_2, y \rangle$ est défini aussi et

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle;$$

si $\langle x, y_1 \rangle$ et $\langle x, y_2 \rangle$ sont définis, $\langle x, y_1 + y_2 \rangle$ est également défini et

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle.$$

II. L'opération est *positive*, c'est-à-dire: si $x \geqslant 0'$, $y \geqslant 0''$ et $\langle x, y \rangle$ est défini, alors $\langle x, y \rangle \geqslant 0$.

III. L'opération est *normalement définie*, c'est-à-dire: si $|x| \leqslant |x_1|$, $|y| \leqslant |y_1|$ et $\langle x_1, y_1 \rangle$ est défini, $\langle x, y \rangle$ est également défini; en sus, $\langle 0', y \rangle$ et $\langle x, 0'' \rangle$ sont définis pour tout x ou y.

L'ensemble $\mathcal{S} = \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ est appelé *support* de l'opérateur-produit et l'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $\langle x, y \rangle$ soit défini, est appelé *domaine de définition* de l'opérateur-produit.

Ce travail constitue une contribution à l'analyse fonctionnelle dans les espaces linéaires semi-ordonnés, dans le domaine des problèmes rattachés à la notion d'opérateur-produit. L'objet de ce travail est d'étudier les opérateurs-produits et certains types spéciaux de tels opérateurs, ainsi que de montrer l'utilité de leur application et l'emploi de l'opérateur-produit dans deux grands problèmes: les équations fonctionnelles et l'intégration abstraite. L'étude est divisée en 4 chapitres, les deux premiers constituant la première partie et les deux derniers, la seconde partie du travail.

Au chapitre I, après avoir donné la définition de l'opérateur-produit, l'Auteur donne également une autre série de définitions, parmi lesquelles, celles ayant trait à la continuité.

Soit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ des lattices vectorielles (σ)-complets et $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, le support d'un *P*-opérateur à valeurs en $\mathfrak{Z}$.

Le *P*-opérateur est (o)-*continu dans le premier argument*, si $x_n \xrightarrow{o} x$ implique $\langle x_n, y \rangle \xrightarrow{o} \langle x, y \rangle$ pour tout y pour lequel $\langle x_n, y \rangle$ et $\langle x, y \rangle$ sont définis (quel que soit n).

De manière analogue, ont définit l' (o)-continuité, dans le second argument.

Un *P*-opérateur (o)-continu dans les deux arguments est appelé partiellement (o)-continu.

Un P-opérateur est (mo)-continu si les conditions $x_n \xrightarrow{o} x$, $y_n \xrightarrow{o} y$ et $\langle x_n, y_n \rangle$ existent pour tout n et forment une suite bornée impliquant l'existence de l'élément $\langle x, y \rangle$ et $\langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow{o} \langle x, y \rangle$.

On établit certains théorème concernant les propriétés de l'opérateur-produit.

On introduit également certaines classes plus spéciales de P-opérateurs. On rappelle ici quelques-unes d'entre elles.

Un P-opérateur est bi-disjonctif si: la condition $x_1 \perp x_2$ implique $\langle x_1, y_1 \rangle \perp \langle x_2, y \rangle$ pour tout y_1, y_2 pour lesquels $\langle x_1, y_1 \rangle$ et $\langle x_2, y_2 \rangle$ sont définis; la condition $y_1 \perp y_2$ implique $\langle x_1, y_1 \rangle \perp \langle x_2, y_2 \rangle$ pour tout x_1, x_2 pour lesquels $\langle x_1, y_1 \rangle$ et $\langle x_2, y_2 \rangle$ sont définis. Un P-opérateur ayant $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ pour support est V-disjonctif si la condition $x_1 \perp x_2$ implique l'existence de l'élément $\langle x_1, x_2 \rangle$ et l'égalité $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

La forme générale d'un P-opérateur V-disjonctif et partiellement (o)-continu, défini sur un K-espace, élargi ou d'éléments bornés $\mathfrak{X}$ (c'est-à-dire ayant $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ pour domaine de définition) est

$$\langle x, y \rangle = U(x.\ y)$$

où U est une opération positive et (oo)-linéaire sur $\mathfrak{X}$, xy étant le produit de Voulikh en $\mathfrak{X}$.

L'Auteur introduit également, au premier chapitre, la notion de V-produit, extension du produit de Voulikh pour le cas où les facteurs appartiennent à des espaces différents.

Soit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{Z}$, K-espaces avec l'unité, $1'$, $1''$, 1, respectivement leurs unités, et $\mathfrak{X}_u$, $\mathfrak{Y}_u$, $\mathfrak{Z}_u$, respectivement, leurs bases. Un opérateur-produit, ayant $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ pour support et des valeurs en $\mathfrak{Z}$, est appelé un V-produit s'il possède les propriétés:

I. $e \in \mathfrak{X}_u$, $f \in \mathfrak{Y}_u$ impliquent l'existence de l'élément $g = \langle e, f \rangle$ et $g \in \mathfrak{Z}_u$.

II. Pour tout $g \in \mathfrak{Z}_u$ non nul, il existe $e \in \mathfrak{X}_u$, $f \in \mathfrak{Y}_u$ tel que $0 < \langle e, 1'' \rangle \leqslant g$, $0' < \langle 1', f \rangle \leqslant g$.

III. $\langle 1', 1'' \rangle = 1$ et $\langle e, 1'' \rangle > 0$, $\langle 1', f \rangle > 0$ quels que soient les éléments unitaires $e > 0'$, $f > 0''$.

IV. Il est bi-disjonctif.

V. Si $\langle y, x \rangle$ est défini et $e \in \mathfrak{X}_u$, $f \in \mathfrak{Y}_u$, alors, si $g = \langle e, f \rangle$

$$(g)\ \langle x, y \rangle = \langle (e)\, x,\ (f)\ y \rangle$$

(ou (φ) indique le projecteur généré par l'élément φ).

VI. Il est (mo)-continu.

Pour construire le V-produit, au cas où celui-ci existe, on procède comme suit:

On note $\bar{e} = \langle e, 1'' \rangle$, $\bar{f} = \langle 1', f \rangle$.

Soit x, y, des éléments simples, c'est-à-dire

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\quad y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_j$$

$e_i \in \mathfrak{X}_u$, $f_j \in \mathfrak{Y}_u$, (α_i, β_j réels). On définit

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \bar{e}_i \wedge \bar{f}_j .$$

Si x et y sont bornés, il existe des suites d'éléments simples $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ tels que

$$x_n \xrightarrow{o} x,\ y_n \xrightarrow{o} y,\ |x_n| \leqslant \xi\, 1',\ |y_n| \leqslant \eta\, 1''.$$

Dans ce cas, on définit

$$\langle x, y\rangle = (o)\text{-lim}\ \langle x_n, y_n\rangle$$

pour toutes les suites de ce genre, la limite existant et dépendant uniquement de x et y.

Si x et y sont des éléments quelconques positifs, on définit

$$\langle x, y\rangle = (o)\ \lim \langle x \wedge n1',\ y \wedge n1''\rangle$$

au cas où la suite $\{\langle x \wedge n1',\ y \wedge n1''\rangle\}$ est bornée.

Dans le cas contraire, on dit que x, y n'existent pas.

Si x et y ne sont pas positifs, on définit

$$\langle x, y\rangle = \langle x_+, y_+\rangle + \langle x_-, y_-\rangle - \langle x_+, x_-\rangle - \langle x_-, y_+\rangle$$

si chaque terme existe. Dans le cas contraire, on dit que $\langle x, y\rangle$ n'existent pas.

Au IIe chapitre, l'Auteur s'occupe des équations de la forme

$$y - \langle x_0, y\rangle = y_0 \qquad (1)$$

où le P-opérateur qui intervient est défini sur un produit cartésien $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ de lattices vectorielles, sous-lattices vectorielles de certains K-espaces $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$ aux valeurs en $\mathfrak{Y}_1$. On émet différentes hypothèses en ce qui concerne l'élément x_0 — noyau de l'équation. Dans le cas $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ ($\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1$), on suppose que le P-opérateur est associatif et partiellement (o)-continu.

Au 1er paragraphe on établit quelques théorèmes sur l'existence et l'unicité de la solution, lorsqu'on ne suppose pas que le noyau se décompose en une forme spéciale.

Dans le cas $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, si l'élément $\varphi_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} x_0^n$ existe (c'est-à-dire si la série est (o)-convergente), l'équation (1) comporte une solution unique de la forme

$$y = y_0 - \langle \varphi_0, y_0\rangle.$$

L'élément φ_0 est appelé noyau résolvant du noyau x_0. Parmi les noyaux non décomposables (dans le cas $X = Y$), on distingue les noyaux *u-bornés* et les noyaus *réguliers*.

Un noyau x_0 est appelé u-borné si $|x_0| \leqslant \xi u$ ou ξ est réel et u est un élément satisfaisant à la condition $\langle u, u\rangle \leqslant \omega u$ (ω réel). On suppose qu'un pareil élément existe et est fixé.

Un noyau x_0 est appelé régulier s'il existe un élement r tel que

$$\langle r, u\rangle \leqslant \gamma u,\ \langle r, 1\rangle \leqslant \beta u$$

et $|x_0| \leqslant \varepsilon r$ avec $\varepsilon < 1\,\gamma$.

Tout noyau régulier possède un noyau résolvant. Un noyau u-borné possède un noyau résolvant au moins lorsque $\xi < \omega^{-1}$.

Au § 2, on étudie le cas des noyaux décomposables. On introduit d'abord les notions de noyau dégénéré et complètement dégénéré.

Un noyau x_0 est nommé P-dégénéré par rapport au sous-ensemble linéaire $\mathcal{Y}^* \subset \mathcal{Y}$, s'il est de la forme

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad (x_i \in \mathcal{X})$$

et qu'il existe des éléments non nuls $y_i \in \mathcal{Y}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tels que

$$\langle x_i, y \rangle = \nu_i y_i \qquad (\nu_i = \nu_i(y) \text{ réels})$$

quels que soient $y \in \mathcal{Y}^*$. Il existe, en plus, z_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ tel que $\nu_i(z_i)=0$.

La solution des équations à noyau dégénéré se réduit, comme pour le cas classique, à la solution d'un système linéaire ordinaire d'équations algébriques.

Un noyau x_0 est appelé *quasi-résoluble* (au cas où $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$), s'il se décompose sous la forme $x_0 = x' + x''$ où x' possède un noyau résolvant et où x'' est dégénéré, ou bien possède aussi un noyau résolvant.

L'étude de l'équation à noyau *quasi-résoluble* se rattache à l'étude de l'équation

$$y - \langle x, y \rangle = y_0 \tag{2}$$

où $x^* = x'' - \langle x'', \nu' \rangle$, ν étant le noyau résolvant de x'.

On introduit différents types de noyaux quasi-résolubles, parmi lesquels les noyaux de *type* (MD) et ceux de *type* (MR^*). Pour les noyaux de type (MD), x' est u-borné et x'' est dégénéré (par rapport à un certain sous-espace). Dans ce cas, x^* est également dégénéré et la solution de l'équation à noyau de type (MD) se réduit à la solution de 2 équations: l'une à noyau u-borné et l'autre à noyau dégénéré. Pour les noyaux de type (MR^*), x' est u-borné et x'' est régulier et satisfaisant à une condition supplémentaire. Dans ce cas, le noyau x^* de l'équation (2) est régulier et, par conséquent, on devra résoudre une équation à noyau u-borné et une autre à noyau régulier.

D'autres noyaux considérés sont rattachés à la notion de P-orthogonalité, généralisation de la notion d'orthogonalité de 2 fonctions.

Au dernier paragraphe de ce chapitre, l'Auteur établit quelques théorèmes en rapport avec l'approximation de la solution.

La IIe partie de ce travail est consacrée à la théorie de l'intégration en rapport avec un P-opérateur et à ses applications. L'intégrale construite au chapitre III a été introduite par l'Auteur dans un travail antérieur [26]. Dans ce travail, il donne une théorie plus complète de l'intégration, effectue certaines extensions de l'intégrale et considère des problèmes nouveaux.

Au Ier paragraphe du chapitre III, on émet d'abord différentes considérations sur les fonctions semi-ordonnées et sur les différents modes de convergence de ces fonctions. Soit T un ensembles arbitraire, $\mathfrak{T}$ une famille complètement additive des parties de T et $\mathcal{M}$ et $\mathcal{F}$, deux lattices vectorielles, (σ)-complètes. On considère une mesure m, définie sur T, ayant des valeurs en $\mathcal{M}$, complètement-additive et à $m(T)$ fini.

Soit $\{x_n(t)\}$ une suite de fonctions de T à $\mathcal{F}$ et $x(t)$, également une fonction de T à $\mathcal{F}$. La suite $\{r_n(t)\}$ converge presque uniformément $(\mathfrak{T}, m)$ vers $x(t)$ s'il existe $p \in \mathcal{M}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $S_\varepsilon \in \mathfrak{T}$ avec $m(CS_\varepsilon) \leqslant \varepsilon p$ et que la suite $\{r_n(t)\}$ converge uniformément sur S_ε vers $x(t)$.

L'Auteur introduit également les notions de convergence en mesure avec un régulateur et de convergence presque partout. On établit les propriétés des

convergences signalées et les relations qui existent entre elles. Si en $\mathcal{F}$ et en $\mathcal{M}$ la proposition sur la suite diagonale [1] est réalisée (et alors nous disons que ce sont des espaces de type (R^*)), la convergence presque uniforme satisfait le théorème de Fréchet.

On passe ensuite à la définition de la notion de fonction mesurable. Si $x(t) = \{c_1, A_1\} \ldots ; c_n, A_n\}$ est une fonction simple, alors elle est mesurable $(\mathfrak{T})$, si $A_i \in \mathfrak{T}$ $(i = 1, \ldots n)$. Si $x(t)$ est quelconque, elle est mesurable $(\mathfrak{T}, m)$ s'il existe une suite $\{x_n(t)\}$ de fonctions simples mesurables (suite approximante) qui converge presque uniformément $(\mathfrak{T}, m)$ vers $x(t)$.

La construction de l'intégrale s'effectue au § 2 (comme en [26]. Ci-après cette construction:

Soit $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{J}$ des espaces de type (R^*) et soit $\mathcal{F} \times \mathcal{M}$, le domaine de définition d'un certain P-opérateur à valeurs en $\mathcal{J}$. Si $x(t) = \{c_1, A_1 \ldots, c_n, A_n\}$ est une fonction simple et mesurable $(\mathfrak{T})$, son intégrale est l'élément

$$\int_T \langle x(t),\ dm(t) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle c_i\, m(A_i) \rangle.$$

Une fonction $x(t)$ mesurable $(\mathfrak{T}, m)$ quelconque est intégrable si, pour une de ses suites approximantes $\{x_i(t)\}$

$$(o)\text{-}\lim \left[\sup_{i,j \geqslant k} \int_T \langle |\, x_i(t) - x_j(t)\,|, dm(t) \rangle \right] = 0.$$

La suite $\{x_i(t)\}$ est alors appelés suite intégrante. L'intégrale d'une fonction $x(t)$ intégrable est l'élément

$$\int_T \langle x(t),\ dm\ (t) \rangle = (o)\text{-}\lim_i \int_T \langle x_i(t),\ dm\ (t) \rangle.$$

quelle que soit sa suite intégrante $\{x_i(t)\}$, étant donné que, dans ce cas, la limite de la partie droite existe et ne dépend que de $x(t)$.

Toutes les propriétés fondamentales de l'intégrale de Lebesgue se maintiennent pour cette intégrale aussi, qui représente une extension directe de l'intégrale de S. Bochner [30]. (L'Auteur donne au cours du travail, outre les théorèmes déjà formulés [26], certains théorèmes nouveaux).

On a supposé que le P-opérateur est défini sur $\mathcal{F} \times \mathcal{M}$. Dans le cas général $\mathcal{F} \times \mathcal{M}$ n'est que support, les considérations précédentes peuvent être généralisées, en introduisant la notion de fonction P-intégrable. On suppose que $\langle x, m(T) \rangle$ est défini pour tout $x \in \mathcal{F}$. La fonction $x(t)$ est P-intégrable $(\mathfrak{T}, m)$, si elle est intégrable $(\mathfrak{T}, m)$ et si, pour une suite intégrante $\{x_i(t)\}$, notant $g_i \equiv \sup_t |\, x_i(t)|$ et considérant les éléments $g_i^* = \gamma_i' \lambda_i\, g_i$ ou $\lambda_i \to 0$, $\lambda_i' \to \infty$ et $g_i^* \xrightarrow{o} O'$, alors $\langle \sup_i g_i^*, p \rangle$ est défini pour tout $p \in \mathcal{M}$. Pour définir l'intégrale on remplacera les fonctions intégrables par des fonctions P-intégrables.

L'intégrale générale introduite ci-dessus pour des espaces linéaires semi-ordonnées ordinaires est étendue aux cas des espaces linéaires semi-ordonnés complexes (au sens de T. Ogasawara). On obtient une généralisation de l'intégrale de Lebesgue des fonctions complexes.

Au même chapitre, l'Auteur discute brièvement le problème de l'intégration des fonctions semi-ordonnées de variable réelle, celui des fonctions

ayant des valeurs dans un K-espace régulier à unité et celui de la dérivation de l'intégrale; il émet également certaines considérations au sujet des opérations régulières dans la théorie de l'intégration.

On rappelle ici que, si $x(t)$ est une fonction semi-ordonnée, définie sur un segment $[a, b]$, continue en t_0, intégrable par rapport à une mesure semi-ordonnée m, dérivable en t_0, alors, en notant

$$X(t) = \int_0^t \langle x(t),\ dm\ (t) \rangle,$$

on a

$$X'(t) = \langle x(t),\ m'(t_0) \rangle$$

(l'accent indiquant la dérivation au sens habituel [31]), et $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{I}$ étant des k-espaces réguliers).

Au chapitre IV, on donne certaines applications de la théorie de l'intégration. Dans le § 1, on établit deux théorèmes sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires.

Soit T un ensemble d'éléments, $\mathfrak{T}$ une famille complètement additive de parties de T et μ, une mesure réelle complètement additive sur $\mathfrak{T}$ avec $\mu(T)$ finie.

Soit $S(T)$ l'espace des fonctions mesurables et finies presque partout sur T linéarisé et ordonné de la manière habituelle, où l'on a choisi pour unité, la fonction identiquement égale à 1.

Soit X un sous-espace normal quelconque de $S(T)$ ayant la même base.

La forme générale des opérations (oo)-linéaires et positives U de X au K-espace régulier Y, est donnée par l'égalité

$$U(f) = \int_T f(t)\, dm(t)$$

où m est une mesure sur $\mathfrak{T}$ avec des valeurs en Y absolument (t)-continue en rapport avec μ.

Ce théorème permet une représentation intégrale spéciale des éléments de tout K-espace régulier, à la norme additive généralisée, ainsi que des opérations additives et positives, définies sur un tel espace.

Soit à présent $S_n(T)$ l'espace des complexes de n fonctions appartenant à $S(T)$ linéarisé et ordonné naturellement et X_n, l'espace défini comme $S_n(T)$, X étant un sous-espace normal et régulier de $S(T)$. Soit R_n l'espace euclidien n-dimensionnel (semi-ordonné t) et sur $R_n \times X_n$, considérons comme opérateur-produit à valeurs en X_n, le produit naturel entre un élément de R_n et un élément de $\mathfrak{X}_n$. La proposition suivante a lieu.

La forme générale des opérations U-additives et positives, définies sur X_n, aux valeurs en X_n et satisfaisant à la condition

$$U(\langle x, y \rangle) = \langle x, U(y) \rangle$$

est donnée par l'égalité

$$U(x) = \int_T \langle x(t),\ dm\ (t) \rangle$$

$x(t)$ étant l'élément x considéré fonction de T à R_n, m étant une mesure de $\mathfrak{T}$ à X_n.

Au § 2 de chapitre, l'Auteur traite brièvement des problèmes suivants: équations (o)-intégrales, intégrales singulières, problèmes des moments.

BIBLIOGRAFIE

1. L. V. Kantorovici, B. Z. Vulihi A. G. Pinscher, *Funkţionalnii analiz v poluuporiadocenih prostranstvah.* Moscova, 1950.
2. B. Z. Vulih, *Obobşonie poluuporiadocenîi kolţa.* Matem. Sbornik, 1953, t. 33, p. 343—358.
3. — *Proizvedenie v lineinîh poluuporiadocenîh prostranstvah i evo primenenie k teorii operaţii.* Matem. Sbornik, 1948, vol. 22, p. 27—28.
4. Al. Ghika, *Prelungirea funcţionalelor generale liniare în module semi-normate.* Studii şi cercetări matematice, vol. I, fasc. 2, 1950, p. 251.
5. — *Asupra inelelor comutative ordonate.* Bul. Ştiinţ. Secţ. de ştiinţ. mat. fiz. chim., t. II, nr. 6, iunie 1950, p. 509.
6. S. W. Steen, *An Introduction to the Theory of Operators.* Proc. London Math. Soc., 1936, vol. 41, p. 361—392.
7. F. Riesz, *Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires.* Ann. of. Math., 1940, vol. 41, p. 174—206.
8. B. Z. Vulih, *Une définition du produit dans les espaces semi-ordonnés linéaires.* DAN, 1940, vol. 26, p. 850—854.
9. F. Riesz, *Sur la théorie ergodique des espaces abstraits.* Acta Univ. Szeged. Acta, Sci. Math., 1941—1943, t. 10, p. 1—20.
10. **Maurice Parodi,** *Sur une propriété des equations intégrales et integro-differentielles du type de Volterra,* **C. R. Ac. Sci. Paris 217, 523—525 (1943).**
11. V. Volterra et J. Pérès, *Théorie des fonctionnelles.* Paris, 1936.
12. G. C. Evans, *Sopra l'algebra della funzioni permutabili.* Accademia dei Lincei, Memorie, 1910, vol. 8, p. 697—710.
13. J. G. Mikuşinski et Cz. Ryll-Nardzewski, *Sur le produit de composition.* Studia Math., 1951, t. XII, p. 51—57.
14. D. G. Bourgin, *Closure of Products of Functions.* Bull. A.M.S., 1940, vol. 46, p. 807—815.
15. Romulus Cristescu, *Cu privire la definiţia produsului în K-spaţii.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, vol. VII, nr. 3, iulie-septembrie 1955 p. 553—564.
16. Lawrance M. Graves, *Riemann Integration and Taylor's Theorem in General Analysis.* Trans. A.M.S., 1927, vol. 29, p. 163—177.
17. S. Bochner, *Integration von Functionen deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind.* Fundam. Math., 1933, vol. XX, p. 262—276.
18. G. Birkkoff, *Integration of Funktions with Values in a Banach Space.* Trans. Amer. Math. Soc., 1935, vol. 38, p. 353—378.
19. N. Dunford, *Integration in General Analysis.* Trans. A.M.S., 1935, vol. 37, p. 441—453.
20. — *Integration and Linear Operations.* Trans. A.M.S., 1936, vol. 40, p. 474—494.
21. — *Uniformity in Linear Spaces.* Trans. A.M.S., 1938, vol 44, p. 305—356.
22. I. Gelfand, *Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires.* Comm. Soc. Math. Kharkoff, 1936, vol. 13, (4), p. 35—40.
23. — *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren.* Rec. Math. N. S., 1938, vol 4, p. 235—284.
24. B. J. Pettis, *On Integration in Vector Spaces.* Trans. A.M.S., 1938, vol. 44, p. 277—304.
25. S. Bochner, *Completely Monotonous Functions in Parcially Ordered Spaces.* Duke Math. J., 1942, vol. 9, p. 519—526.
26. Romulus Cristescu, *Integrarea în spaţii semiordonate.* Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, t. IV, nr. 2, aprilie-mai-iunie 1952, p. 291—310.
27. S. Bochner u. Ky Fan, *Distributive Order-Preserving Operation in Partially Ordered Vector Sets.* Annals of Math., 1947, vol. 48.
28. V. L. Sobolev, *O poluuporiadocennoi mere mnojestv, izmerimîh funkţiiah i nekotorîh abstraktnîh integralah.* DAN, 1953, t. XCI, p. 23—26.
29. L. V. Kantorovici, *The Element of the Theory of Functions of a Real Variable with Values Belonging to a Semiordered Linear Space.* C. R. Acad. Sci de l'URSS, 1936, vol. 2, p. 359—364.
30. S. Bochner, *Integration and Differentiation in Partially Ordered Spaces.* Proc. N.A.S. 1940, vol. 26.
31. Anne O'Neill, *Contributions to the Theory of Derivates.* Duke Math., J., 1945, vol. 12, p. 89.

32. P. B. Frumkin, *K teoreme D. F. Egorova ob izmerimîh funkțiiah.* DAN, 1948, t. 60, p. 973.
33. Paul R. Halmos, *Measure Theory.* New-York, 1950.
34. T. Ogasawara, *Some General Theorems and Convergence Theorems in Vector Lattices.* J. Sci. Hirosima Univ., Ser. A, 1949, vol. 14.
35. Romulus Cristescu, *O teoremă asupra reprezentării operațiilor liniare.* Comunicările Acad. R.P.R., nr. 4, aprilie 1955, p. 655.
36. S. Kakutani, *Concrete Representation of Abstract L-spaces and Mean Ergodic Theorem.* Annals of Math., 1941, vol. 42, p. 523—537.
37. G. M. Fihtengolț, *O lineinîh funkționalah neprerîvnîh v obobșcennom smîsle.* Matem. sbornik, 1938, vol. 4146, p. 193—214.
38. Einar Hille, *Functional Analysis and Semigroups.* New-York, 1948.
39. L. V. Kantorovici, *Sur la continuité et sur le prolongement des opérations linéaires.* C. R. Acad. Sci., 1938, vol. 206, p. 833—835.
40. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires.* Warszawa, 1932.
41. G. Birkhoff, *Lattice Theory.* New-York, 1948.
42. M. Fréchet, *Sur les fonctionnelles bilinéaires.* Transactions A.M.S., 1915, vol 16, p. 215.
43. H. Freudenthal, *Teilweise geordnete Moduln.* Proc. Acad. Amsterdam, 1936, vol. 39, p. 641—651.
44. L. V. Kantorovici, *Sur les espaces semi-ordonnés linéaires et leur application à la théorie des opérations linéaires.* C. R., Acad. Sci. de l'URSS, 1935, vol. 4, p. 11—14.
45. — *Einige Sätze über halbgeordnete Räume allgemeiner Art.* C. R. Acad. Sci. de l'URSS, 1936, vol. 2, p. 7—10.
46. L. V. Kantorovici, B. Z. Vulih, A. G. Pinscher, *Poluuporiadocenîe grupî i lineinîe poluuporiadocenîe prostranstva.* Uspehi Mat. Nauk, 1951, t. VI.
47. Francisc J. Murray, *Bilinear Transformations in Hilbert Space.* Trans. A.M.S., 1939, vol. 45, p. 474—506.
48. F. Riesz et B. Sz-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Budapesta, 1953.
49. R. Schatten, *On the Direct Product of Banach Spaces.* Transaction A.M.S., 1943 vol. 53, p. 195—217.
50. B. Z. Vulih, *Sur les propriétés du produit et de l'élément inverse dans les espaces semi-ordonnés linéa res.* DAN, 1940, vol. 26, p. 855—859.
51. G. Marinescu, *Sur l'extension des fonctionnelles bilinéaires,* Bull. Math. Soc. Roum. Sci. t. 47 (1945—46) p. 202—209.
52. C. T. Ionescu-Tulcea, *Integrale în spații vectoriale ordonate,* Rev. Univ. C. I. Parhon și a Polit. Buc. 2 (1953) p. 9—14.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

SPAŢII PARŢIAL PROIECTIVE *)

DE

P. MOCANU

Spaţiile cu conexiune afină simetrică A_n parţial proiective au fost considerate în anul 1930 de B. Cagan [1], care a determinat conexiunea în cazul particular al spaţiilor de $n-2$ ori proiectiv pentru care varietăţile liniare care conţin curbele autoparalele trec printr-un punct fix, numit pol, spaţii ce au fost denumite subproiective. Spaţiile cu conexiune afină de $n-1$ ori proiective sînt spaţii euclidian proiective; ele nu sînt însă spaţii subproiective, în terminologia utilizată de Cagan, deoarece varietăţile liniare ale curbelor autoparalele sînt arbitrare şi nu trec printr-un punct fix. Conexiunea spaţiilor euclidian proiective, în coordonate carteziene, a fost determinată în 1921, de Weyl, care a dat şi condiţii invariante în orice sistem de coordonate şi anume ca tensorul proiectiv de curbură să fie nul; proprietăţile spaţiilor euclidian proiective, în cazul cînd ele sînt spaţii V_n riemanniene, au fost studiate de B. Cagan [1], [2]. Spaţiile riemanniene subproiective de ordinul $n-2$ ori au fost studiate de P. Raşevschi [3], [4], H. Şapiro [5], [6], Adati citat după [7] şi J. A. Schouten [7], ultimii doi autori punîndu-le în legătură cu cîmpurile de vectori concirculari. Conexiunile canonice ale spaţiilor euclidian proiective şi ale spaţiilor subproiective de ordinul $n-2$ ori se determină fără nici o integrare. Denumirea de spaţii parţial proiective a fost introdusă de G. Vrănceanu [8], care lăsînd la o parte ipoteza că varietăţile liniare ale curbelor autoparalele trec printr-un punct fix, a arătat că există şi spaţii de $n-2$ ori proiective, pentru care curbele autoparalele se află în varietăţi liniare arbitrare, iar coeficienţii de conexiune ai acestor spaţii satisfac un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi, spaţii ce au fost numite parţial proiective generale. Un prim exemplu de spaţii parţial proiective generale de ordinul $n-2$ îl constituie spaţiile riemanniene simetrice $V_{2p}(\lambda)$ cu curbură negativă, studiate de G. Vrănceanu, care au un grup complet de mişcări maxim cu $2p+p^2$ parametri şi pentru care geodezicele sînt elipse sau parabole.

În această lucrare, spaţiile cu conexiune afină simetrică ce au proprietatea că există sisteme de coordonate în care curbele autoparalele să fie situate pe varietăţi liniare, vor fi numite spaţii parţial proiective; spaţiile subproiective, adică acele spaţii parţial proiective pentru care varietăţile liniare ale curbelor autoparalele trec printr-un punct fix, numit pol, vor fi numite spaţii Cagan,

*) Lucrare prezentată Institutului de matematică în şedinţa din 25 mai 1955.

iar spațiile pentru care varietățile liniare ale curbelor autoparalele sînt arbitrare le vom numi spații parțial proiective generale.

Pe o cale simplă și uniformă, pornind de la ecuațiile în termeni finiți ale curbelor autoparalele sub formă de serii, se regăsesc formulele lui Weyl pentru spațiile euclidian proiective, formulele lui Cagan pentru spațiile subproiective de ordin $n-2$ și formulele lui Vrănceanu pentru spațiile parțial proiective generale de ordinul $n-2$. Această metodă se extinde fără dificultate la găsirea condițiilor la care satisfac coeficienții de conexiune ai spațiilor parțial proiective Cagan și parțial proiective generale de orice ordin, condiții ce se prezintă sub formă de sisteme de ecuații cu derivate parțiale, care generalizează formulele lui Weyl și formulele lui Cagan.

În urma efectuării unei transformări proiective de conexiune, curbele autoparalele ale spațiului rămîn invariante, iar sistemul de ecuații cu derivate parțiale, satisfăcut de coeficienții de conexiune ai spațiilor parțial proiective, rămîne invariant ca formă; cu coeficienții sistemului de ecuații cu derivate parțiale se pot construi niște expresii care rămîn invariante la o transformare proiectivă de conexiune, expresii ce au primit numele de invarianți proiectivi ai spațiului. Invarianții proiectivi sînt determinați pentru spațiile parțial proiective generale de ordinul $n-2$ și pentru o parte din ei se dă o interpretare geometrică simplă; invarianții proiectivi ai spațiilor parțial proiective se pot determina pentru un spațiu de orice ordin, însă găsirea efectivă a expresiilor acestor invarianți necesită calcule complicate.

Țin să aduc mulțumiri prof. G. Vrănceanu, sub direcția căruia a fost efectuată prezenta lucrare, pentru sprijinul permanent și sugestiile date în timpul cercetării.

1. Fie A_n un spațiu cu conexiune afină simetrică, cu n dimensiuni, raportat la variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$, și Γ^i_{jk} coeficienții de conexiune, funcții analitice de variabilele x^i; curbele autoparalele ale spațiului A_n sînt definite ca integrala sistemului de ecuații diferențiale de ordinul doi

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

unde t este un parametru afin. Spațiul A_n este parțial proiectiv dacă există un sistem de variabile x^i, astfel încît curbele autoparalele să fie situate pe varietăți liniare. Însemnînd cu

$$F^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n, c^1, c^2, \ldots, c^{2n-2}) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2}$$

ecuațiile în termeni finiți ale curbelor autoparalele în care $c^1, c^2, \ldots, c^{2n-2}$ sînt $2n-2$ constante arbitrare de care depinde integrala generală a sistemului (1) cînd se elimină parametrul t, pentru un spațiu A_n parțial proiectiv, un anumit număr din ecuațiile (2) sînt liniare în variabilele x^i. Dacă numai $n-k$ dintre ecuațiile (2) sînt liniare, spațiul A_n se zice că este de $n-k$ ori proiectiv și se notează cu P_n^{n-k}.

Spațiile A_n parțial proiective se împart în două clase: prima clasă cuprinde spațiile pentru care varietățile liniare ce conțin curbele autoparalele trec printr-un punct fix, spații pe care le vom numi spații P_n^{n-k} Cagan, iar a doua clasă cuprinde spațiile A_n, pentru care varietățile liniare ale curbelor autoparalele sînt arbitrare, spații pe care le vom numi spații P_n^{n-k} generale. Această împărțire în două clase

rezultă din faptul că într-un spațiu oarecare X_n, curbele situate în varietățile liniare E_k, pot avea una din reprezentările parametrice

$$x^i = c_\alpha^i \rho^\alpha \ (t), \tag{3}$$

$$x^i = b^i + c_\alpha^i \rho^\alpha \ (t) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k), \tag{4}$$

unde b^i, c_α^i sînt constante arbitrare, $\rho^\alpha \ (t)$ din (3) sînt k funcții de t, liniar independente, iar, în (4), $\frac{d\rho^\alpha}{dt}$ sînt liniar independente. Varietățile liniare E_k ale curbelor (3) trec prin punctul fix O, situat la distanță finită, de coordonate $x^i = 0$ și corespund curbelor autoparalele ale spațiilor P_n^{n-k} Cagan, iar varietățile lineare E_k ale curbelor (4) sînt arbitrare și corespund curbelor autoparalele ale spațiilor P_n^{n-k} generale. Observăm că prin derivare în raport cu t și prin eliminarea constantelor b^i, c_α^i din (3) și (4), rezultă că funcțiile $x^i \ (t)$ din (3) satisfac un sistem de ecuații diferențiale liniare de ordinul k

$$\frac{d^k x^i}{dt^k} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=k-1} \varphi_k^\alpha \ (t) \ \frac{d^\alpha x^i}{dt^\alpha} \quad \left(\frac{d^0 x^i}{dt^0} = x^i\right), \tag{3'}$$

iar funcțiile $x^i \ (t)$ din (4) verifică un sistem de ecuații diferențiale liniare de ordinul $k+1$

$$\frac{d^{k+1} x^i}{dt^{k+1}} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} \varphi_{k+1}^\alpha \ (t) \ \frac{d^\alpha x^i}{dt^\alpha}. \tag{4'}$$

Problema determinării spațiilor A_n parțial proiective se reduce deci la determinarea coeficienților de conexiune I_{jk}^i, astfel încît integrala generală a sistemului (1) să aibă una din formele (3) sau (4).

În această lucrare se vor da condițiile necesare și suficiente la care satisfac coeficienții de conexiune ai spațiului A_n pentru a fi un spațiu P_n^{n-k} Cagan sau general într-un anumit sistem de variabile.

Pentru $k = 2$, aceste condiții au fost date de C a g a n [2] pentru spațiile P_n^{n-2} Cagan, iar pentru spațiile P_n^{n-2} generale de G. V r ă n c e a n u [8].

Integrala generală a sistemului (1) este

$$x^i = f^i \ (t, \ a^1, \ a^2, \ldots, a^n, \ \xi^1, \ \xi^2, \ldots, \xi^n), \tag{5}$$

unde $a^1, a^2, \ldots, a^n, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ sînt $2n$ constante arbitrare pe care le putem lua ca

$$a^i = (x^i)_{t=0}, \quad \xi^i = \left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{t=0}.$$

Din (1) deducem, prin derivare în raport cu t,

$$\frac{d^3 x^i}{dt^3} = A_{jkl}^i \ \frac{dx^j}{dt} \ \frac{dx^k}{dt} \ \frac{dx^l}{dt},$$

$$\frac{d^4 x^i}{dt^4} = A_{jklh}^i \ \frac{dx^j}{dt} \ \frac{dx^k}{dt} \ \frac{dx^l}{dt} \ \frac{dx^h}{dt},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^p x^i}{dt^p} = A_{h_1 h_2 \ldots h_p}^i \ \frac{dx^{h_1}}{dt} \ \frac{dx^{h_2}}{dt} \cdots \frac{dx^{h_p}}{dt},$$

și atunci relațiile (5) se pot scrie sub forma

$$x^i = a^i + \xi^i t + \frac{1}{2!}\Gamma^i_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,t^2 + \frac{1}{3!}A^i_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l\,t^3 +$$

$$+ \frac{1}{4!}A^i_{jklh}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l\,\xi^h\,t^4 + \ldots + \frac{1}{p!}A^i_{h_1h_2\ldots h_p}\xi^{h_1}\,\xi^{h_2}\ldots\xi^{h_p}\,t^p + \ldots. \qquad (6)$$

2. Să considerăm mai întîi cazul binecunoscut $k = 1$; spațiul A_n este euclidian proiectiv, curbele autoparalele (6) sînt drepte și toate ecuațiile (2) sînt liniare în variabilele x^i. Pentru determinarea coeficienților de conexiune ai spațiului P^{n-1}_n, se observă că, deoarece a^i și ξ^i sînt constante independente, formulele (6) trebuie să fie de forma

$$x^i = a^i + \xi^i\left[t + \frac{1}{2!}A_2(a,\,\xi)\,t^2 + \frac{1}{3!}A_3(a,\xi)\,t^3 + \ldots + \frac{1}{p!}A_p(a,\xi)\,t^p + \ldots\right] \qquad (7)$$

și identificînd coeficienții lui t^2 din (6) și (7) rezultă

$$\Gamma^i_{jk}(a)\,\xi^{j-}\,\xi^k = \xi^i A_2(a,\xi),$$

deci $A_2(a,\,\xi)$ este o formă liniară și omogenă în ξ,

$$A_2(a,\,\xi) = 2\varphi_k(a)\,\xi^k,$$

din care deducem imediat formulele lui Weyl, care dau coeficienții de conexiune ai spațiilor P^{n-1}_n,

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j, \qquad (8)$$

care depind de n funcții arbitrare φ_k. Ceilalți termeni $A_3(a,\xi),\ldots,A_p(a,\xi),\ldots$ din (7) sînt polinoame omogene în ξ de grad $2,\ldots,p-1,\ldots$ și nu mai impun nici o condiție coeficienților de conexiune; ei se exprimă numai cu ajutorul formei

$$\varphi = \varphi_k\frac{dx^k}{dt},$$

deoarece sistemul (1), cu coeficienții de conexiune din (8),

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = 2\varphi\frac{dx^i}{dt} \qquad (9)$$

dă prin derivare în raport cu t

$$\frac{d^3x^i}{dt^3} = \left(4\varphi^2 + 2\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{dx^i}{dt},$$

$$\frac{d^4x^i}{dt^4} = \left(8\varphi^3 + 12\,\varphi\frac{d\varphi}{dt} + 2\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\frac{dx^i}{dt},$$

în general,

$$\frac{d^px^i}{dt^p} = \varphi_p\left(x,\,\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx^i}{dt},$$

unde avem relațiile de recurență

$$\varphi_{p+1} = 2\varphi\,\varphi_p + \frac{d\varphi_p}{dt} \qquad (\varphi_2 = 2\varphi;\ p = 2, 3, \ldots),$$

și prin urmare

$$A_p(a, \xi) = \varphi_p(a, \xi).$$

Eliminînd din (7) unica funcție de t, coeficientul lui ξ^i, obținem ecuațiile varietăților liniare, care conțin curbele autoparalele reprezentate parametric prin ecuațiile (7):

$$\frac{x^1 - a^1}{\xi^1} = \frac{x^2 - a^2}{\xi^2} = \ldots = \frac{x^n - a^n}{\xi^n}.$$

Sistemul de ecuații diferențiale (9) are forma (4′) și arată că matricea

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{dx^1}{dt} & \ldots & \dfrac{dx^n}{dt} \\ \dfrac{d^2x^1}{dt^2} & \ldots & \dfrac{d^2x^n}{dt^2} \end{matrix} \right\|$$

este de rang unu și wronschianul funcțiilor $\dfrac{dx^i}{dt}$ este de caracteristică unu. Spațiile A_n euclidian proiective sînt spații P_n^{n-1} generale.

3. Să presupunem că A_n este un spațiu P_n^{n-2}; cu alte cuvinte, curbele integrale ale sistemului (1) sînt plane; ecuațiile (6) pot avea două forme: (3) și (4), deci avem două clase de spații P_n^{n-2}. Pentru spațiile P_n^{n-2} Cagan, ecuațiile (6) au forma

$$\begin{aligned} x^i = a^i &\left[1 + \frac{1}{2!} A_2(a, \xi)\, t^2 + \frac{1}{3!} A_3(a, \xi)\, t^3 + \ldots + \frac{1}{p!} A_p(a, \xi)\, t^p + \ldots\right] \\ &+ \xi^i \left[t + \frac{1}{2!} B_2(a, \xi)\, t^2 + \frac{1}{3!} B_3(a, \xi)\, t^3 + \ldots + \frac{1}{p!} B_p(a, \xi)\, t^p + \ldots\right] \end{aligned} \tag{10}$$

și egalînd coeficienții lui t^2 din (6) și (10) avem

$$\Gamma^i_{jk}(a)\, \xi^j\, \xi^k = a^i\, A_2(a, \xi) + \xi^i\, B_2(a, \xi),$$

unde $A_2(a, \xi)$ este o formă pătratică și omogenă în ξ,

$$A_2(a, \xi) = \psi_{jk}(a)\, \xi^j\, \xi^k, \qquad \psi_{jk} = \psi_{kj},$$

iar $B_2(a, \xi)$ o formă liniară și omogenă în ξ,

$$B_2(a, \xi) = 2\varphi_k(a)\, \xi^k$$

din care deducem formulele lui Cagan, care dau coeficienții de conexiune ai spațiilor P_n^{n-2} Cagan

$$\Gamma^i_{jk} = x^i\, \psi_{jk} + \delta^i_j\, \varphi_k + \delta^i_k\, \varphi_j, \qquad (\psi_{jk} \neq 0), \tag{11}$$

care depind de $n + \frac{n(n+1)}{2}$ funcții arbitrare φ_k și ψ_{jk}. Termenii $A_3(a, \xi), \ldots, A_p(a, \xi), \ldots$ din (10) sînt forme omogene în ξ de grad $3, \ldots, p, \ldots$ iar $B_3(a, \xi), \ldots, B_p(a, \xi), \ldots$ sînt forme omogene în ξ de grad $2, \ldots, p-1, \ldots$ și nu mai impun nici o condiție coeficienților de conexiune (11) deoarece ei se exprimă numai cu ajutorul funcțiilor φ_k și ψ_{jk}, după cum se vede scriind sistemul (1), pentru coeficienții de conexiune din (11), sub forma

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \psi x^i + 2\varphi \frac{dx^i}{dt}, \tag{12}$$

unde

$$\psi = \psi_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \quad , \quad \varphi = \varphi_k \frac{dx^k}{dt}.$$

Derivînd formulele (12) în raport cu t deducem

$$\frac{d^3x^i}{dt^3} = \left(2\varphi\psi + \frac{d\psi}{dt}\right) x^i + \left(\psi + 4\varphi^2 + 2\frac{d\varphi}{dt}\right) \frac{dx^i}{dt},$$

în general

$$\frac{d^p x^i}{dt^p} = \psi_p\left(x, \frac{dx}{dt}\right) x^i + \varphi_p\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx^i}{dt},$$

unde ψ_p și φ_p sînt dați de formulele de recurență

$$\psi_{p+1} = \psi\varphi_p + \frac{d\psi_p}{dt}$$

$$\varphi_{p+1} = \psi_p + 2\varphi\varphi_p + \frac{d\varphi_p}{dt}, \qquad (\psi_2 = \psi,\ \varphi_2 = 2\varphi;\ p = 2, 3, \ldots)$$

deci

$$A_p(a, \xi) = \psi_p(a, \xi) \quad , \quad B_p(a, \xi) = \varphi_p(a, \xi).$$

Deoarece a^i și ξ^i sînt constante independente, în (10) apar numai două funcții de t liniar independente, coeficientul lui a^i, și coeficientul lui ξ^i; prin eliminarea acestor funcții, obținem ecuațiile celor $n-2$ varietăți liniare, ce conțin curbele autoparalele ale spațiului A_n. Aceste varietăți trec prin punctul fix O ($x^i = 0$), situat la distanță finită, după cum se vede din ecuațiile lor scrise sub forma

$$\begin{vmatrix} x^1 & a^1 & \xi^1 \\ x^2 & a^2 & \xi^2 \\ x^\alpha & a^\alpha & \xi^\alpha \end{vmatrix} = 0, \quad (\alpha = 3, 4, \ldots, n). \tag{13}$$

Prin transformarea de variabile $x'^i = x^i + p^i$, unde p^i sînt constante fixe, ce constituie coordonatele unui punct fix P din A_n, punctul fix O se duce în P și varietățile liniare (13), în variabilele x'^i, trec prin acest punct fix $x'^i = p^i$. Se observă din formulele (11) că oricărui spațiu P_n^{n-1} i se poate asocia un spațiu

P_n^{n-2} Cagan, deoarece coeficienții de conexiune din (11) se obțin prin transformarea lui Weyl a conexiunii $\Gamma_{jk}^{i} = x^i \psi_{jk}$ cu ajutorul funcțiilor φ_k.

Sistemul de ecuații diferențiale (12) are forma (3′) și arată că matricea

$$\left\| \begin{matrix} x^1 & \dots & x^n \\ \dfrac{dx^1}{dt} & \dots & \dfrac{dx^n}{dt} \\ \dfrac{d^2x^1}{dt^2} & \dots & \dfrac{d^2x^n}{dt^2} \end{matrix} \right\| \tag{14}$$

este de rang doi și wronschianul funcțiilor x^i (t) de caracteristică doi.

Se poate obține o simplificare a formulelor (11) printr-o transformare de variabile care să arunce punctul O la infinit și să conserve varietățile liniare; considerînd transformarea proiectivă de variabile

$$x'^1 = \frac{1}{x^1}\ , \quad x'^\alpha = \frac{x^\alpha}{x^1}\ , \quad (\alpha = 2,\ 3,\ \dots,\ n),$$

punctul O este aruncat în punctul de la infinit al axei x'^1 și varietățile liniare d13), în variabilele x'^i, trec prin acest punct. Ecuațiile lor se scriu sub forma

$$\frac{x'^2 - a'^2}{\xi'^2} = \frac{x'^3 - a'^3}{\xi^3} = \dots = \frac{x'^n - a'^n}{\xi^n},$$

din care se vede că ele constituie dreptele spațiului X_{n-1} $(x'^2, \dots, x'^n)$. Coeficienții de conexiune ai spațiului A_n în variabilele x'^i sînt dați de formulele

$$\Gamma'^1_{jk} = \delta^1_j \varphi'_k + \delta^1_k \varphi'_j$$

$$\Gamma'^\alpha_{jk} = \delta^\alpha_j \varphi'_k + \delta^\alpha_k \varphi'_j\ , \qquad (\alpha = 2,\ 3,\ \dots,\ n)$$

cu

$$\varphi'_1 = \frac{1}{x'^1} - \frac{1}{(x'^1)^2}\left(\varphi_1 + \varphi_\alpha\ x'^\alpha\right)\ , \quad \varphi'_\alpha = \frac{1}{x'^1}\varphi_\alpha .$$

Din formulele (10), rezultă că spațiile P_n^{n-2} Cagan nu pot avea curbele autoparalele parabole.

4. Pentru spațiile P_n^{n-2} generale, formulele (6) au forma

$$x^i = a^i + \xi^i\left[t + \frac{1}{2!}A_2\,(a,\ \xi)\,t^2 + \frac{1}{3!}A_3\,(a,\ \xi)\,t^3 + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p!}A_p\,(a,\ \xi\ t^p + \dots\right] + \Gamma^{*i}_{jk}\,(a)\,\xi^j\,\xi^k\left[\frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}B_3\,(a,\ \xi)\,t^3 + \dots + \right. \tag{15}$$

$$\left. + \frac{1}{p!}B_p\,(a,\ \xi)\ t^p + \dots\right]$$

unde Γ^{*i}_{jk} sînt simetrice în indici j, k și

$$\Gamma^{*i}_{jk} = \delta^i_j \rho^*_k + \delta^i_k \rho^*_j\ , \tag{16}$$

pentru orice valoare a indicelui i. Egalînd coeficientul lui t^2 din (6) și (15), rezultă

$$\Gamma^i_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k = \xi^i\,A_2(a,\,\xi) + \Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k,$$

deci $A_2(a,\,\xi)$ este o formă liniară și omogenă în ξ,

$$A_2(a,\,\xi) = 2\,\varphi_k(a)\,\xi^k,$$

de unde se deduc coeficienții de conexiune ai spațiilor P_n^{n-2} generale

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^{*i}_{jk} + \delta^i_j\,\varphi_k + \delta^i_k\,\varphi_j. \tag{17}$$

În formulele (17), φ_k sînt n funcții arbitrare, însă Γ^{*i}_{jk} nu mai sînt funcții arbitrare; ele satisfac, ca și Γ^j_{ik}, un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi. Pentru obținerea acestui sistem, egalăm coeficienții lui t^3 din (6) și (15),

$$A^i_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l = \xi^i\,A_3(a\,\xi) + \Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,B_3(a,\,\xi),$$

unde $A_3(a,\,\xi)$ este o formă pătratică și omogenă în ξ

$$A_3(a,\,\xi) = \psi_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k,\quad \psi_{jk} = \psi_{kj}$$

iar $B_3(a,\,\xi)$ o formă liniară și omogenă în ξ

$$B_3(a,\,\xi) = \omega_k(a)\,\xi^k.$$

Obținem deci

$$A^i_{jkl} = \frac{1}{3}\left(\delta^i_j\,\psi_{kl} + \delta^i_k\,\psi_{lj} + \delta^i_l\,\psi_{jk} + \omega_j\,\Gamma^{*i}_{kl} + \omega_k\,\Gamma^{*i}_{lj} + \omega_l\,\Gamma^{*i}_{jk}\right) \tag{18}$$

Ținînd însă seama că

$$A^i_{jkl} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial\Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} + 2\,\Gamma^i_{sj}\,\Gamma^s_{kl} + 2\,\Gamma^i_{sk}\,2\,\Gamma^s_{lj} + \Gamma^i_{sl}\,\Gamma^s_{jk}\right) \tag{19}$$

obținem din (17), (18) și (19)

$$\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial\Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} + 2\,\Gamma^i_{sj}\,\Gamma^s_{kl} + 2\,\Gamma^i_{sk}\,\Gamma^s_{lj} + 2\,\Gamma^i_{sl}\,\Gamma^s_{jk} =$$

$$= \delta^i_j\,\omega_{kl} + \delta^i_k\,\omega_{lj} + \delta^i_l\,\omega_{jk} + \omega_j\,\Gamma^i_{kl} + \omega_k\,\Gamma^i_{lj} + \omega_l\,\Gamma^i_{jk}, \tag{20}$$

unde

$$\omega_{jk} = \psi_{jk} - \omega_j\,\varphi_k - \omega_k\,\varphi_j, \tag{21}$$

iar Γ^{*i}_{jk} verifică un sistem de ecuații cu derivate parțiale de forma (20):

$$\frac{\partial\Gamma^{*i}_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial\Gamma^{*i}_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial\Gamma^{*i}_{lj}}{\partial x^k} + 2\,\Gamma^{*i}_{sj}\,\Gamma^{*s}_{kl} + 2\,\Gamma^{*i}_{sk}\,\Gamma^{*s}_{lj} + 2\,\Gamma^{*i}_{sl}\,\Gamma^{*s}_{jk} =$$

$$= \delta^i_j\,\omega^*_{kl} + \delta^i_k\,\omega^*_{lj} + \delta^i_l\,\omega^*_{jk} + \omega^*_j\,\Gamma^{*i}_{kl} + \omega^*_k\,\Gamma^{*i}_{lj} + \omega^*_l\,\Gamma^{*i}_{jk}\ ; \tag{22}$$

coeficienții din sistemele (20) și (22) fiind legați prin relațiile

$$\omega_j^* = \omega_j - 6\varphi_j$$

$$\omega_{jk}^* = \omega_{jk} + \omega_j \varphi_k + \omega_k \varphi_j - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^j} - 4\varphi_j \varphi_k - 2\varphi_s \Gamma_{jk}^s . \tag{23}$$

Condițiile (16), relative la coeficienții de conexiune Γ_{jk}^i se scriu

$$\Gamma_{jk}^i \neq \delta_j^i \rho_k + \delta_k^i \rho_j \tag{24}$$

pentru orice valoare a indicelui i și unde

$$\rho_k = \rho_k^* + \varphi_k .$$

În cazul particular al unui spațiu A_n cu conexiune constantă, sistemul (20) se scrie sub forma

$$(2\Gamma_{sj}^i - \delta_s^i \omega_j)\Gamma_{kl}^s + (2\Gamma_{sk}^i - \delta_s^i \omega_k)\Gamma_{lj}^s + (2\Gamma_{sl}^i - \delta_s^i \omega_l)\Gamma_{jk}^s =$$

$$= \delta_j^i \omega_{kl} + \delta_k^i \omega_{lj} + \delta_l^i \omega_{jk} . \tag{25}$$

Sistemul de ecuații (20) este verificat de coeficienții de conexiune ai spațiului A_n euclidian proiectiv

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_j^i f_k + \delta_k^i f_j ,$$

cu

$$\omega_{jk} = \frac{\partial f_j}{\partial x^k} + \frac{\partial f_k}{\partial x^j} + 8 f_j f_k - \omega_j f_k - \omega_k f_j ,$$

unde ω_k sînt funcții arbitrare.

Determinarea spațiilor P_n^{n-2} generale se reduce deci la integrarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale (20) de ordinul întîi, cu condiția (24), în care funcțiile necunoscute sînt coeficienții de conexiune Γ_{jk}^i, iar ω_j, ω_{jk} sînt funcții arbitrare. Numărul ecuațiilor (20) este $\frac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$ și conțin $n + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$ funcții ω_j, ω_{jk}, Γ_{jk}^i, dintre care $\frac{n^2(n+1)}{2}$ sînt necunoscute. Dacă se obțin coeficienții de conexiune Γ_{jk}^i prin integrarea sistemului (20), formulele (17) ne dau pe Γ_{jk}^{*i}, φ_k fiind arbitrare. Se observă din (17) că, coeficienții Γ_{jk}^i se obțin din Γ_{jk}^{*i} printr-o transformare proiectivă de conexiune cu ajutorul lui φ_k. Deoarece o transformare proiectivă de conexiune lasă invariante curbele autoparalele ale spațiului A_n, se poate presupune în (17) $\varphi_k = 0$ și sistemul (22) coincide cu sistemul (20), întrucît formulele (23) arată că $\omega_k^* = \omega_k$, $\omega_{jk}^* = \omega_{jk} = \psi_{jk}$.

Termenii $A_4(a, \xi), \ldots, A_p(a, \xi), \ldots$ din (15) sînt polinoame omogene de grad $3, \ldots, p-1, \ldots$ în ξ, iar $B_4(a, \xi), \ldots, B_p(a, \xi), \ldots$ sînt polinoame omogene de grad $2, \ldots, p-2, \ldots$ în ξ. Aceștia nu mai impun nici o condiție coeficienților de conexiune, deoarece ei se exprimă cu ajutorul funcțiilor φ_k, ω_k

și ω_{jk}. Într-adevăr, sistemul de ecuații cu derivate parțiale (20) este echivalent cu sistemul de ecuații diferențiale de ordinul trei

$$\frac{d^3 x^i}{dt^3} = \psi \frac{dx^i}{dt} + \omega \frac{d^2 x^i}{dt^2}, \tag{26}$$

unde

$$\psi = \omega_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}, \quad \omega = \omega_k \frac{dx^k}{dt}$$

și dacă derivăm formulele (26) în raport cu t avem

$$\frac{d^4 x^i}{dt^4} = \left(\omega \psi + \frac{d\psi}{dt}\right) \frac{dx^i}{dt} + \left(\psi + \omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\right) \frac{d^2 x^i}{dt^2},$$

în general

$$\frac{d^p x^i}{dt^p} = \psi_p \left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx^i}{dt} + \omega_p \left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{d^2 x^i}{dt^2},$$

unde avem relațiile de recurență

$$\psi_{p+1} = \psi \omega_p + \frac{d\psi_p}{dt}$$

$$\omega_{p+1} = \psi_p + \omega \omega_p + \frac{d\omega_p}{dt} \qquad (\psi_3 = \psi, \ \omega_3 = \omega; \ p = 3, 4, \ldots),$$

prin urmare

$$A_p (a. \xi) = \psi_p (a, \xi) + 2 \omega_p (a, \xi) \varphi_k (a) \xi^k,$$

$$B_p (a, \xi) = \omega_p (a, \xi).$$

În formulele (15) apar numai două funcții de t liniar independente: coeficientul lui ξ^i și coeficientul lui $\Gamma^{*i}_{jk} (a) \xi^i \xi^k$; din cauza condiției (24) există două valori distincte ale indicelui i, să zicem $i = 1$, $i = 2$, astfel încît să avem

$$\Gamma^1_{jk} \neq \delta^1_j \varphi_k + \delta^1_k \varphi_j, \quad \Gamma^2_{jk} \neq \delta^2_j \varphi_k + \delta^2_k \varphi_j$$

și eliminînd din (15) cele două funcții de t, obținem ecuațiile varietăților liniare E_2 care conțin curbele autoparalele ale spațiului P^{n-2}_n general sub forma

$$\begin{vmatrix} x^1 - a^1 & \xi^1 & \Gamma^1_{jk} (a) \xi^i \xi^k \\ x^2 - a^2 & \xi^2 & \Gamma^2_{jk} (a) \xi^j \xi^k \\ x^\alpha - a^\alpha & \xi^\alpha & \Gamma^\alpha_{jk} (a) \xi^j \xi^k \end{vmatrix} = 0, \ (\alpha = 3, 4, \ldots, n).$$

Condițiile (24) sînt echivalente cu faptul că funcțiile $x^i (t)$ nu satisfac un sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi de forma (9). De asemenea, cînd coeficienții de conexiune ai unui spațiu A_n satisfac condițiile (20), care sînt echivalente cu sistemul de ecuații diferențiale (26) și pentru o anumită valoare a indicelui i, de exemplu $i = 1$, condiția (24) nu este satisfăcută, atunci spațiul A_n este euclidian proiectiv. Într-adevăr dacă

$$\Gamma^1_{jk} = \delta^1_j \varphi_k + \delta^1_k \varphi_j,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\frac{d^2x^1}{dt^2} = 2\varphi \frac{dx^1}{dt},$$

obținem prin derivare în raport cu t

$$\frac{d^3x^1}{dt^3} = 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{dx^1}{dt} + 2\varphi \frac{d^2x^1}{dt^2}$$

și comparînd cu (26), deoarece și $x^1(t)$ satisface prin ipoteză sistemul (26), avem

$$\psi = 2\frac{d\varphi}{dt}, \quad \omega = 2\varphi,$$

ceea ce arată că sistemul (26) provine prin derivare în raport cu t a unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi de forma (9), ce definește un spațiu euclidian proiectiv. Aceste considerații conduc la următoarea teoremă, care precizează teorema dată de G. Vrănceanu [8] *):

Condiția necesară și suficientă pentru ca spațiul cu conexiune afină simetrică A_n *să fie un spațiu* P_n^{n-2} *general în variabilele* $x^1, x^2, \ldots, x^n$ *este, ca să fie satisfăcute condițiile* (20) *și* (24).

Sistemul de ecuații diferențiale (26) are forma sistemului (4') și arată împreună cu condițiile (24) că matricea

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dx^1}{dt} & \cdots & \frac{dx^n}{dt} \\ \frac{d^2x^1}{dt^2} & \cdots & \frac{d^2x^n}{dt^2} \\ \frac{d^3x^1}{dt^3} & \cdots & \frac{d^3x^n}{dt^3} \end{matrix} \right\|$$

este de rang doi și wronschianul funcțiilor $\frac{dx^i}{dt}$ de caracteristică doi.

Cu funcțiile ω_j, ω_{jk} din sistemul de ecuații cu derivate parțiale (20) se pot forma anumiți invarianți proiectivi ai spațiilor P_n^{n-2} generale în raport cu transformarea proiectivă de conexiune (17). Astfel, eliminînd din (23) funcțiile φ_k, obținem invarianții proiectivi

$$I_{jk} = \omega_{jk} - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j}\right) - \frac{1}{3}\omega_s \Gamma^s_{jk} + \frac{2}{9}\omega_j \omega_k, \tag{27}$$

adică printr-o transformare de forma (17) avem

$$I^*_{jk} = I_{jk}.$$

*) p. 62.

Se poate da invarianților (27) o interpretare geometrică simplă; să căutăm condițiile necesare și suficiente pentru ca ecuațiile (15) ale curbelor autoparalele să reprezinte parabole; aceste condiții se scriu

$$\sum_{j,k=1}^{j+k=h} \frac{A_j(a,\ \xi)\, A_k(a,\ \xi)}{j!\ k!} = \frac{2B_h(a,\ \xi)}{h!}, \quad (A_1 = 1;\ j,\ k = 1,\ 2, \ldots) \tag{28}$$

și pentru $h = 3$, $h = 4$ avem

$$B_3(a,\ \xi) = 3A_2(a,\ \xi),\ B_4(a,\ \xi) = 4A_3(a,\ \xi) + 3\,[A_2(a,\ \xi)]^2,$$

în care, ținînd seama de expresiile funcțiilor $A_2(a,\ \xi)$, $A_3(a,\ \xi)$, $B_3(a,\ \xi)$ și $B_4(a,\ \xi)$ rezultă

$$\omega_k = 6\varphi_k,\ \omega_{jk} + \omega_j\,\omega_k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_j}{\partial x^k} + \frac{\partial\omega_k}{\partial x^j}\right) + \omega_s\,\Gamma^s_{jk} = 4\psi_{jk} + 12\varphi_j\,\varphi_k,$$

din care eliminînd pe φ_k și ținînd seama de (21), obținem $I_{jk} = 0$. Pentru a arăta că și celelalte relații (28) sînt satisfăcute pentru $h = 5,\ 6, \ldots$ dacă $I_{jk} = 0$, formăm expresia

$$I_{jk}\,\frac{dx^j}{dt}\,\frac{dx^k}{dt} = \psi - \frac{1}{3}\,\frac{d\omega}{dt} + \frac{2}{9}\,\omega^2$$

cu ψ și ω din (26) și dacă $I_{jk} = 0$ urmează

$$\psi = \frac{1}{3}\left(\frac{d\omega}{dt} - \frac{2}{3}\,\omega^2\right)$$

iar sistemul (26) se scrie deci sub forma

$$\frac{d^3x^i}{dt^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{d\omega}{dt} - \frac{2}{3}\,\omega^2\right)\frac{dx^i}{dt} + \omega\,\frac{d^2x^i}{dt^2}. \tag{29}$$

Făcînd schimbarea de parametru $s = s(t)$, avem

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{ds}\,s',\ \frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{d^2x^i}{ds^2}\,s'^2 + \frac{dx^i}{ds}\,s''$$

$$\frac{d^3x^i}{dt^3} = \frac{d^3x^i}{ds^3}\,s'^3 + 3\,\frac{d^2x^i}{ds^2}\,s'\,s'' + \frac{dx^i}{ds}\,s'''$$

unde

$$s' = \frac{ds}{dt},\ s'' = \frac{d^2s}{dt^2},\ s''' = \frac{d^3s}{dt^3}$$

și sistemul (29) se scrie sub forma

$$\frac{d^3x}{ds^3} = \frac{1}{3}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega}{s'} - 3\,\frac{s''}{s'^2}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{\omega}{s'} - 3\,\frac{s''}{s'^2}\right)\right]\frac{dx^i}{ds} + \left(\frac{\omega}{s'} - 3\,\frac{s''}{s'^2}\right)\frac{d^2x^i}{ds^2}.$$

Presupunînd integrat sistemul (29), ω devine o funcție de t, deoarece ea este o funcție de x^i și $\frac{dx}{dt}$; determinînd funcția $s = s(t)$ prin condiția

$$3\frac{s''}{s'} = \omega(t),$$

sistemul (29) devine $\frac{d^3x^i}{ds^3} = 0$, de unde se vede că ecuațiile (15) reprezintă parabole definite parametric prin ecuațiile

$$x^i = a^i + \xi^i s + \frac{1}{2!}\Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\xi^k s^2. \tag{30}$$

Se putea ajunge la același rezultat mai simplu, fără schimbare de parametru, deoarece o schimbare de parametru pe curbele autoparalele echivalează cu o transformare proiectivă de conexiune; punînd condițiile $\omega^*_k = 0$, $\omega^*_{jk} = 0$ în (23) rezultă imediat $I_{jk} = 0$ și în (30) s este parametru afin al conexiunii Γ^{*i}_{jk}. Determinarea spațiilor P^{n-2}_n generale pentru care curbele autoparalele sînt parabole se reduce la integrarea sistemului (20), cu condiția $I_{jk} = 0$ și deci în (20) intră numai n funcții arbitrare ω_k. Așa dar, avem următorul rezultat:

Condiția necesară și suficientă pentru ca spațiul parțial proiectiv P^{n-2}_n general să aibă în variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$ curbele autoparalele parabole este ca invarianții proiectivi I_{jk} să fie nuli.

Alți invarianți proiectivi ai sistemului (20) se obțin din (17) și primele formule (23) prin eliminarea funcțiilor φ_k

$$\Gamma^{*i}_{jk} - \frac{1}{6}\delta^i_j\omega^*_k - \frac{1}{6}\delta^i_k\omega^*_j = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{6}\delta^i_j\omega_k - \frac{1}{6}\delta^i_k\omega_j, \tag{31}$$

care sînt analogi cu invarianții lui T. Y. Thomas

$$\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{n+1}\delta^i_j\Gamma_k - \frac{1}{n+1}\delta^i_k\Gamma_j$$

la o transformare proiectivă de conexiune. Punînd în (31) $i = j$ și sumînd obținem invarianții

$$\Gamma^*_k - \frac{n+1}{6}\omega^*_k = \Gamma_k - \frac{n+1}{6}\omega_k, \tag{32}$$

unde $\Gamma^*_k = \Gamma^{*i}_{ik}$, $\Gamma_k = \Gamma^i_{ik}$. De asemenea, formînd tensorul de curbură cu invarianții (31)

$$L^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{6}\delta^i_j\omega_k - \frac{1}{6}\delta^i_k\omega_j,$$

obținem invarianții

$$L^{*i}_{jkl} = L^i_{jkl}, \tag{33}$$

unde

$$L^i_{jkl} = \frac{\partial L^i_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial L^i_{jl}}{\partial x^k} + L^i_{sk} L^s_{jl} - L^i_{sl} L^s_{jk} = \Gamma^i_{jkl} - \frac{\delta^i_j}{6}(\omega_{k,l} - \omega_{l,k}) -$$

$$- \frac{\delta^i_k}{6}\omega_{j,l} + \frac{\delta^i_l}{6}\omega_{j,k}$$

și

$$\omega_{j,k} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} + \omega_s \Gamma^s_{jk} - \frac{1}{6}\omega_j \omega_k .$$

Prin contracție, din (33) deducem

$$M^*_{kl} = M_{kl}, \quad L^*_{jl} = L_{jl}, \tag{34}$$

unde

$$M_{kl} = L^i_{ikl} = R_{kl} - \frac{n+1}{6}(\omega_{k,l} - \omega_{l,k}), \qquad (R_{kl} = \Gamma^i_{ikl})$$

$$L_{jl} = L^i_{jil} = \Gamma_{jl} + \frac{1}{6}\omega_{l,j} - \frac{n}{6}\omega_{j,l}, \qquad (\Gamma_{jl} = \Gamma^i_{jil})$$

și evident tensorii lui Weyl construiți cu L^{*i}_{jk}, L^i_{jk} și Γ^i_{jk} sînt și ei egali. Se mai obțin invarianți proiectivi prin derivare covariantă a tensorului de curbură (33) și a tensorilor contractați (34) cu ajutorul coeficienților de conexiune L^i_{jk}. În sfîrșit, coeficienții de conexiune L^i_{jk} verifică un sistem de ecuații cu derivate parțiale analog cu sistemul (20), în care intră numai invarianți proiectivi

$$\frac{\partial L^i_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial L^i_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial L^i_{lj}}{\partial x^k} + 2L^i_{sj} L^s_{kl} + 2L^i_{sk} L^s_{lj} + 2L^i_{sl} L^s_{jk} = \delta^i_j I_{kl} + \delta^i_k I_{lj} + \delta^i_l I_{jk}.$$

Mai amintim și invarianții

$$J_{kl} = \omega_{kl} - \frac{1}{n+1}\left[\frac{\partial \Gamma_k}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma_l}{\partial x^k} - \omega_k \Gamma_l - \omega_l \Gamma_k + 2\Gamma_s \Gamma^s_{kl} + \frac{4\Gamma_k \Gamma_l}{n+1}\right], \tag{34'}$$

adică avem $J^*_{kl} = J_{kl}$.

5. Înainte de a trata cazul general, să considerăm și cazul $k = 3$, $n \geqslant 4$; formulele (6) pot avea două forme cărora le corespund două clase de spații P^{n-3}_n. Dacă spațiul A_n este un spațiu P^{n-3}_n Cagan, formulele (6) au forma

$$x^i = a^i\left[1 + \frac{1}{2!}A_2(a, \xi)\, t^2 + \frac{1}{3!}A_3(a, \xi)\, t^3 + \ldots + \frac{1}{p!}A_p(a, \xi)\, t^p + \ldots\right]$$

$$+ \xi^i\left[t + \frac{1}{2!}B_2(a, \xi)\, t^2 + \frac{1}{3!}B_3(a, \xi)\, t^3 + \ldots + \frac{1}{p!}B_p(a, \xi)\, t^p + \ldots\right]$$

$$+ \Gamma^{*i}_{jk}(a)\, \xi^j \xi^k\left[\frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}C_3(a, \xi)\, t^3 + \ldots + \frac{1}{p!}C_p(a, \xi)\, t^p + \ldots\right] \tag{35}$$

unde Γ^{*i}_{jk} sînt simetrice în indicii j, k; identificînd coeficienții lui t^2 din (6) și (35), deducem

$$\Gamma^i_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k = a^i A_2(a,\xi) + \xi^i B_2(a,\xi) + \Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k$$

Rezultă că $A_2(a,\xi)$ este o formă pătratică și omogenă în ξ

$$A_2(a,\xi) = \psi_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k, \qquad \psi_{jk} = \psi_{kj},$$

iar $B_2(a,\xi)$ este o formă liniară și omogenă în ξ.

$$B_2(a,\xi) = 2\varphi_k(a)\,\xi^k,$$

și deci coeficienții de conexiune ai spațiilor P^{n-3}_n Cagan sînt dați de formulele

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^{*i}_{jk} + x^i\psi_{jk} + \delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j, \tag{36}$$

în care φ_k, ψ_{jk} sînt $n + \dfrac{n(n+1)}{2}$ funcții arbitrare, însă Γ^{*i}_{jk} nu mai sînt arbitrare. Pentru ca spațiul A_n să fie efectiv un spațiu P^{n-3}_n Cagan, trebuie ca (35) să conțină trei funcții de t liniar independente, deci ca Γ^{*i}_{jk} să satisfacă condițiile

$$\Gamma^{*i}_{jk} \neq x^i\rho^*_{jk} + \delta^i_j\rho^*_k + \delta^i_k\rho^*_j, \qquad \rho^*_{jk} = \rho^*_{kj} \tag{37}$$

pentru orice valoare a indicelui i. Dacă există un sistem de funcții ρ^*_{jk}, ρ^*_j, astfel încît (37) să devină egalități, spațiul A_n este un spațiu P^{n-2}_n Cagan.

Coeficienții de conexiune Γ^i_{jk} verifică un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi; el se obține identificînd coeficienții lui t^3 din (6) și (35)

$$A^i_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l = a^i A_3(a,\xi) + \xi^i B_3(a\ \xi) + \Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k + C_3(a,\xi),$$

unde $A_3(a,\xi)$ este o formă de gradul trei omogenă în ξ

$$A_3(a,\xi) = \frac{1}{3}\sigma_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l$$

cu σ_{jkl} simetrice în indicii j, k, l, $B_3(a,\xi)$ este o formă pătratică și omogenă în ξ,

$$B_3(a,\xi) = \tau_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k, \tau_{jk} = \tau_{kj}$$

și $C_3 + (a,\xi)$ o formă liniară și omogenă în ξ

$$C_3(a,\xi) = \omega_k(a)\,\xi^k.$$

Cu aceste expresii obținem

$$A^i_{jkl} = \frac{1}{3}\left(x^i\sigma_{jkl} + \delta^i_j\tau_{kl} + \delta^i_k\tau_{lj} + \delta^i_l\tau_{jk} + \omega_j\,\Gamma^{*i}_{kl} + \omega_k\,\Gamma^{*i}_{lj} + \omega_l\,\Gamma^{*i}_{jk}\right).$$

în care dacă înlocuim pe Γ^{*i}_{jk} cu expresiile obținute din (36) și ținînd seama de expresia lui A^i_{jkl} din (19) obținem pentru Γ^i_{jk} sistemul

$$\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^j} + \frac{\partial\Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} + 2\,\Gamma^i_{sj}\,\Gamma^s_{kl} + 2\,\Gamma^i_{sk}\,\Gamma^s_{lj} + 2\,\Gamma^i_{sl}\,\Gamma^s_{jk} = x^i\omega_{jkl} +$$

$$+ \delta^i_j\omega_{kl} + \delta^i_k\omega_{lj} + \delta^i_l\omega_{jk} + \omega_j\Gamma^i_{kl} + \omega_k\Gamma^i_{lj} + \omega_l\,\Gamma^i_{jk}, \quad (\omega_{jkl} \neq 0), \tag{38}$$

unde

$$\omega_{jk} = \tau_{jk} - \omega_j \varphi_k - \omega_k \varphi_j$$
$$\omega_{jkl} = \sigma_{jkl} - \omega_j \psi_{kl} - \omega_k \psi_{lj} - \omega_l \psi_{jk}, \tag{39}$$

Pentru spațiile P_n^{n-3} Cagan ecuațiile cu derivate parțiale (38) constituie, după aspectul lor, o generalizare a formulelor lui Cagan (11) relative la spațiile P_n^{n-2} Cagan, iar pentru spațiile P_n^{n-2} generale, ecuațiile (20) constituie o generalizarea formulelor lui Weyl (8) definite pentru spațiile P_n^{n-1} generale.

Condițiile (37) relative la coeficienții de conexiune Γ_{jk}^i se scriu

$$\Gamma_{jk}^i \neq x^i \rho_{jk} + \delta_j^i \rho_k + \delta_k^i \rho_j, \quad \rho_{jk} = \rho_{kj}, \tag{40}$$

pentru orice valoare a indicelui i și unde

$$\rho_{jk} = \rho_{jk}^* + \psi_{jk}, \quad \rho_j = \rho_j^* + \varphi_j.$$

Sistemul (38) este satisfăcut de coeficienții de conexiune ai spațiului P_n^{n-2} Cagan

$$\Gamma_{jk}^i = x^i f_{jk} + \delta_j^i f_k + \delta_k^i f_j, \quad f_{ik} = f_{kj}$$

cu

$$\omega_{jk} = f_{jk} + \frac{\partial f_j}{\partial x^k} + \frac{\partial f_k}{\partial x^j} + 8 f_j f_k + 2 x^s f_s f_{jk} - \omega_j f_k - \omega_k f_j$$

$$\omega_{jkl} = \frac{\partial f_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial f_{lj}}{\partial x^k} + 2x^s (f_{sj} f_{kl} + f_{sk} f_{lj} + f_{sl} f_{jk}) + 6(f_j f_{kl} + f_k f_{lj} + f_l f_{jk}) - \omega_j f_{kl} - \omega_k f_{lj} - \omega_l f_{jk},$$

unde ω_k sînt arbitrare.

Determinarea spațiilor P_n^{n-3} Cagan se reduce la integrarea sistemului (38), cu condiția (40), unde funcțiile necunoscute sînt coeficienții de conexiune Γ_{jk}^i, iar ω_{jkl}, ω_{jk}, ω_k sînt funcții arbitrare. Formulele (39) ne dau pe σ_{jkl} și τ_{jk} cu ajutorul lui ω_{jkl}, ω_{jk}, ω_k și al funcțiilor arbitrare φ_k și ψ_{jk}; altfel spus, termenii $A_3(a, \xi)$ și $B_3(a, \xi)$ din (35) se exprimă cu ajutorul funcțiilor ω_{jkl}, ω_{jk}, ω_k din (38) și al termenilor $A_2(a, \xi)$ și $B_2(a, \xi)$.

Funcțiile $A_p(a, \xi)$, $B_p(a, \xi)$, $C_p(a, \xi)$, $(p \geqslant 4)$ din (35) sînt polinoame omogene în ξ de grad p, $p-1$, $p-2$ și nu mai impun nici o condiție coeficienților de conexiune; ei se exprimă numai cu ajutorul funcțiilor ω_j, ω_{jk}, ω_{jkl} din (38) și al funcțiilor arbitrare φ_k, ψ_{jk}. Sistemul (38) este echivalent cu următorul sistem de ecuații diferențiale de ordinul trei

$$\frac{d^3 x^i}{dt^3} = \omega x^i + \varphi \frac{dx^i}{dt} + \psi \frac{d^2 x^i}{dt^2} \tag{41}$$

cu

$$\omega = \frac{1}{3} \omega_{jkl} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt}, \quad \varphi = \omega_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}, \quad \psi = \omega_k \frac{dx^k}{dt}$$

Prin derivare în raport cu t a formulelor (41) deducem

$$\frac{d^4 x^i}{dt^4} = \left(\psi \omega + \frac{d\omega}{dt}\right) x^i + \left(\omega + \psi \varphi + \frac{d\varphi}{dt}\right) \frac{dx^i}{dt} + \left(\varphi + \psi^2 + \frac{d\psi}{dt}\right) \frac{d^2 x^i}{dt^2};$$

în general,

$$\frac{d^p x^i}{dt^p} = \omega_p\left(x, \frac{dx}{dt}\right) x^i + \varphi_p\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{dx^i}{dt} + \psi_p\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2x^i}{dt^2}.$$

unde avem relațiile de recurență

$$\omega_{p+1} = \omega\ \psi_p + \frac{d\omega_p}{dt}$$

$$\varphi_{p+1} = \omega_p + \varphi\ \psi_p + \frac{d\varphi_p}{dt}, \quad (p = 4, 5, \ldots),$$

$$\psi_{p+1} = \varphi_p + \psi\ \psi_p + \frac{d\psi_p}{dt};$$

deci

$$A_p\ (a, \xi) = \omega_p\ (a, \xi) + \psi_p\ (a, \xi)\ \psi_{jk}\ (a)\ \xi^j\ \xi^k$$

$$B_p\ (a, \xi) = \varphi_p\ (a, \xi) + 2\ \psi_p\ (a, \xi)\ \varphi_k\ (a)\ \xi^k.$$

$$C_p\ (a, \xi) = \psi_p\ (a, \xi).$$

În formulele (35) apar numai trei funcții de t liniar independente: coeficientul lui a^i, coeficientul lui ξ^i și coeficientul lui $\Gamma^{*i}_{jk}\ (a)\ \xi^j\ \xi^k$; din cauza condiției (49) putem elimina aceste trei funcții și obținem ecuațiile varietăților liniare E_3, care conțin curbele autoparalele ale spațiului A_n sub forma

$$\begin{vmatrix} x^1 & a^1 & \xi^1 & \Gamma^1_{jk}\ (a) & \xi^j\ \xi^k \\ x^2 & a^2 & \xi^2 & \Gamma^2_{jk}\ (a) & \xi^j\ \xi^k \\ x^3 & a^3 & \xi^3 & \Gamma^3_{jk}\ (a) & \xi^j\ \xi^k \\ x^\alpha & a^\alpha & \xi^\alpha & \Gamma^\alpha_{jk}\ (a) & \xi^j\ \xi^k \end{vmatrix} = 0, \ (\alpha = 4, 5, \ldots, n).$$

Condiția (40) exprimă că funcțiile $x^i\ (t)$ nu definesc curbele autoparalele ale unui spațiu P^{n-2}_n Cagan, și prin urmare nu satisfac un sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi de forma (26). Se poate arăta că atunci cînd coeficienții de conexiune ai spațiului A_n satisfac sistemul de ecuații cu derivate parțiale (38), sau ceea ce este echivalent curbele autoparalele satisfac sistemul de ecuații diferențiale (41) și pentru o anumită valoare particulară a indicelui i, să zicem $i = 1$, condiția (40) nu este satisfăcută, atunci spațiul A_n este un spațiu P^{n-2}_n Cagan. Într-adevăr, dacă

$$\Gamma^1_{jk} = x^1\ f_{jk} + \delta^1_j\ f_k + \delta^1_k\ f_j,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\frac{d^2x^1}{dt^2} = F\ x^1 + 2f\frac{dx^1}{dt}$$

cu

$$F = f_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}, \ f = f_k\frac{dx^k}{dt}$$

obținem prin derivare în raport cu t

$$\frac{d^3x^1}{dt^3} = \frac{dF}{dt}x^1 + \left(F + 2\frac{df}{dt}\right)\frac{dx^1}{dt} + 2f\frac{d^2x^1}{dt^2}$$

și comparînd cu (41) deoarece $x^1(t)$ satisface, prin ipoteză, sistemul (41), rezultă

$$\omega = \frac{dF}{dt}\ ,\ \varphi = F + 2\frac{df}{dt}\ ,\ \psi = 2f$$

pentru orice ecuație a sistemului (41), ceea ce arată că (41) se obține prin derivare în raport cu t a unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi de forma (26) ce definește curbele autoparalele ale unui spațiu P_n^{n-2} Cagan. Rezultă astfel teorema:

Condiția necesară și suficientă pentru ca spațiul cu conexiune afină simetrică A_n să fie un spațiu P_n^{n-3} Cagan în variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$ este ca să fie satisfăcute condițiile (38) *și* (40).

Sistemul de ecuații diferențiale (41) are forma (3′) și împreună cu condițiile (40) arată că matricea

$$\left\| \begin{matrix} x^1 & \ldots\ldots\ldots & x^n \\ \dfrac{dx^1}{dt} & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{dx^n}{dt} \\ \dfrac{d^2x^1}{dt^2} & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{d^2x^n}{dt^2} \\ \dfrac{d^3x^1}{dt^3} & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{d^3x^n}{dt^3} \end{matrix} \right\|$$

este de rang trei și wronschianul funcțiilor $x^i(t)$ este de caracteristică trei.

Funcțiile Γ^{*i}_{jk} din formulele (36) verifică un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi analog cu (38); el se obține înlocuind în (38) pe Γ^i_{jk} cu expresiile date de formulele (39)

$$\frac{\partial\Gamma^{*i}_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial\Gamma^{*i}_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial\Gamma^{*i}_{lj}}{\partial x^k} + 2\,\Gamma^{*i}_{sj}\,\Gamma^{*s}_{kl} + 2\,\Gamma^{*i}_{sk}\,\Gamma^{*s}_{lj} + 2\,\Gamma^{*i}_{sl}\,\Gamma^{*s}_{jk} = x^i\,\omega^*_{jkl} +$$

$$+ \delta^i_j\,\omega^*_{kl} + \delta^i_k\,\omega^*_{lj} + \delta^i_l\,\omega^*_{jk} + p^{*s}_{jk}\,\Gamma^{*i}_{sl} + p^{*s}_{kl}\,\Gamma^{*i}_{sj} + p^{*s}_{lj}\,\Gamma^{*i}_{jk}, \qquad (42)$$

unde

$$\omega^*_{jkl} = \omega_{jkl} + \omega_j\,\psi_{kl} + \omega_k\,\psi_{lj} + \omega_l\,\psi_{jk} - \frac{\partial\psi_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial\psi_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial\psi_{lj}}{\partial x^k} -$$

$$- 2\,(\varphi_j\,\psi_{kl} + \varphi_k\,\psi_{lj} + \varphi_l\,\psi_{jk} + \psi_{js}\,\Gamma^s_{kl} + \psi_{ks}\,\Gamma^s_{lj} + \psi_{ls}\,\Gamma^s_{jk}) \qquad (43)$$

$$\omega^*_{jk} = \omega_{jk} + \omega_i\,\varphi_k + \omega_k\,\varphi_j - \psi_{jk} - \frac{\partial\varphi_j}{\partial x^k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial x^j} - 2\,\varphi_s\,\Gamma^s_{jk} - 4\,\varphi_j\,\varphi_k$$

$$p^{*i}_{jk} = \frac{1}{2}\,(\delta^i_j\,\omega_k + \delta^i_k\,\omega_j) - 3\,(\delta^i_j\,\varphi_k + \delta^i_k\,\varphi_i) - 2\,x^i\,\psi_{jk}\,.$$

Sistemul (42) are forma (38) dacă scriem ultimii trei termeni ai membrului doi din (38) sub forma

$$p^s_{jk}\,\Gamma^i_{sl} + p^s_{kl}\,\Gamma^i_{sj} + p^s_{lj}\,\Gamma^i_{sk}$$

cu

$$p^i_{jk} = \frac{1}{2}\left(\delta^i_j\,\omega_k + \delta^i_k\,\omega_j\right),$$

Deci ultimele formule din (43) se pot scrie

$$p^{*i}_{jk} = p^i_{jk} - 3\left(\delta^i_j\,\varphi_k + \delta^i_k\,\varphi_j\right) - 2\,x^i\,\psi_{jk}. \tag{44}$$

Funcțiile Γ^i_{jk} și Γ^{*i}_{jk} din (36), pentru $\psi_{jk} \neq 0$ nu dau aceleași curbe autoparalele; în cazul particular $\psi_{jk} = 0$, formulele (36) constituie o transformare proiectivă de conexiune și sistemul (38) are invarianții

$$\overset{*}{\omega}_{jkl} = \omega_{jkl}, \tag{45}$$

precum și invarianții definiți pentru spațiile P^{n-2}_n generale, deoarece ultimele două formule din (43) coincid cu formulele (23), adică avem

$$\begin{gathered} I^*_{jk} = I_{jk},\ L^{*i}_{jk} = L^i_{jk}\ ,\ \ \Gamma^*_k - \frac{n+1}{6}\,\overset{*}{\omega}_k = \Gamma_k - \frac{n+1}{6}\,\omega_k \\ L^{*i}_{jkl} = L^i_{jkl},\ M^*_{jk} = M_{jk},\ L^*_{jk} = L_{jk},\ J^*_{kl} = J_{kl}. \end{gathered} \tag{46}$$

6. Dacă spațiul A_n este un spațiu P^{n-3}_n general ($n \geqslant 4$), ecuațiile (6) au forma

$$\begin{aligned} x^i = a^i + \xi^i\left[t + \frac{1}{2!}A_2(a,\xi)\,t^2 + \frac{1}{3!}A_3(a,\xi)\,t^3 + \ldots + \frac{1}{p!}A_p(a,\xi)\,t^p + \ldots\right] + \\ + \Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k\left[\frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}B_3(a,\xi)\,t^3 + \ldots + \frac{1}{p!}B_p(a,\xi)\,t^p + \ldots\right] + \\ + A^{*i}_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l\left[\frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}C_4(a,\xi)\,t^4 + \ldots + \frac{1}{p!}C_p(a,\xi)\,t^p + \ldots\right] \end{aligned} \tag{47}$$

cu Γ^{*i}_{jk}, A^{*i}_{jkl} simetrice în indicii de covarianță; pentru ca în (47) să apară trei funcții de t liniar independente, adică pentru ca spațiul A_n să fie efectiv un spațiu P^{n-3}_n, trebuie să impunem condițiile

$$\begin{gathered} A^{*i}_{jkl} \neq \delta^i_j\,\overset{*}{\rho}_{kl} + \delta^i_k\,\overset{*}{\rho}_{lj} + \delta^i_l\,\overset{*}{\rho}_{jk} + \overset{*}{\varphi}_j\,\Gamma^{*i}_{kl} + \overset{*}{\varphi}_k\,\Gamma^{*i}_{lj} + \overset{*}{\varphi}_l\,\Gamma^{*i}_{lj} \\ \overset{*}{\rho}_{jk} = \overset{*}{\rho}_{kj} \end{gathered} \tag{48}$$

pentru orice valoare a indicelui i. Identificînd coeficienții lui t^2 din (6) și (47) avem

$$\Gamma^i_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k = \xi^i\,A_2(a,\xi) + \Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k,$$

deci $A_2(a,\xi)$ este o formă liniară și omogenă în ξ

$$A_2(a,\xi) = 2\,\varphi_k(a)\,\xi^k$$

și atunci coeficienții de conexiune ai spațiilor P^{n-3}_n generale sînt dați de formulele

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^{*i}_{jk} + \delta^i_j\,\varphi_k + \delta^i_k\,\varphi_j, \tag{49}$$

unde φ_k sînt n funcţii arbitrare. Coeficienţii de conexiune Γ^i_{jk}, ca şi funcţiile Γ^{*i}_{jk}, satisfac un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi. Egalăm coeficienţii lui t^3 din (6) şi (47)

$$A^i_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l = \xi^i\,A_3(a,\xi) + \Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,B_3(a,\xi) + A^{*i}_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l;$$

deci $A_3(a,\xi)$ este o formă pătratică şi omogenă în ξ,

$$A_3(a,\xi) = \psi_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k \quad , \quad \psi_{jk} = \psi_{kj}$$

iar $B_3(a,\xi)$ o formă liniară şi omogenă în ξ,

$$B_3(a,\xi) = \tau_k(a)\,\xi^k .$$

Cu aceste notaţii, obţinem

$$A^{*i}_{jkl} = A^i_{jkl} - \frac{1}{3}\left(\delta^i_j\psi_{kl} + \delta^i_k\psi_{lj} + \delta^i_l\psi_{jk} + \tau_j\,\Gamma^{*i}_{kl} + \tau_k\,\Gamma^{*i}_{lj} + \tau_l\,\Gamma^{*i}_{jk}\right) \tag{50}$$

Identificînd mai departe coeficienţii lui t^4 din (6) şi (47) avem

$$A^i_{jklh}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l\,\xi^h = \xi^i\,A_4(a,\xi) + \Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,B_4(a,\xi) + \\ + A^{*i}_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l\,C_4(a,\xi) \tag{51}$$

şi $A_4(a,\xi)$ este un polinom de gradul trei omogen în ξ

$$A_4(a,\xi) = \sigma_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l$$

cu σ_{jkl} simetrici în j, k, l, $B_4(a,\xi)$ este o formă pătratică şi omogenă în ξ

$$B_4(a,\xi) = \pi_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k \quad , \quad \pi_{jk} = \pi_{kj},$$

iar $C_4(a,\xi)$ o formă liniară şi omogenă în ξ

$$C_4(a,\xi) = \omega_k(a)\,\xi^k .$$

Introducînd aceste expresii în (51), obţinem

$$A^i_{jklh} = \frac{1}{4}\left(\delta^i_j\sigma_{klh} + \delta^i_k\sigma_{lhj} + \delta^i_l\sigma_{hjk} + \delta^i_h\sigma_{jkl} + \omega_j\,A^{*i}_{klh} + \omega_k\,A^{*i}_{lhj} + \right.$$

$$\left. + \omega_l\,A^{*i}_{hjk} + \omega_h\,A^{*i}_{jkl}\right) + \frac{1}{6}\left(\pi_{jk}\,\Gamma^{*i}_{lh} + \pi_{jl}\,\Gamma^{*i}_{kh} + \pi_{jh}\,\Gamma^{*i}_{lk} + \right.$$

$$\left. + \pi_{kl}\,\Gamma^{*i}_{jh} + \pi_{kh}\,\Gamma^{*i}_{jl} + \pi_{lh}\,\Gamma^{*i}_{jk}\right)$$

şi deoarece

$$A^i_{jklh} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial A^i_{jkl}}{\partial x^h} + \frac{\partial A^i_{klh}}{\partial x^j} + \frac{\partial A^i_{lhj}}{\partial x^k} + \frac{\partial A^i_{hjk}}{\partial x^l} + 2\,A^i_{sjk}\,\Gamma^s_{lh} + \right.$$

$$\left. + 2\,A^i_{sjl}\Gamma^s_{kh} + 2\,A^i_{sjh}\,\Gamma^s_{kl} + 2\,A^i_{skl}\,\Gamma^s_{jk} + 2\,A^i_{skh}\,\Gamma^s_{jl} + 2\,A^i_{slh}\,\Gamma^s_{jk}\right)$$

cu A^i_{jkl} din (19), obţinem ţinînd seamă de (49) şi (50),

$$S\frac{\partial A^i_{jkl}}{\partial x^h} + 2\,S\,A^i_{sjk}\,\Gamma^s_{lh} = S\,\delta^i_j\,\omega_{klh} + S\,\omega_{jk}\,\Gamma^i_{lh} + S\,\omega_j\,A^i_{klh}, \tag{52}$$

unde S înseamnă o sumă simetrică în indicii j, k, l, h, și

$$\omega_{jk} = \frac{2}{3}\pi_{jk} - \frac{1}{3}(\omega_j \tau_k + \omega_k \tau_j)$$
$$\omega_{jkl} = \sigma_{jkl} - \frac{1}{3} S\, \omega_j \psi_{kl} + \frac{1}{3} S\, \omega_j \tau_k \varphi_l - \frac{2}{3} S\, \varphi_j \pi_{kl}. \tag{53}$$

Condițiile (48) relative la coeficienții de conexiune Γ^i_{jk} se scriu

$$A^i_{jkl} \neq \delta^i_j \rho_{kl} + \delta^i_k \rho_{lj} + \delta^i_l \rho_{jk} + \rho_j \Gamma^i_{kl} + \rho_k \Gamma^i_{lj} + \rho_l \Gamma^i_{jk} \tag{54}$$

pentru orice valoare a indicelui i și unde

$$\rho_k = \rho^*_k + \tau_k$$
$$\rho_{jk} = \rho^*_{jk} - \rho^*_j \varphi_k - \rho^*_k \varphi_j + \frac{1}{3}(\psi_{jk} - \tau_j \varphi_k - \tau_k \varphi_j).$$

Termenii $A_p(a, \xi)$, $B_p(a, \xi)$ și $C_p(a, \xi)$, $(p > 4)$ din (47) sînt polinoame omogene în ξ de grad $p-1$, $p-2$ și $p-3$, nu mai impun nici o condiție coeficienților de conexiune; ei se exprimă cu ajutorul funcțiilor ω_{jkl}, ω_{jk}, ω_k, τ_k, φ_k și ψ_{jk}. Sistemul de ecuații cu derivate parțiale (52) este echivalent cu sistemul de ecuații diferențiale de ordinul patru

$$\frac{d^4 x^i}{dt^4} = \omega \frac{dx^i}{dt} + \varphi \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \psi \frac{d^3 x^i}{dt^3}, \tag{55}$$

unde

$$\omega = \omega_{jkl} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt},$$
$$\varphi = \frac{3}{2} \omega_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt},$$
$$\psi = \omega_k \frac{dx^k}{dt}$$

și dacă derivăm în raport cu t formulele (55) obținem

$$\frac{d^5 x^i}{dt^5} = \left(\omega\psi + \frac{d\omega}{dt}\right)\frac{dx^i}{dt} + \left(\omega + \varphi\psi + \frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left(\varphi + \psi^2 + \frac{d\psi}{dt}\right)\frac{d^3 x^i}{dt^3};$$

în general

$$\frac{d^p x^i}{dt^p} = \omega_p\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{dx^i}{dt} + \varphi_p\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \psi_p\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{d^3 x^i}{dt^3},$$

unde avem relațiile de recurență

$$\omega_{p+1} = \omega\psi_p + \frac{d\omega_p}{dt}$$
$$\varphi_{p+1} = \omega_p + \varphi\psi_p + \frac{d\varphi_p}{dt} \qquad (p = 5, 6, \ldots)$$
$$\psi_{p+1} = \varphi_p + \psi\psi_p + \frac{d\psi_p}{dt},$$

deci

$$A_p(a,\ \xi) = \omega_p(a,\ \xi) + 2\varphi_p(a,\ \xi)\,\varphi_k(a)\ \xi^k + \psi_p(a,\ \xi)\,\psi_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k,$$
$$B_p(a,\ \xi) = \varphi_p(a,\ \xi) + \psi_p(a,\ \xi)\,\tau_k(a)\,\xi^k,$$
$$C_p(a,\ \xi) = \psi_p(a,\ \xi).$$

În formulele (47) apar numai trei funcții de t, liniar independente: coeficientul lui ξ^i, coeficientul lui $\mathrm{I}^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k$ și coeficientul lui $A^{*i}_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l$; datorită condițiilor (54) putem elimina aceste trei funcții și obținem ecuațiile varietăților liniare E_3 care conțin curbele paralele ale spațiului A_n sub forma

$$\begin{vmatrix} x^1 - a^1 & \xi^1 & \Gamma^1_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k & A^1_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l \\ x^2 - a^2 & \xi^2 & \Gamma^2_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k & A^2_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l \\ x^3 - a^3 & \xi^3 & \Gamma^3_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k & A^3_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l \\ x^\alpha - a^\alpha & \xi^\alpha & \Gamma^\alpha_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k & A^\alpha_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l \end{vmatrix} = 0,\ (\alpha = 4, 5, \ldots, n).$$

Sistemul de ecuații diferențiale (55) este de forma (4') și arată împreună cu condițiile (54) că matricea

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{dx^1}{dt} & \cdots & \dfrac{dx^n}{dt} \\ \dfrac{d^2x^1}{dt^2} & \cdots & \dfrac{d^2x^n}{dt^2} \\ \dfrac{d^3x^1}{dt^3} & \cdots & \dfrac{d^3x^n}{dt^3} \\ \dfrac{d^4x^1}{dt^4} & \cdots & \dfrac{d^4x^n}{dt^4} \end{matrix} \right\|$$

este de rang trei și wronschianul funcțiilor $\dfrac{dx^i}{dt}$ este de caracteristică trei.

Considerațiile de mai sus permit să enunțăm următorul rezultat:

Condiția necesară și suficientă pentru ca spațiul cu conexiune afină simetrică A_n $(n \geqslant 4)$ să fie un spațiu F_n^{n-3} general în variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$ este ca să fie satisfăcute condițiile (52) și (54).

Determinarea spațiilor F_n^{n-3} generale se reduce la integrarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale (52) cu condițiile (54), în care funcțiile necunoscute sînt coeficienții de conexiune Γ^i_{jk}, iar ω_{jkl}, ω_{jk}, ω_k sînt funcții arbitrare. Deoarece în A^i_{jkl} intră derivatele de primul ordin ale funcțiilor $\mathrm{I}^{\ i}_{jk}$, urmează că sistemul (52) este de ordinul doi; el constituie generalizarea formulelor lui Weyl (8) pentru spațiile P_n^{n-3} generale. Numărul ecuațiilor (52) este

$$\frac{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

și conțin

$$\frac{n + n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

funcții arbitrare ω_{jkl}, ω_{jk}, ω_k.

Sistemul (52) este verificat de coeficienții de conexiune ai unui spațiu P_n^{n-2} general și coeficienții σ_{jkl}, σ_{jk}, ω_k depind de n funcții arbitrare; dacă spațiul A_n este un spațiu P_n^{n-2} general, atunci există un sistem de funcții $f_{jk} = f_{kj}$, f_k, astfel încît să avem

$$A^i_{jkl} = \frac{1}{3} S\delta^i_j f_{kl} + \frac{1}{3} S\omega_j \Gamma^i_{kl},$$

sau ceea ce este echivalent cu sistemul de ecuații diferențiale de ordinul trei

$$\frac{d^3x^i}{dt^3} = F\frac{dx^i}{dt} + f\frac{d^2x^i}{dt^2} \tag{56}$$

cu

$$f = f_k \frac{dx^k}{dt}, \quad F = f_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}.$$

Derivăm formula (56) în raport cu t, apoi înmulțim cu $\lambda = \lambda_k \frac{dx^k}{dt}$ și adunăm; obținem astfel

$$\frac{d^4x^i}{dt^4} = \left(\lambda F + \frac{dF}{dt}\right)\frac{dx^i}{dt} + \left(F + \lambda f + \frac{df}{dt}\right)\frac{d^2x^i}{dt^2} + (f - \lambda)\frac{d^3x^i}{dt^3}$$

și comparînd cu (55), rezultă

$$\omega = \lambda F + \frac{dF}{dt}, \quad \varphi = F + \lambda f + \frac{df}{dt}, \quad \psi = f - \lambda,$$

adică sistemul (52) este verificat cu

$$\omega_k = f_k - \lambda_k$$

$$\omega_{jk} = \frac{2}{3}(f_{jk} + f_s \Gamma^s_{jk}) + \frac{1}{3}\left(\lambda_j f_k + \lambda_k f_j + \frac{\partial f_j}{\partial x^k} + \frac{\partial f_k}{\partial x^j}\right)$$

$$\omega_{jkl} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial f_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial f_{lj}}{\partial x^k} + \lambda_j f_{kl} + \lambda_k f_{lj} + \lambda_l f_{jk} + \right.$$

$$\left. + 2f_{js}\Gamma^s_{kl} + 2f_{ks}\Gamma^s_{lj} + 2f_{ls}\Gamma^s_{jk}\right)$$

și λ_k sînt n funcții arbitrare.

Condițiile (54) exprimă că funcțiile $x^i(t)$ nu satisfac un sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi de forma (26) și deci nu definesc curbele autoparalele ale unui spațiu P_n^{n-2} general. Cînd coeficienții de conexiune ai unui spațiu A_n satisfac condițiile (52), sau ceea ce este echivalent, funcțiile care definesc curbele autoparalele satisfac sistemul de ecuații diferențiale (55) și pentru o anumită valoare a indicelui i, să zicem $i = 1$, condiția (54) nu este satisfăcută, atunci spațiul A_n este un spațiu P_n^{n-2} general. Într-adevăr, avem prin ipoteză

$$A^1_{jkl} = \frac{1}{3} S\,\delta^1_j \rho_{kl} + \frac{1}{3} S\,\rho_j\,\Gamma^1_{kl},$$

ceea ce este echivalent cu ecuația diferențială

$$\frac{d^3x^1}{dt^3} = A\frac{dx^1}{dt} + B\frac{d^2x^1}{dt^2}$$

cu

$$A = \rho_{jk}\frac{dx_j}{dt}\frac{dx^k}{dt} \quad , \quad B = \rho_k\frac{dx^k}{dt}$$

și derivînd în raport cu t deducem

$$\frac{d^4x^i}{dt^4} = \frac{dA}{dt}\frac{dx^1}{dt} + \left(A + \frac{dB}{dt}\right)\frac{d^2x^1}{dt^2} + B\frac{d^3x^1}{dt^3}$$

și comparînd cu (55), deoarece $x^1(t)$ este o soluție a acestui sistem, deducem

$$\omega = \frac{dA}{dt} \quad , \quad \varphi = A + \frac{dB}{dt} \quad , \quad \psi = B$$

pentru toate ecuațiile sistemului (55), ceea ce arată că sistemul (55) provine prin derivare în raport cu t a unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul trei de forma (26), ce definește deci un spațiu P_n^{n-2} general.

7. După expunerea cazurilor particulare precedente putem aplica metoda utilizată la cazul general; să presupunem că A_n este un spațiu P_n^{n-k}, $k \leqslant n-1$; ecuațiile (6) pot avea două forme, deci avem două clase de spații P_n^{n-k}. Pentru spațiile P_n^{n-k} Cagan, ecuațiile (6) au forma

$$x^i = a^i\left[1 + \frac{1}{2!}A_2^1(a,\xi)\,t^2 + \frac{1}{3!}A_3^1(a,\xi)\,t^3 + \ldots + \frac{1}{k!}A_k^1(a,\xi)\,t^k + \ldots\right]$$

$$+ \xi^i\left[t + \frac{1}{2!}A_2^2(a,\xi)\,t^2 + \frac{1}{3!}A_3^2(a,\xi)\,t^3 + \ldots + \frac{1}{k!}A_k^2(a,\xi)\,t^k + \ldots\right]$$

$$+ \Gamma^{*i}_{h_1h_2}(a)\,\xi^{h_1}\xi^{h_2}\left[\frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}A_3^3(a,\xi)\,t^3 + \ldots + \frac{1}{k!}A_k^3(a,\xi)\,t^k + \ldots\right]$$

$$+ A^{*i}_{h_1h_2h_3}(a)\,\xi^{h_1}\xi^{h_2}\xi^{h_3}\left[\frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}A_4^4(a,\xi)\,t^4 + \ldots + \frac{1}{k!}A_k^4(a,\xi)\,t^k + \ldots\right]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$+ A^{*i}_{h_1h_2\ldots h_{k-1}}(a)\,\xi^{h_1}\xi^{h_2}\ldots\xi^{h_{k-1}}\left[\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} + \frac{1}{k!}A_k^k(a,\xi)\,t^k + \ldots\right], \quad (57)$$

unde $\Gamma^{*i}_{h_1h_2}$, $A^{*i}_{h_1h_2h_3}, \ldots, A^{*i}_{h_1h_2\ldots h_{k-1}}$ sînt simetrice în indicii h. Pentru ca A_n să fie efectiv un spațiu P_n^{n-k} Cagan, trebuie ca în (57) să intre k funcții de t liniar independente, deci trebuie să impunem condițiile

$$A^{*i}_{h_1h_2\ldots h_{k-1}} \neq x^i\rho^*_{h_1h_2\ldots h_{k-1}} + S\,\delta^i_{h_1}\rho_{h_2h_3\ldots h_{k-1}} + S\,\Gamma^{*i}_{h_1h_2}\rho^*_{h_3h_4\ldots h_{k-1}} +$$

$$+ \ldots + S\,A^{*i}_{h_1h_2\ldots h_{k-2}}\rho^*_{h_{k-1}} \quad (58)$$

pentru orice valoare a indicelui i, iar $\rho^*_{h_1 h_2 \dots h_\alpha}$ sînt funcții simetrice în indicii h.

Identificînd coeficienții lui t^2 din (6) și (57), avem

$$\Gamma^i_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k = a^i\,A^1_2(a,\xi) + \xi^i\,A^2_2(a,\xi) + \Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k,$$

deci $A^1_2(a,\xi)$ este o formă pătratică și omogenă în ξ

$$A^1_2(a,\xi) = \psi_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k, \quad \psi_{jk} = \psi_{kj},$$

iar $A^2_2(a,\xi)$ o formă liniară și omogenă în ξ

$$A^2_2(a,\xi) = 2\,\varphi_k(a)\,\xi^k,$$

și prin urmare coeficienții de conexiune ai spațiilor P^{n-k}_n Cagan sînt dați de formulele

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^{*i}_{jk} + x^i\,\psi_{jk} + \delta^i_j\,\varphi_k + \delta^i_k\,\varphi_j, \tag{59}$$

în care φ_k și ψ_{jk} sînt $n + \dfrac{n(n+1)}{2}$ funcții arbitrare. Coeficienții de conexiune Γ^i_{jk} satisfac un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul $k-2$. În formulele (60), termenii A^1_p $(p > 1)$ sînt polinoame omogene în ξ de grad p, termenii A^2_p $(p \geqslant 2)$ sînt polinoame omogene în ξ de grad $p-1$, termenii A^3_p $(p \geqslant 3)$ sînt polinoame omogene în ξ de grad $p-2, \dots$, termenii A^k_p $(p \geqslant k)$ sînt polinoame omogene în ξ de grad $p+1-k$. Identificînd mai departe coeficienții lui $t^3, t^4, \dots, t^{k-1}, t^k$ din (6) și (57), găsim

$$\begin{aligned}
&A^i_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l = a^i A^1_3(a,\xi) + \xi^i A^2_3(a,\xi) + \Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k A^3_3(a,\xi) + A^{*i}_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l,\\
&A^i_{jklh}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l\,\xi^h = a^i\,A^1_4(a,\xi) + \xi^i\,A^2_4(a,\xi) + \Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\,\xi^k A^3_4(a,\xi)\\
&\qquad\vdots \qquad + A^{*i}_{jkl}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l\,A^4_4(a,\xi) + A^{*i}_{jklh}(a)\,\xi^j\,\xi^k\,\xi^l\,\xi^h \qquad (60)\\
&A^i_{h_1 h_2 \dots h_{k-1}}(a)\,\xi^{h_1}\,\xi^{h_2}\dots\xi^{h_{k-1}} = a^i\,A^1_{k-1}(a,\xi) + \xi^i\,A^2_{k-1}(a,\xi) +\\
&\qquad \Gamma^{*i}_{jl}(a)\,\xi^j\,\xi^l\,A^3_{k-1}(a,\xi)\\
&\qquad + \dots + A^{*i}_{h_1 h_2 \dots h_{k-1}}(a)\,\xi^{h_1}\,\xi^{h_2}\dots\xi^{h_{k-1}}\\
&A^i_{h_1 h_2 \dots h_k}(a)\,\xi^{h_1}\,\xi^{h_2}\dots\xi^{h_k} = a^i\,A^1_k(a,\xi) + \xi^i\,A^2_k(a,\xi) + \Gamma^{*i}_{jl}(a)\,\xi^j\,\xi^l\,A^3_k(a,\xi)\\
&\qquad + \dots + A^{*i}_{h_1 h_2 \dots h_{k-1}}(a)\,\xi^{h_1}\,\xi^{h_2}\dots\xi^{h_{k-1}}\,A^k_k(a,\xi).
\end{aligned}$$

Dacă în aceste relații scriem termenii $A^l_p(a,\xi)$ sub formă de polinoame omogene în ξ, ai căror coeficienți sînt funcții de a, putem rezolva primele $k-3$ relații obținute prin identificarea coeficienților lui ξ în raport cu $A^{*i}_{jkl}, A^{*i}_{jklh}, \dots, A^{*i}_{h_1 h_2 \dots h_{k-1}}$ ca funcții liniare de $\Gamma^i_{jk}, A^i_{jkl}, A^i_{jklh}, \dots, A^i_{h_1 h_2 \dots h_{k-1}}$. Ultima relație din (62) ne dă pe $A^i_{h_1 h_2 \dots h_k}$ ca o formă liniară de $x^i, \Gamma^{*i}_{jk}, A^{*i}_{jkl}, \dots, A^{*i}_{h_1 h_2 \dots kk-1}$ și înlocuind pe $A^{*i}_{h_1 h_2 \dots h_\alpha}$ cu valorile găsite, obținem în definitiv pe

$A^i_{h_1 h_2 \dots k_k}$ ca o formă liniară în x^i, Γ^i_{jk}, $A^i_{jkl}, \dots, A^i_{h_1 h_2 \dots h_{k-1}}$ ai căror coeficienți sînt funcții arbitrare de variabilele x^l

$$A^i_{h_1 h_2 \dots h_k} = x^i \omega_{h_1 h_2 \dots h_k} + S\, \delta^i_{h_1} \omega_{h_2 h_3 \dots h_k} + S\, \Gamma^i_{h_1 h_2} \omega_{h_3 h_4 \dots h_k}$$

$$+ \dots + S\, A^i_{h_1 h_2 \dots h_{k-1}} \omega_{h_k}, \quad (\omega_{h_1 h_2 \dots h_k} \neq 0). \tag{61}$$

Deoarece termenul $A^i_{h_1 h_2 \dots h_k}$ cuprinde derivatele de ordinul $k-2$ ale coeficienților de conexiune Γ^i_{jk}, urmează că sistemul (61) este de ordinul $k-2$ și are ca necunoscute funcțiile Γ^i_{jk}, iar funcțiile $\omega_{h_1 h_2 \dots h_\alpha}$ sînt arbitrare. Dacă introducem termenii $A^{*i}_{h_1 h_2 \dots h_\alpha}$ ca funcții de $A^i_{h_1 h_2 \dots h_\beta}$ prin rezolvarea sistemului (60), în condițiile (58), putem scrie

$$A^i_{h_1 h_2 \dots h_{k-1}} = x^i \rho_{h_1 h_2 \dots h_{k-1}} + S\, \delta^i_{h_1} \rho_{h_2 h_3 \dots h_{k-1}} + S\Gamma^i_{h_1 h_2} \rho_{h_3 h_4 \dots h_{k-1}} + \tag{62}$$

$$+ \dots + S A^i_{h_1 h_2 \dots h_{k-2}} \rho_{h_{k-1}}$$

pentru orice valoare a indicelui i, iar funcțiile $\rho_{h_1 h_2 \dots h_\alpha}$ sînt simetrice în indicii h.

Ceilalți termeni $A^1_p(a, \xi)$, $A^2_p(a, \xi), \dots, A^k_p(a, \xi)$, $(p > k)$ din (60) nu mai impun nici o condiție coeficienților de conexiune și se exprimă numai cu ajutorul funcțiilor $\omega_{h_1 h_2 \dots h_\alpha}$ din (61) și al coeficienților polinoamelor $A^1_q(a, \xi)$, $A^2_q(a, \xi), \dots, A^k_q(a, \xi)$ $(q \leqslant k)$ în ξ. Sistemul de ecuații cu derivate parțiale (64) este echivalent cu sistemul de ecuații diferențiale de ordinul k

$$\frac{d^k x^i}{dt^k} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=k-1} \varphi^\alpha_k\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{d^\alpha x^i}{dt^\alpha} \tag{63}$$

și prin derivare în raport cu t deducem

$$\frac{d^p x^i}{dt^p} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=k-1} \varphi^\alpha_p\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{d^\alpha x^i}{dt^\alpha},$$

unde $\varphi^\alpha_p\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ sînt date de formulele de recurență

$$\varphi^0_{p+1} = \varphi^0_k \varphi^{k-1}_p + \frac{d\varphi^0_p}{dt}, \quad \varphi^\alpha_{p+1} = \varphi^\alpha_k \varphi^{k-1}_p + \varphi^{\alpha-1}_p + \frac{d\varphi^\alpha_p}{dt}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k-1).$$

Deoarece putem scrie

$$\frac{d^p x^i}{dt^p} = \varphi^0_p x^i + \varphi^1_p \frac{dx^i}{dt} + \varphi^2_p \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \sum_{\alpha=3}^{\alpha=k-1} \varphi^\alpha_p A^i_{h_1 h_2 \dots h_\alpha} \frac{dx^{h_1}}{dt} \frac{dx^{h_2}}{dt} \dots \frac{dx^{h_\alpha}}{dt},$$

înlocuim pe Γ^i_{jk} cu valorile din (62) și pe $A^i_{h_1 h_2 \dots h_\alpha}$ cu expresiile lor deduse din (60) ca funcții de $\Gamma^{*i}_{h_1 h_2}$, $A^{*i}_{h_1 h_2 h_3}, \dots, A^{*i}_{h_1 h_2 \dots h_\alpha}$, ordonăm după termenii $\Gamma^{*i}_{h_1 h_2}$, $A^{*i}_{h_1 h_2 h_3}, \dots, A^{*i}_{h_1 h_2 \dots h_{k-1}}$ și făcînd $t = 0$ rezultă imediat: $A^1_p(a, \xi)$ este coeficientul lui a^i, $A^2_p(a, \xi)$ coeficientul lui ξ^i, $A^3_p(a, \xi)$ coeficientul lui $\Gamma^{*i}_{jk}(a)\, \xi^j \xi^k$ etc.

În formulele (57) apar numai k funcții de t liniar independente și prin eliminarea lor se obțin ecuațiile varietăților liniare ce conțin curbele autoparalele sub formă de determinanți de ordinul $k+1$ egali cu zero, de forma determinanților obținuți în cazurile tratate $k=2$ și $k=3$.

Sistemul de ecuații diferențiale (66) este de forma (3′) și împreună cu condițiile (65) arată că matricea

$$\left\| \begin{matrix} x^1 & \dots & x^n \\ \dfrac{dx^1}{dt} & \dots & \dfrac{dx^n}{dt} \\ \dfrac{d^2x^1}{dt^2} & \dots & \dfrac{d^2x^n}{dt^2} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{d^kx^1}{dt^k} & \dots & \dfrac{d^kx^n}{dt^k} \end{matrix} \right\|$$

este de rang k și wronschianul funcțiilor $x^i(t)$ de caracteristică k.

Sistemul (61) este verificat de coeficienții de conexiune ai unui spațiu P_n^{n-k+1} Cagan și funcțiile $c_{h_1h_2\dots h_\alpha}$ $(\alpha=1,2,\dots,k)$ din (61) depind de n funcții arbitrare. Dacă spațiul A_n este un spațiu P_n^{n-k+1} Cagan, atunci funcțiile $x^i(t)$ satisfac un sistem de ecuații diferențiale de ordinul $k-1$ de forma (63)

$$\frac{d^{k-1}x^i}{dt^{k-1}} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=k-2} \varphi_{k-1}^{\alpha}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{d^\alpha x^i}{dt^\alpha}, \tag{64}$$

care derivat în raport cu t dă

$$\frac{d^kx^i}{dt^k} = \frac{d\varphi_{k-1}^0}{dt}x^i + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k-2}\left(\varphi_{k-1}^{\alpha-1} + \frac{d\varphi_{k-1}^{\alpha}}{dt}\right)\frac{d^\alpha x^i}{dt^\alpha} + \varphi_{k-1}^{k-2}\frac{d^{k-1}x^i}{dt^{k-1}}.$$

Înmulțind sistemul (64) cu forma $\lambda = \lambda_k \dfrac{dx^k}{dt}$, adunînd cu sistemul precedent și identificînd rezultatul cu sistemul (63) obținem

$$\begin{aligned} \varphi_k^0 &= \frac{d\varphi_{k-1}^0}{dt} + \lambda\varphi_{k-1}^0 \\ \varphi_k^\alpha &= \varphi_{k-1}^{\alpha-1} + \frac{d\varphi_{k-1}^\alpha}{dt} + \lambda\varphi_{k-1}^\alpha \qquad (\alpha=1,2,\dots,k-2), \\ \varphi_k^{k-1} &= \varphi_{k-1}^{k-2} - \lambda \end{aligned} \tag{65}$$

unde λ_k sînt n funcții arbitrare.

Condițiile (62) exprimă că funcțiile $x^i(t)$ nu satisfac un sistem de ecuații diferențiale de ordinul $k-1$ de forma (64). Dacă condiția (62) nu este satisfăcută pentru o valoare particulară a indicelui i, de exemplu $i=1$, atunci spațiul A_n este un spațiu P_n^{n-k+1} Cagan. Acest lucru rezultă imediat; prin ipoteză, funcția

$x^1(t)$ satisface ecuația (64) pentru $i = 1$, care derivată în raport cu t ne dă o ecuație diferențială de ordinul k, de forma (63,) ai cărui coeficienți sînt dați de formulele (65) cu $\lambda = 0$; acești coeficienți sînt valabili pentru orice valoare a indicelui i, căci am presupus că A_n este un spațiu P_n^{n-k} Cagan și funcțiile $x^i(t)$ satisfac un sistem de forma (63). Rezultă atunci că sistemul (63) provine prin derivare în raport cu t a unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul $k-1$ de forma (64), care definește un spațiu P_n^{n-k+1} Cagan.

Sistemul (61) constituie generalizarea formulelor lui Cagan (11) relative la spațiile P_n^{n-2} Cagan. Așadar, avem următoarea teoremă generală relativă la spațiile parțial proiective Cagan:

Condiția necesară și suficientă pentru ca spațiul cu conexiune afină simetrică A_n să fie un spațiu P_n^{n-k} Cagan ($k \leqslant n-1$) în variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$ este ca să fie satisfăcute condițiile (61) *și* (62).

8. Au rămas de examinat spațiile P_n^{n-k} generale; pentru un astfel de spațiu, ecuațiile (6) au forma

$$x^i = a^i + \xi^i\left[t + \frac{1}{2!}A_2^1(a,\xi)\,t^2 + \frac{1}{3!}A_3^1(a,\xi)\,t^3 + \ldots + \frac{1}{(k+1)!}A_{k+1}^1(a,\xi)\,t^{k+1} + \ldots\right]$$

$$+\Gamma_{h_1h_2}^{*i}(a)\,\xi^{h_1}\xi^{h_2}\left[\frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}A_3^2(a,\xi)\,t^3 + \ldots + \frac{1}{(k+1)!}A_{k+1}^2(a,\xi)\,t^{k+1} + \ldots\right]$$

$$+A_{h_1h_2h_3}^{*i}(a)\,\xi^{h_1}\xi^{h_2}\xi^{h_3}\left[\frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}A_4^3(a,\xi)\,t^4 + \ldots + \frac{1}{(k+1)!}A_{k+1}^3(a,\xi)\,t^{k+1} + \ldots\right]$$

$$\vdots$$

$$+A_{h_1h_2\ldots h_k}^{*i}(a)\,\xi^{h_1}\xi^{h_2}\ldots\xi^{h_k}\left[\frac{1}{k!}t^k + \frac{1}{(k+1)!}A_{k+1}^k(a,\xi)\,t^{k+1} + \ldots\right], \tag{66}$$

unde $\Gamma_{h_1h_2}^{*i}$, $A_{h_1h_2h_3}^{*i}, \ldots, A_{h_1h_2\ldots hk}^{*i}$ sînt simetrice în indicii h; termenii $A_p^1(a,\xi)$, $A_p^2(a,\xi), \ldots, A_p^k(a,\xi)$ sînt polinoame omogene de grad $p-1, p-2, \ldots, p-k$ în ξ, ai căror coeficienți sînt funcții de a.

Pentru ca (66) să cuprindă efectiv k funcții de t, liniar independente, trebuie să impunem condiția

$$A_{h_1h_2\ldots h_k}^{*i} \neq S\,\delta_{h_1}^i\,\delta_{h_2h_3\ldots h_k}^{*} + S\,\Gamma_{h_1h_2}^{*i}\,\rho_{h_3h_4\ldots h_k}^{*} + \ldots + S\,A_{h_1h_2\ldots h_{k-1}}^{*i}\,\rho_{h_k}^{*} \tag{67}$$

pentru orice valoare a indicelui i și unde $\rho_{h_1h_2\ldots h_\alpha}^{*}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, k-1$) sînt funcții simetrice în indicii h. Identificînd coeficienții lui t^2 din (6) și (66)

$$\Gamma_{jk}^i(a)\,\xi^j\,\xi^k = \xi^i\,A_2^1(a,\xi) + \Gamma_{jk}^{*i}(a)\,\xi^j\,\xi^k$$

și punînd

$$A_2^1(a,\xi) = 2\,\varphi_k(a)\,\xi^k,$$

obținem formulele care dau coeficienții de conexiune ai spațiilor P_n^{n-k} generale

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^{*i} + \delta_j^i\,\varphi_k + \delta_k^i\,\varphi_j \tag{68}$$

unde φ_k sînt n funcții arbitrare; funcțiile Γ_{jk}^{*i} nu mai sînt arbitrare și satisfac ca și Γ_{jk}^i un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul $k-1$. Pentru a

găsi acest sistem, procedăm la fel ca și în cazurile expuse mai sus; identificăm coeficienții lui $t^3, t^4, \ldots, t^{k+1}$ din formulele (6) și (66)

$$
\begin{aligned}
&A^i_{jkl}(a)\,\xi^j\xi^k\xi^l = \xi^i A^1_3(a,\xi) + \Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\xi^k A^2_3(a,\xi) + A^{*i}_{jke}(a)\,\xi^j\xi^k\xi^l\\
&A^i_{jklh}(a)\,\xi^j\xi^k\xi^l\xi^h = \xi^i A^1_4(a,\xi) + \Gamma^{*i}_{jk}(a)\,\xi^j\xi^k A^2_4(a,\xi) + \qquad (69)\\
&\quad\vdots \qquad\qquad + A^{*i}_{jkl}(a)\,\xi^j\xi^k\xi^l A^3_4(a,\xi) + A^{*i}_{jklh}(a)\,\xi^j\xi^k\xi^l\xi^h\\
&A^i_{h_1h_2\ldots h_{k+1}}(a)\,\xi^{h_1}\xi^{h_2}\ldots\xi^{h_{k+1}} = \xi^i A^1_{k+1}(a,\xi) + \Gamma^{*i}_{jl}(a)\,\xi^j\xi^l A^2_{k+1}(a,\xi) +\\
&+ A^{*i}_{jhl}(a)\,\xi^j\xi^h\xi^l A^3_{k+1}(a,\xi) + \ldots + A^{*i}_{h_1h_2\ldots h_k}(a)\,\xi^{h_1}\xi^{h_2}\ldots\xi^{h_k} A^k_{k+1}(a,\xi).
\end{aligned}
$$

În primele $k-2$ relații scriem termenii $A^l_p(a,\xi)$, $(l<p\leqslant k)$ sub formă de polinoame omogene în ξ; în relațiile obținute, înlocuim pe Γ^{*i}_{jk} cu expresiile deduse din formulele (71); rezolvăm acest sistem în raport cu $A^{*i}_{jkl}, A^{*i}_{jklh}, \ldots, A^{*i}_{h_1h_2\ldots h_k}$ și obținem expresii liniare în $\Gamma^i_{jk}, A^i_{jkl}, \ldots, A^i_{h_1h_2\ldots h_k}$; aceste valori le introducem în ultima relație (72) și obținem pe $A^i_{h_1h_2\ldots h_{k+1}}$ ca o funcție liniară de $\Gamma^i_{jk}, A^i_{jkl}, \ldots, A^i_{h_1h_2\ldots h_k}$ de forma

$$
\begin{aligned}
A^i_{h_1h_2\ldots h_{k+1}} &= S\,\delta^i_{h_1}\omega_{h_2h_3\ldots h_{k+1}} + S\,\Gamma^i_{h_1h_2}\omega_{h_3h_4\ldots h_{k+1}} +\\
&+ SA^i_{h_1h_2h_3}\omega_{h_4h_5\ldots h_{k+1}} + \ldots + SA^i_{h_1h_2\ldots h_k}\omega_{h_{k+1}},
\end{aligned}
\qquad (70)
$$

unde $\omega_{h_1h_2\ldots h_\alpha}$ $(\alpha=1,2,\ldots,k)$ sînt funcții simetrice în indicii h. Deoarece în $A^i_{h_1h_2\ldots h_{k+1}}$ intră derivatele parțiale de ordinul $k-1$ ale coeficienților de conexiune Γ^i_{jk}, urmează că (73) constituie sistemul de ecuații cu derivate parțiale de ordinul $k-1$ pe care îl satisfac coeficienții de conexiune ai spațiului P^{n-k}_n general în care $\omega_{h_1h_2\ldots h_\alpha}$ $(\alpha=1,2,\ldots,k)$ sînt funcții arbitrare. Dacă introducem termenii $A^{*i}_{h_1h_2\ldots h_\alpha}$ ca funcții de $A^i_{h_1h_2\ldots h_\beta}$ în condițiile (67), putem scrie

$$
\begin{aligned}
A^i_{h_1h_2\ldots h_k} &= S\,\delta^i_{h_1}\rho_{h_2h_3\ldots h_k} + S\,\Gamma^i_{h_1h_2}\rho_{h_3h_4\ldots h_k} + \ldots\\
&+ S\,A^i_{h_1h_2\ldots h_{k+1}}\rho_{h_k}
\end{aligned}
\qquad (71)
$$

pentru orice valoare a indicelui i și unde $\rho_{h_1h_2\ldots h_\alpha}$ sînt simetrice în indicii h. Ceilalți termeni $A^1_p(a,\xi), A^2_p(a,\xi), \ldots, A^k_p(a,\xi)$, $(p>k+1)$ din (66) nu mai impun nici o condiție suplimentară coeficienților de conexiune și ei se exprimă numai cu ajutorul funcțiilor $\omega_{h_1h_2\ldots h_\alpha}$ din (70) și al coeficienților polinoamelor $A^l_p(a,\xi)$ în ξ $(l<p\leqslant k)$.

Sistemul de ecuații cu derivate parțiale (70) este echivalent cu sistemul de ecuații diferențiale de ordinul $k+1$

$$
\frac{d^{k+1}x^i}{dt^{k+1}} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k}\varphi^\alpha_{k+1}\left(x,\frac{dx}{dt}\right)\frac{d^\alpha x^i}{dt^\alpha}, \qquad (72)
$$

care ne dă prin derivare succesivă în raport cu t

$$
\frac{d^p x^i}{dt^p} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k}\varphi^\alpha_p\left(x,\frac{dx}{dt}\right)\frac{d^\alpha x^i}{dt^\alpha},
$$

unde funcțiile $\varphi_p^\alpha\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ sînt legate prin relațiile de recurență

$$\varphi_{p+1}^1 = \varphi_{k+1}^1 \varphi_p^k + \frac{d\varphi_p^1}{dt},$$

$$\varphi_{p+1}^\alpha = \varphi_{k+1}^\alpha \varphi_p^k + \varphi_p^{\alpha-1} + \frac{d\varphi_p^\alpha}{dt}, \ (\alpha = 2, 3, \ldots, k).$$

Putem încă scrie

$$\frac{d^p x^i}{dt^p} = \varphi_p^1 \frac{dx^i}{dt} + \varphi_p^2 \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + \sum_{\alpha=3}^{\alpha=k} \varphi_p^\alpha A^i_{h_1 h_2 \ldots h_\alpha} \frac{dx^{h_1}}{dt}\frac{dx^{h_2}}{dt}\cdots\frac{dx^{h_\alpha}}{dt}$$

și înlocuim pe Γ_{jk}^i cu expresiile din (71) iar pe $A^i_{h_1 h_2 \ldots h_\alpha}$ cu expresiile ce se obțin din (72) ca funcții de $\Gamma^{*i}_{h_1 h_2}, A^{*i}_{h_1 h_2 h_3}, \ldots, A^{*i}_{h_1 h_2 \ldots h_\alpha}$, apoi ordonăm după $\frac{dx^i}{dt}$, $\Gamma^{*i}_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}, \ldots, A^{*i}_{h_1 h_2 \ldots h_k}\frac{dx^{h_1}}{dt}\frac{dx^{h_2}}{dt}\cdots\frac{dx^{h_k}}{dt}$, ai căror coeficienți sînt $A_p^1\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, $A_p^2\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \ldots, A_p^k\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$.

În relațiile (66) apar numai k funcții de t liniar independente pe care eliminîndu-le obținem ecuațiile varietăților liniare ce conțin curbele autoparalele ale spațiului A_n sub formă de determinanți de ordinul $k+1$ egali cu zero, de forma determinanților scrișî efectiv pentru cazurile spațiilor P_n^{n-2} și P_n^{n-3} generale.

Se mai constată că sistemul (72) este de forma (4') și arată împreună cu condițiile (74) că matricea

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dx^1}{dt} & \cdots\cdots & \frac{dx^n}{dt} \\ \frac{d^2x^1}{dt^2} & \cdots\cdots & \frac{d^2x^n}{dt^2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{k+1}x^1}{dt^{k+1}} & \cdots\cdots & \frac{d^{k+1}x^n}{dt^{k+1}} \end{matrix} \right\|$$

este de rang k, iar wronschianul funcțiilor $\frac{dx^i}{dt}$ de caracteristică k.

Urmînd același procedeu ca în cazul spațiilor P_n^{n-k} Cagan, se poate arăta că sistemul (70), ce constituie o generalizare a formulelor lui Weyl (8) este verificat de coeficienții de conexiune ai unui spațiu P_n^{n-k+1} general, pentru care coeficienții $a_{h_1, h_2, \ldots h_\alpha}$ din (71) depind de n funcții arbitrare. Condițiile (74) exprimă că $x^i(t)$ nu satisfac un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul k de forma (72); de asemenea, la fel ca în cazul spațiilor P_n^{n-k} Cagan, rezultă că dacă este satisfăcut sistemul (70), însă pentru o valoare particulară a

indicelui i, condiția (71) nu este satisfăcută, atunci spațiul P_n^{n-k} este un spațiu P_n^{n-k+1} general. Aceste considerații permit să enunțăm următoarea teoremă generală:

Condiția necesară și suficientă pentru ca spațiul cu conexiune afină simetrică A_n să fie un spațiu P_n^{n-k} general în variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$ este ca să fie [illegible] toate condițiile (70) și (71).

ЧАСТИЧНО ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе приводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство с симметричной аффиной связностью A_n было проективным пространством P_n^{n-k}, то есть пространством, для которого автопараллельные кривые расположены в известной системе координат на $n-k$ линейных многообразиях. Пространства P_n^{n-k} разделяются на два класса: пространства, для которых линейные многообразия автопараллельных кривых проходят через неподвижную точку, являются пространствами P_n^{n-k} Кагана, пространства же, для которых линейные многообразия автопараллельных кривых являются произвольными, суть общие пространства P_n^{n-k}. Метод определения пространств P_n^{n-k} состоит в том, чтобы представить общий интеграл системы (I), определяющей автопараллельные кривые пространства A_n, общий интеграл которого дан формулами (6) в виде (3) или (4).

Для евклидово-проективных пространств формулы (6) записываются в виде (7) и дают формулы Вейля

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j,$$

где φ_k суть n произвольные функции. Евклидово-проективные пространства суть общие пространства P_n^{n-1}.

Для случая пространства P_n^{n-2} формулы (6) могут иметь два вида, причем существуют два класса пространств P^{n-2}; для пространств P_n^{n-2} Кагана формулы (6) имеют (10) и дают для коэффициентов связности выражения

$$\Gamma^i_{jk} = x^i \psi_{jk} + \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j, \quad \psi_{jk} = \psi_{kj},$$

являющиеся формулами Кагана, в которых φ_k и ψ_{jk} суть произвольные функции.

Если A_n есть общее пространство P_n^{n-2}, автопараллельные кривые имеют параметрическое представление (15); отождествляя коэффициенты t^3 из (6) и (15) для коэффициентов связности, получают систему уравнений с частными производными

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} + 2\Gamma^i_{sj}\Gamma^s_{kl} + 2\Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{lj} + 2\Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk} = \\ = \delta^i_j \omega_{kl} + \delta^i_k \omega_{lj} + \delta^i_l \omega_{jk} + \omega_j \Gamma^i_{kl} + \omega_k \Gamma^i_{lj} + \omega_l \Gamma^i_{jk}, \tag{1}$$

где ω_k и ω_{jk} суть произвольные функции; эта система была получена профессором Г. Врэнчану [8]. Для того, чтобы A было действительно общим пространством P^{n-2}, необходимо чтобы коэффициенты связности удовлетворяли условиям (27). Система (1) остается инвариантной, при проективном преобразовании связности вида (17) и относительно этого преобразования система (1) имеет инварианты

$$I_{jk} = \omega_{jk} - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j}\right) - \frac{1}{3}\omega_s \Gamma^s_{jk} + \frac{2}{9}\omega_j \omega_k.$$

Инварианты I_{jk} равны для случая, когда автопараллельные кривые суть параболы и обратно. Другие инварианты даны формулами (31), (32) (33), (34) и (34′).

Рассматриваются пространства P_n^{n-3} Кагана; автопараллельные кривые определены уравнениями (35), из которых следует для коэффициентов связности система уравнений с частными производными первого порядка

$$S\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + 2S\,\Gamma^i_{sj}\,\Gamma^s_{kl} = x^i\,\omega_{jkl} + S\delta^i_j\,\omega_{kl} + S\omega_j\,\Gamma^i_{kl}\ (\omega_{jkl} \neq 0)$$

с условиями

$$\Gamma^i_{jk} = x^i\,\psi_{jk} + \delta^i_j\,\varphi_k + \delta^i_k\,\varphi_j,\ \psi_{jk} = \psi_{kj}\,.$$

Для общих пространств P_n^{n-3} формулы (6) принимают вид (47) и коэффициенты связности удовлетворяют системе уравнений с частными производными второго порядка вида (52) с условиями (54).

Далее рассматривается общий случай для пространств P_n^{n-k} Кагана; коэффициенты связности удовлетворяют системе уравнений с частными производными (61) порядка $k-2$ с условиями (62), а для общих пространств P_n^{n-k} получается система (70) порядка $k-1$ с условиями (71).

ESPACES PARTIELLEMENT PROJECTIFS

(RÉSUMÉ)

Cet ouvrage indique les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace à connexion affine symétrique A_n soit un espace partiellement projectif P_n^{n-k}, c'est-à-dire un espace pour lequel les courbes autoparallèles sont situées, dans un certain système de coordonnées, en $n-k$ variétés linéaires. Les espaces P_n^{n-k} se divisent en deux classes: les espaces pour lesquels les variétés linéaires des courbes autoparallèles passent par un point fixe sont des espaces P_n^{n-k} Cagan, tandis que ceux pour lesquels les variétés linéaires des courbes autoparallèles sont arbitraires, sont des espaces P_n^{n-k} généraux. La méthode de détermination des espaces P_n^{n-k} consiste à mettre sous l'une des formes (3) ou (4) l'intégrale générale du système (1) qui définit les courbes autoparallèles de l'espaces A_n, dont l'intégrale générale est donnée par les formules (6). Pour

les espaces euclidiens projectifs, les formules (6) s'écrivent sous la forme (7), qui donne les formules de Weyl:

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j$$

dans lesquelles φ_k sont n fonctions arbitraires. Les espaces euclidiens projectifs sont des espaces P_n^{n-1} généraux.

Dans le cas d'un espaces P_n^{n-2}, les formules (6) peuvent revêtir deux formes et il existe deux classes d'espaces P_n^{n-2}; pour les espaces P_n^{n-2} Cagan, les formules (6) prennent la forme (10) et donnent, pour les coefficients de connexion, les expressions

$$\Gamma^i_{jk} = x^i \psi_{jk} + \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j, \qquad \psi_{jk} = \psi_{kj}$$

qui constituent les formules de Cagan, dans lequelles φ_k et ψ_{jk} sont des fonctions arbitraires.

Lorsque A_n est un espace P_n^{n-2} général, les courbes antiparallèles ont la représentation paramétrique (15); l'identification des coefficients de t^3 dans (6) et (15) donne, pour les coefficients de connexion, le système d'équations à dérivées partielles

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} + 2\Gamma^i_{sj}\Gamma^s_{kl} + 2\Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{lj} + 2\Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk} =$$

$$= \delta^i_j \omega_{kl} + \delta^i_k \omega_{lj} + \delta^i_l \omega_{jk} + \omega_j \Gamma^i_{kl} + \omega_k \Gamma^i_{lj} + \omega_l \Gamma^i_{jk} \qquad (1)$$

où ω_k et ω_{jk} sont des fonctions arbitraires; ce système a été établi par G. Vrănceanu [8]. Pour que A_n soit effectivement un espace P_n^{n-2} général, il est nécessaire d'imposer aux coefficients de connexion les conditions (27). Le système (1) demeure invariant lorsque l'on effectue une transformation projective de connexion de la forme (17) et, par rapport à cette transformation, le système (1) a les invariants

$$I_{jk} = \omega_{jk} - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j}\right) - \frac{1}{3}\omega_s \Gamma^s_{jk} + \frac{2}{9}\omega_j \omega_k .$$

Les invariants I_{jk} sont nuls dans le cas où les courbes autoparallèles sont des paraboles et réciproquement. D'autres invariants sont donnés par les formules (31), (32), (33), (34) et (34′).

L'Auteur considère les espaces P_n^{n-k} Cagan; les courbes autoparallèles sont définies par les équations (35) et il en résulte, pour les coefficients de connexion, le système d'équations à dérivées partielles du premier ordre

$$S\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + 2S\Gamma^i_{sj}\Gamma^s_{kl} = x^i \omega_{jkl} + S\delta^i_j \omega_{kl} + S\omega_j \Gamma^i_{kl} \quad (\omega_{jkl} \neq 0)$$

avec ces conditions:

$$\Gamma^i_{jk} \neq x^i \psi_{jk} + \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j, \quad \psi_{jk} = \psi_{kj} .$$

Pour les espaces P_n^{n-3} généraux, les formules (6) ont la forme (47) et les coefficients de connexion satisfont à un système d'équations à dérivées partielles du second ordre de la forme (52), satisfaisant aux conditions (54).

L'Auteur passe ensuite au cas général; pour les espaces P_n^{n-k} Cagan, les coefficients de connexion satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles (61) de l'ordre $k-2$, dans les conditions (62), tandis que pour les espaces P_n^{n-k} généraux, on obtient le système (70) de l'ordre $k-1$, dans les conditions (71).

BIBLIOGRAFIE

1. B. Cagan, *Sur les espaces sous-projectifs*. C. R. Acad. Sci., Paris, 1930, t, 191, p. 548.
2. — *Über eine Erweiterung des Begriffes vom projektiven Raume und dem zugehörigen Absolut*. Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor und Tensoranalysis, Moskau, 1933, vol. 1, p. 12.
3. P. Raşevschi, *Sur les espaces sous-projectifs*. C. R. Acad. Sci., Paris, 1930, t. 191, p. 547.
4. — *Caractères tensoriels de l'espace sous-projectif*. Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor und Tensoranalysis, Moskau, 1933, vol. 1, p. 126.
5. H. Şapiro, *Sur les espaces sous-projectif*. C. R. Acad. Sci., Paris, 1930, t. 191, p. 551.
6. — *Über die Metrik der subprojektiven Räume*. Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor und Tensoranalysis, Moskau, 1933, vol. 1, p. 102.
7. J. A. Schouten, *Ricci-Calculus*. Berlin, 1954, vol. II, p. 317.
8. G. Vrănceanu, *Sur les espaces partiellement projectifs*. Bull. Math. Soc. Roum. Sci., 1947, t. 48, p. 43.
9. — *Lecţii de Geometrie diferenţială*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1951, vol. II, cap. I, p. 5.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

CÎTEVA APLICAŢII ALE PRINCIPIULUI METRICII HIPERBOLICE*)

DE

CORNELIU CONSTANTINESCU

1. Fie D_z un domeniu a cărui frontieră conţine cel puţin trei puncte. Cu ajutorul teoremelor de reprezentare conformă putem asocia lui D o metrică hiperbolică $d\sigma_z$, transportînd metrica $d\sigma_z = \dfrac{|dt|}{1-|t|^2}$ introdusă de Poincaré în cercul $|t|<1$, [1].

Fie $w = w(z)$ o funcţie meromorfă şi uniformă în D_z, luînd valori într-un domeniu D_w, a cărui frontieră conţine cel puţin trei puncte şi z_1, z_2 două puncte în D_z, iar $w_1 = w(z_1)$, $w_2 = w(z_2)$ imaginile lor în D_w. Principiul metricei hiperbolice constă în inegalitatea $d'(w_1, w_2) \leqslant d(z_1, z_2)$, unde $d(z_1, z_2)$, $d'(w_1, w_2)$ înseamnă respectiv distanţele între punctele z_1, z_2 şi w_1, w_2 în metricele domeniilor D_z şi D_w. Dacă luăm $z_1 = z$, $z_2 = z + dz$, $d(z, z+dz) = d\sigma_z$, $d'(w, w+dw) = d\sigma_w$ inegalitatea devine $d\sigma_w \leqslant d\sigma_z$ ceea ce constituie enunţul diferenţial al acestui principiu.

Principiul metricei hiperbolice se dovedeşte a fi foarte fecund, cu ajutorul lui putîndu-se obţine demonstraţii mai simple pentru unele teoreme clasice şi eventual chiar îmbunătăţiri ale lor. De asemenea, el poate fi folosit pentru studiul unor probleme care par a scăpa altor metode de cercetare.

În cele ce urmează vom da o demonstraţie simplă a teoremei mari a lui Picard, vom reobţine teorema lui Julia şi o teoremă din cercul celor găsite de H. Milloux, vom da o generalizare a teoremei lui Koebe de deformare şi ne vom ocupa apoi de teoremele lui Landau şi Schotki. În sfîrşit, vom extinde principiul metricei hiperbolice la frontierele domeniilor şi vom utiliza această extensiune la studiul funcţiilor meromorfe în semiplanul superior, precum şi la studiul unor singularităţi neizolate de un tip special. Unitatea lucrării este dată de metoda folosită şi nu de materialul cercetat.

2. Fie $0 < |z| < R$ domeniul D_z. Funcţia $w = \log\dfrac{R}{z}$ face reprezentarea conformă şi biunivocă a suprafeţei universale de acoperire a domeniului D_z pe semiplanul $u = \mathcal{R}(w) > 0$ al planului (w). Vom avea, din definiţia metricei hiperbolice,

$$d\sigma_z = d\sigma_w = \frac{|dw|}{2u} = \frac{|dz|}{2|z|\log\dfrac{R}{|z|}},$$

*) Lucrare prezentată Institutului de matematică în şedinţa din 24 mai 1955.

Lungimea cercului $|z| = r$ în această metrică va fi

$$l(r) = \int_{|z|=r} d\sigma_z = \int_0^{2\pi} \frac{rd\theta}{2r \log \frac{R}{r}} = \frac{\pi}{\log \frac{R}{r}}$$

și se constată imediat că $\lim_{r \to 0} l(r) = 0$. Acest fapt are drept consecință teorema mare a lui Picard.

Fie $f(z)$ o funcție meromorfă și uniformă în vecinătatea punctului $z = 0$, în care are o singularitate esențială. Să presupunem că $f(z)$ ar omite într-o vecinătate $0 < |z| < R$ a acestui punct trei valori. Putem presupune, fără nici o micșorare a generalității, că $w = \infty$ este o valoare omisă și, prin urmare, că $f(z)$ este olomorfă în vecinătatea lui $z = 0$. Fie $M(r) = \max |f(z)|$ pentru $|z| = r$, unde $M(r)$ este o funcție crescătoare tinzînd către infinit, cînd r tinde la zero. Fie z_n un șir de puncte tinzînd către zero și z_n' acele puncte pentru care $|z_n'| = |z_n|$ și $|f(z_n')| = M(|z_n|)$. Să aplicăm principiul metricei hiperbolice funcției $w = f(z)$ care ia în domeniul D_z $(0 < |z| < R)$ valori din $D(a, b, \infty)$ unde a, b și ∞ sînt valorile omise de $f(z)$ în D_z, iar $D(a, b, c)$ este domeniul obținut prin eliminarea punctelor a, b, c din planul complex

$$d'[f(z_n), f(z_n')] \leqslant d(z_n, z_n') \leqslant l(|z_n|).$$

Cum $\lim_{n \to \infty} l(|z_n|) = 0$, rezultă

$$\lim_{n \to \infty} d'[f(z_n), f(z_n')] = 0$$

și prin urmare

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = \lim_{n \to \infty} f(z_n') = \infty$$

Șirul z_n fiind arbitrar, rezultă că $z = 0$ este un pol, contrar ipotezei că ar fi singularitate esențială.

3. Vom studia mai de aproape metrica hiperbolică asociată unui domeniu obținut prin excluderea a trei puncte din planul complex. Întrucît această metrică se introduce cu ajutorul funcției modulare, ne propunem s-o studiem mai amănunțit. Fie $w = \mu(z)$ funcția modulară, adică funcția care reprezintă conform triunghiul $x = 0$, $y > 0$; $x = 1$, $y > 0$; $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $y > 0$; pe semiplanul $v = \mathcal{J}(w) > 0$, așa fel că vîrfurile triunghiului 0, 1, ∞ trec respectiv în punctele 0, 1, ∞. Vom nota cu $\lambda(w)$ inversa funcției modulare, care face reprezentarea conformă a suprafeței universale de acoperire a domeniului $D(0, 1, \infty)$ pe semiplanul $y > 0$.

Funcția $\zeta = -e^{-\frac{\pi i}{z}}$ este olomorfă în acest semiplan și transformă semidreapta $x = 0$, $y > 0$ în segmentul $(-1, 0)$ din planul (ζ), iar semicercul $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $y > 0$ în segmentul $(0, +1)$. Funcția $\zeta(w) = -e^{-\frac{\pi i}{\lambda(w)}}$, unde pentru $\lambda(w)$ luăm ramura care transformă semiplanul $v > 0$ în triunghiul de mai sus, este continuă pe axa reală $-\infty < u = \mathcal{R}(w) < +1$, pe care o transformă în segmentul $(-1, +1)$, punctului $w = 0$ corespunzîndu-i

punctul $\zeta = 0$. În virtutea principiului simetriei, ea este olomorfă în $w = 0$. Se poate observa cu ușurință că $\zeta(w)$ nu se anulează în domeniul complementar segmentului $(+1, +\infty)$ de pe axa reală în afară de punctul $w = 0$ și ca atare avem

$$-e^{-\frac{\pi i}{\lambda(w)}} = wH_0(w),$$

unde $H_0(w)$ este olomorfă și diferită de zero. De aici

$$\lambda(w) = \frac{-\pi i}{\log w + H(w)}, \tag{1}$$

unde $H(w)$ este o funcție olomorfă. Cu ajutorul acestei expresii să stabilim metrica domeniului $D(0, 1, \infty)$. Vom avea

$$d\sigma_w = d\sigma_z = |\frac{|dz|}{2y} = \frac{|\lambda'(w)|\ |dw|}{2\,\mathcal{J}[\lambda(w)]} \tag{2}$$

Din (1) obținem

$$|\lambda'(w)| = \left|\frac{-\pi i\left[\frac{1}{w} + H'(w)\right]}{[\log w + H(w)]^2}\right| = \frac{\pi\,|1 + w\,H'(w)|}{|w|\ |\log w + H(w)|^2},$$

$$\lambda(w) = \frac{-\pi i}{\log|w| + \mathcal{R}[H(w)] + i\{\arg w + \mathcal{J}[H(w)]\}} =$$

$$= \frac{-\pi i\{\log|w| + \mathcal{R}[H(w)\} - \pi \arg w - \pi\,\mathcal{J}[H(w)]}{|\log w + H(w)|^2}$$

$$\mathcal{J}[\lambda(w)] = \frac{-\pi\{\log|w| + \mathcal{R}[H(w)]\}}{|\log w + H(w)|^2}.$$

Introducînd expresiile lui $|\lambda'(w)|$ și $\mathcal{J}[\lambda(w)]$ în (2) obținem

$$d\sigma_w = \frac{|1 + w\,H'(w)|\ |dw|}{2|w|\left\{\log\frac{1}{|w|} - \mathcal{R}[H(w)]\right\}}$$

$$d\sigma_w = \frac{K(w)\,|dw|}{2|w|\ \log\frac{1}{|w|}} \tag{3}$$

cu

$$K(w) = \frac{|1 + wH'(w)|}{1 - \frac{\mathcal{R}[H(w)]}{\log\frac{1}{|w|}}}$$

și deci

$$\lim_{w\to 0} K(w) = 1.$$

Pentru a trece de la domeniul $D(0, 1, \infty)$ la domeniul $D(a, b, \infty)$ vom face transformarea $w = \dfrac{b-a}{z-a}$. Relația (3) va deveni

$$d\sigma_z = \frac{K\left(\dfrac{b-a}{z-a}\right) \dfrac{|b-a|}{|z-a|^2} |dz|}{2\left|\dfrac{b-a}{z-a}\right| \log\left|\dfrac{z-a}{b-a}\right|}, \tag{4}$$

$$d\sigma_z = \frac{K\left(\dfrac{b-a}{z-a}\right)}{\left|\dfrac{z-a}{z}\right| \log\left|\dfrac{z-a}{b-a}\right|} \frac{|dz|}{2|z| \log|z|}. \tag{5}$$
$$\log|z|$$

Este interesant pentru cele ce vor urma, să considerăm în relația (5) punctele a și b ca puncte mobile.

În cazul cînd ele ar coincide sau unul din ele ar tinde către infinit, domeniul n-ar mai avea trei puncte frontieră, iar metrica lui ar deveni indentic nulă; de aceea trebuie să restrîngem această mobilitate în așa fel, încît punctele a, b și ∞ să păstreze o distanță mutuală mai mare decît un număr pozitiv arbitrar dar fix. Pentru simplificarea limbajului vom introduce noțiunea de dispersiune.

Definiție. *Fie a, b, c trei puncte pe sfera de diametru 1 tangentă în originea planului complex. Vom numi dispersiunea acestui sistem de trei puncte cantitatea $\varepsilon(a, b, c) = min\{\rho(a, b), \rho(b, c), \rho(c, a)\}$, unde $\rho(a, b)$ este distanța între punctele a și b măsurată pe sferă. F fiind o mulțime închisă pe sferă vom numi dispersiunea acestei mulțimi numărul $\varepsilon(F) = sup\ \varepsilon(a, b, c)$, unde a, b, c sînt trei puncte arbitrare din F.*

Cu ajutorul acestei definiții enunțăm

Lema 1. *Fiind date numerele ε și η pozitive și oricît de mici, există numărul $N(\varepsilon, \eta)$, astfel încît pentru orice $|z| \geqslant N(\varepsilon, \eta)$ aparținînd domeniului $D(a, b, \infty)$ cu $\varepsilon(a, b, \infty) \geqslant \varepsilon$ să avem*

$$d\sigma_z \geqslant \frac{(1-\eta)|dz|}{2|z| \log|z|}.$$

Întrucît $\varepsilon(a, b, \infty) \geqslant \varepsilon$, rezultă $\rho(a, \infty) \geqslant \varepsilon$ sau $|a| \leqslant \operatorname{ctg} \varepsilon$. De aici

$$\left|\frac{z-a}{z}\right| \leqslant 1 + \left|\frac{a}{z}\right| \leqslant 1 + \frac{\operatorname{ctg} \varepsilon}{|z|} < 1 + \sigma_1$$

îndată ce $|z| \geqslant \dfrac{\operatorname{ctg} \varepsilon}{\sigma_1} = M_1(\varepsilon, \sigma_1)$.

Din $\rho(a, b) \geqslant \varepsilon$ deducem $|b - a| \geqslant 2 \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}$ și de aici

$$\frac{\log\left|\frac{z-a}{b-a}\right|}{\log|z|} = 1 + \frac{\log\left|\frac{z-a}{|z|}\right|}{\log z} + \frac{\log\left|\frac{1}{b-a}\right|}{\log|z|} \leqslant$$

$$1 + \frac{\log(1+\sigma_1)}{\log|z|} + \frac{\log\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}}{\log|z|} < 1 + \sigma_2,$$

îndată ce $|z| \geqslant M_2(\varepsilon, \sigma_1, \sigma_2) \geqslant M_1(\varepsilon, \sigma_1)$.

Deoarece $\lim_{w \to 0} K(w) = 1$ rezultă că pentru orice $\sigma_3 > 0$ există un $\mu(\sigma_3)$ astfel încît $K(w) > 1 - \sigma_3$ îndată ce $|w| < \mu(\sigma_3)$. Însă

$$\left|\frac{b-a}{z-a}\right| \leqslant \frac{|b| + |a|}{|z| - |a|} \leqslant \frac{2 \operatorname{ctg} \varepsilon}{|z| - \operatorname{ctg} \varepsilon} < \mu(\sigma_3),$$

pentru $|z| \geqslant M_3(\varepsilon, \sigma_3)$ și deci

$$K\left(\frac{b-a}{z-a}\right) > 1 - \sigma_3.$$

Din aceste inegalități, obținem

$$\frac{K\left(\frac{b-a}{z-a}\right)}{\left|\frac{z-a}{z}\right|^{\frac{\log\left|\frac{z-a}{b-a}\right|}{\log|z|}}} > \frac{1-\sigma_3}{(1+\sigma_2)(1+\sigma_1)},$$

îndată ce $|z| \geqslant \max[M_1(\varepsilon, \sigma_1), M_2(\varepsilon, \sigma_1, \sigma_2), M_3(\varepsilon, \sigma_3)]$. Luînd pe σ_1, σ_2 și σ_3 suficient de mici pentru ca

$$\frac{1-\sigma_3}{(1+\sigma_2)(1+\sigma_1)} \geqslant 1 - \eta$$

și folosind relația (5) obținem enunțul lemei.

4. Ne propunem acum să dăm o nouă demonstrație următoarei teoreme a lui Julia.

Fie $f(z)$ o funcție olomorfă în $R < |z| < \infty$ avînd în $z = \infty$ o singularitate esențială și fie λ_0 o curbă definită prin ecuația $\theta = \theta(r)$ pentru $R < r < \infty$ $(z = re^{i\theta})$. Să notăm cu Δ_0 domeniul (eventual mulțimea deschisă dacă $\theta(r)$ nu este continuă) măturat de cercul $|z - re^{i\theta(r)}| < \sigma r$ cu $\sigma > 0$ și cu Δ_α domeniul obținut prin rotirea domeniului Δ_0 cu unghiul α. Există cel puțin un domeniu Δ_α, astfel încît în el $f(z)$ nu omite mai mult decît o valoare.

Presupunem că teorema n-ar fi adevărată și că, prin urmare, $f(z)$ ar omite în Δ_α punctele a_α și b_α. Să considerăm cercul $|z| = r > R$; cercurile $\gamma_\alpha: |z - re^{i[\theta(r)+\alpha]}| < \sigma r$ formează o acoperire deschisă a acestui cerc și deci,

în virtutea lemei Borel-Lebesgue, putem extrage un număr finit de cercuri $\gamma_{\alpha_1}, \gamma_{\alpha_2} \cdots \gamma_{\alpha_n}$ care formează încă o acoperire.

Fie σ_{α_k} arcul cercului $|z| = r$, situat în γ_{α_k} și $re^{i\theta' k}$, $re^{i\theta'' k}$ extremitățile lui. Considerînd că cercurile $\gamma_{\alpha_{k-1}}, \gamma_{\alpha_k}, \gamma_{\alpha_{k+1}}$ sînt consecutive, vom nota cu σ'_{α_k} arcul închis interior lui σ_{α_k}, ale cărui extremități sînt punctele $re^{i\frac{\theta''_k+1+\theta'_k}{2}}$ și $re^{i\frac{\theta''_k+\theta'_{k+1}}{2}}$ și cu l_k lungimea lui măsurată în metrica hiperbolică a cercului γ_{α_k}. Să observăm că dacă în locul cercului $|z| = r$ considerăm cercul $|z| = r'$ putem repeta aceeași construcție pe el. Aceste două construcții se suprapun printr-o dilatație de raport $\frac{r'}{r}$ și o rotație de unghi $\theta(r') - \theta(r)$. Din această cauză, lungimea arcului σ'_{α_k} situat pe cercul $|z| = r'$ referitor la cercul $\gamma'_{\alpha_k} = |z - r'e^{[i.\theta(r')-\alpha_k]}| < \sigma r'$ va fi tot l_k. Să notăm cu ε cel mai mic dintre numerele $\varepsilon\,(a_{\alpha_k}, b_{\alpha_k}, \infty)$ și cu $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Fie η un număr pozitiv arbitrar și $N(\varepsilon, \eta)$ numărul din lema 1. Întrucît $\lim_{r\to\infty} M(r) = \infty$ putem lua un r suficient de mare astfel ca $M(r) > N(\varepsilon, \eta)$. Cercul $|z| = r$ se va transforma prin $f(z)$ într-o curbă în planul (w), care va fi tangentă la cercul $|w| = M(r)$. Să presupunem că ea va tăia cercul $|w| = N(\varepsilon, \eta)$. Fie z un punct de pe cercul $|z| = r$ pentru care $|f(z)| \Gamma\ N(\varepsilon, \eta)$ iar σ'_{α_k} arcul pentru care $z \in \sigma'_{\alpha_k}$. În virtutea principiului metricei hiperbolice, avem $d\sigma_w \leqslant d\sigma_z$, unde $d\sigma_z$ este metrica cercului γ_{α_k} iar $d\sigma_w$ metrica domeniului $D(a_{\alpha_k}, b_{\alpha_k}, \infty)$. În virtutea lemei 1 avem $d\sigma_w \geqslant \frac{(1-\eta)|dw|}{2|w|\log|w|}$.

Fie Γ acele puncte z de pe cercul $|z| = r$ pentru care $|f(z)| > N(\varepsilon, \eta)$ și Γ' imaginea lui Γ prin $f(z)$. Avem

$$\int_{\Gamma'} \frac{(1-\eta)|dw|}{2|w|\log|w|} \leqslant \int_{\Gamma'} d\sigma_w \leqslant \int_{\Gamma} d\sigma_w \leqslant \int_{|z|=r} d\sigma_z = \Sigma l_k = l.$$

Integrala din stînga inegalității se va micșora dacă înlocuim pe Γ' cu de două ori segmentul $[N(\varepsilon, \eta), M(r)]$ și deci

$$(1-\eta)\log\frac{\log M(r)}{\log N(\varepsilon, \eta)} \leqslant l.$$

Pentru $r \geqslant r_0$ această inegalitate nu va mai putea avea loc și prin urmare imaginile cercurilor $|z| = r \geqslant r_0$ nu vor tăia cercul $|z| = N(\varepsilon, \eta)$, ceea ce contrazice teorema lui Weierstrass referitor la nedeterminarea totală în punctele singulare izolate și teorema este demonstrată.

Metoda utilizată se pretează la generalizare. Vom demonstra:

Teorema 1. *Fie $f(z)$ o funcție olomorfă în $R < |z| < \infty$ avînd în $z = \infty$ o singularitate esențială, $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ și $\rho(r)$ o funcție astfel încît să existe un $\eta > 0$ pentru care $\lim_{r\to\infty} \frac{e^{\frac{2\pi r}{(1-\eta)\rho(r)}}}{\log M(r)} = 0$. Fie Δ_0 domeniul măturat*

de cercul $|z - re^{i\theta(r)}| < \rho(r)$, *unde* $\theta(r)$ *este o funcție arbitrară iar* Δ_α *domeniul obținut prin rotirea lui* Δ_0 *cu unghiul* α. *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există cel puțin un* Δ_α, *astfel încît în el* $f(z)$ *nu omite două valori formînd împreună cu punctul de la infinit un sistem de dispersiune mai mare decît* ε.

Să presupunem că teorema n-ar fi adevărată și că fiecare domeniu Δ_α, $f(z)$ ar omite două valori a_α, b_α așa fel ca $\varepsilon(a_\alpha, b_\alpha, \infty) \geqslant \varepsilon$.

Fie r suficient de mare, astfel încît $M(r) > N(\varepsilon, \eta)$, unde $N(\varepsilon, \eta)$ este numărul definit în lema 1 iar η acel număr pentru care

$$\lim_{r\to\infty} \frac{e^{\frac{2\pi r}{(1-\eta)\rho(r)}}}{\log M(r)} = 0.$$

Fie z_1 și z_2 acele puncte pe cercul $|z| = r$ pentru care $|f(z_1)| = M(r)$, $|f(z_2)| = N(\varepsilon, \eta)$ iar γ cel mai scurt dintre arcele cercului $|z| = r$ care leagă punctele z_1 cu z_2*). Fie $z_0 = re^{i[\theta(r)+\alpha]}$ un punct pe γ, $|f(z_0)| > N(\varepsilon, \eta)$.

În cercul $|z - re^{i[\theta(r)+\alpha]}| < \rho(r)$, $f(z)$ ia valori în domeniul $D(a_\alpha, b_\alpha, \infty)$. În virtutea principiului metricei hiperbolice avem $d\sigma_w \leqslant d\sigma_z$. Însă

$$d\sigma_z = \frac{rd\theta}{\rho(r)}$$

iar

$$d\sigma_w \geqslant \frac{(1-\eta)\,|dw|}{2\,|w|\log|w|}$$

în virtutea lemei 1. Prin urmare

$$\frac{(1-\eta)\,|dw|}{2\,|w|\log|w|} \leqslant \frac{rd\theta}{\rho(r)}.$$

Integrînd inegalitatea pe curba γ, obținem

$$\int_{\gamma'} \frac{(1-\eta)\,|dw|}{2\,|w|\log|w|} \leqslant \int_\gamma \frac{rd\theta}{\rho(r)},$$

unde γ' este imaginea lui γ prin $f(z)$. Cum

$$\int_{\gamma'} \frac{(1-\eta)\,|dw|}{2\,|w|\log|w|} \geqslant \int_{N(\varepsilon,\eta)}^{M(r)} \frac{(1-\eta)\,dt}{2\,t\log t} = \frac{1-\eta}{2}\log\frac{\log M(r)}{\log N(\varepsilon,\eta)}$$

și $\int_\gamma \frac{rd\theta}{\rho(r)} \leqslant \frac{\pi r}{\rho(r)}$ obținem

$$\frac{1-\eta}{2}\log\frac{\log M(r)}{\log N(\varepsilon,\eta)} \leqslant \frac{\pi r}{\rho(r)}$$

sau

$$\frac{1}{\log N(\varepsilon,\eta)} \leqslant \frac{e^{\frac{2\pi r}{(1-\eta)\rho(r)}}}{\log M(r)}.$$

*) Facem ipoteza că există cel puțin un punct z_2; dacă există mai multe astfel de puncte luăm punctul cel mai apropiat de z_1 astfel încît pe γ să avem $|f(z)| > N(\cdot, \eta)$.

Cum termenul al doilea al inegalității tinde către zero, înseamnă că pentru $r \geqslant r_0$ imaginea cercului $|z| = r$ prin $f(z)$ nu intersectează cercul $|w| = N(\varepsilon, \eta)$, ceea ce contrazice teorema lui Weierstrass și teorema este demonstrată.

Pe măsură ce $M(r)$ crește mai rapid, în aceeași măsură ne putem permite să micșorăm pe $\rho(r)$ mai mult. În teorema lui Julia $\rho(r) = \varepsilon r$ satisface condiției

$$\lim_{r\to\infty} \frac{e^{\frac{2\pi r}{(1-\eta)\rho(r)}}}{\log M(r)} = 0,$$

oricare ar fi funcția $f(z)$. Ceva mai mult chiar, dacă luăm

$\rho(r) = \dfrac{2\pi r}{(1-\alpha)\log\log r}$ cu $\alpha > 0$, care tinde la infinit mai încet decît r, condiția de mai sus este încă satisfăcută, oricare ar fi $M(r)$. Într-adevăr,

$$\frac{e^{\frac{2\pi r}{(1-\eta)\rho(r)}}}{\log M(r)} = \frac{e^{\frac{1-\alpha}{1-\eta}\log\log r}}{\log M(r)} \leqslant \frac{(\log r)^{\frac{1-\alpha}{1-\eta}}}{\log r} = \frac{1}{(\log r)^{\frac{\alpha-\eta}{1-\eta}}}$$

și deci pentru $\eta < \alpha$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{e^{\frac{2\pi r}{(1-\eta)\rho(r)}}}{\log M(r)} = 0.$$

Dacă $f(z)$ este de ordin inferior λ, adică dacă

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} = \lambda,$$

putem lua $\rho(r) = \dfrac{2\pi r}{\lambda' \log r}$ cu $\lambda' < \lambda$. Într-adevăr,

$$\frac{e^{\frac{2\pi r}{(1-\eta)\rho(r)}}}{\log M(r)} = \frac{e^{\frac{\lambda'}{1-\eta}\log r}}{\log M(r)} < \frac{r^{\frac{\lambda'}{1-\eta}}}{r^{\lambda-\varepsilon}} = \frac{1}{r^{\lambda-\varepsilon-\frac{\lambda'}{1-\eta}}}$$

care tinde către zero pentru un η suficient de mic.

Dacă funcția $f(z)$ din teoremă ar fi avut o valoare asimptotică finită sau ar fi existat o curbă tinzînd către ∞ pe care $f(z)$ ar fi rămas mărginită, am fi putut înlocui domeniul Δ_0 cu mulțimea $\Delta_0' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$, unde γ_n este cercul $|z - z_n| < \rho_n$ cu z_n un șir de puncte absolut arbitrare, tinzînd către infinit, iar ρ_n un șir de numere pozitive pentru care există un $\eta > 0$, astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{2\pi|z_n|}{(1-\eta)\rho_n}}}{\log M(|z_n|)} = 0.$$

Sub această ultimă formă teorema se poate enunța și pentru singularități neizolate.

Teorema 2. *Fie $f(z)$ o funcție olomorfă și uniformă în domeniul D, care are punctul de la infinit ca punct frontieră și admite în $z=\infty$ o valoare asimptotică finită. Fie γ_n curbe în D care înconjoară punctul $z=\infty$, l_n lungimea lor și $M_n = \max_{z\in\gamma_n} |f(z)|$ cu $\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$. Dacă ρ_n este un șir de numere reale, unde ρ_n este mai mic decît distanța între γ_n și frontiera lui D și dacă există un $\eta > 0$ pentru care*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{l_n}{e^{(1-\eta)\rho_n}}}{\log M_n} = 0,$$

atunci există pentru orice $\varepsilon > 0$ pe fiecare curbă γ_n, cu excepția unui număr finit, de indici n, un punct z_n, astfel încît în cercul $|z - z_n| < \rho_n$, $f(z)$ nu omite două valori care împreună cu punctul infinit să formeze un sistem de dispersiune mai mare decît ε.

Demonstrația este asemănătoare cu cea a teoremei 1. Să presupunem că teorema n-ar fi adevărată și prin urmare, că în cercul $|z - z_{n_k}| < \rho_{n_k}$ funcția $f(z)$ omite două valori care împreună cu punctul de la infinit să formeze un sistem de dispersiune mai mare decît ε, oricare ar fi z_{n_k} pe γ_{n_k}, iar n_k un șir de numere întregi tinzînd către infinit. Întrucît M_n tinde către infinit, ne putem alege un n_k suficient de mare, astfel ca $M_{n_k} \geqslant N = \max[N(\varepsilon, \eta), 2A]$ cu η numărul din enunț iar $N(\varepsilon, \eta)$ numărul din lema 1 iar A valoarea asimptotică. Începînd de la un n suficient de mare, imaginile curbelor γ_n vor intersecta cercul $|w| = N$. Aplicînd principiul metricei hiperbolice obținem, ca în teorema 1, inegalitățile

$$\frac{1-\eta}{2} \frac{|dw|}{|w| \log |w|} \leqslant d\sigma_w \leqslant d\sigma_z = \frac{|dz|}{\rho_{n_k}},$$

care integrate pe acele puncte din γ_{n_k} pentru care $|f(z)| > N$ obținem

$$\frac{1-\eta}{2} \log \frac{\log M_{n_k}}{\log N} \leqslant \frac{l_{n_k}}{2\rho_{n_k}},$$

de unde

$$\frac{1}{\log N} \leqslant \frac{\dfrac{l_{n_k}}{e^{(1-\eta)\rho_{n_k}}}}{\log M_{n_k}},$$

inegalitate absurdă dacă ținem seama de egalitatea

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{l_{n_k}}{e^{(1-\eta)\rho_{n_k}}}}{\log M_{n_k}} = 0.$$

5. Pentru cele ce vor urma va fi util să înlocuim planul complex (z) cu sfera complexă (z) cu ajutorul proiecției stereografice. Vom nota cu ρ distan-

țele pe sferă, iar prin ds vom înțelege elementul de lungime măsurat pe sferă. D fiind un domeniu, $d\sigma$ metrica hiperbolică asociată, vom nota cu $I(z, \complement D) = \frac{d\sigma}{ds}$.

L e m a 2. *Fie D un domeniu a cărui frontieră conține cel puțin trei puncte. Există o funcție $\mu(\varepsilon, \eta)$, astfel încît*

$$I(z, \complement D) > \frac{1-\eta}{2\rho \log \frac{1}{\rho}},$$

unde ρ este distanța punctului z la frontiera lui D îndată ce $\rho < \mu(\varepsilon, \eta)$ și $\varepsilon(\complement D) \geqslant \varepsilon$.

Fie $z_0 \in \mathrm{F_r} D$, astfel încît $\rho(z, z_0) = \rho(z, \mathrm{F_r} D) = \rho$. Întrucît toți termenii lemei sînt invarianți, în raport cu rotațiile sferei, putem presupune, fără a micșora generalitatea, că avem $z_0 = \infty$. Fie a, b, c trei puncte din $\complement D$, pentru care avem $\varepsilon(a, b, c) = \varepsilon(\complement D) \geqslant \varepsilon$. Existența acestor trei puncte este garantată de compactitatea mulțimii $\complement D$. Dacă punctul $z_0 = \infty$ nu se găsește printre aceste puncte, atunci cel puțin două din ele sînt situate la o distanță sferică mai mare sau egală cu $\frac{\varepsilon}{2}$ de $z_0 = \infty$ căci în caz contrar din $\rho(b, \infty) < \frac{\varepsilon}{2}$ și $\rho(c, \infty) < \frac{\varepsilon}{2}$, am deduce $\rho(b, c) < \varepsilon$ contrar ipotezei $\varepsilon(a, b, c) \geqslant \varepsilon$. Să presupunem că a și b sînt punctele pentru care $\rho(a, \infty) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(b, \infty) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ atunci $\varepsilon(a, b, \infty) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Conform lemei 1, îndată ce $|z| \geqslant N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \eta'\right)$

$$d\sigma \geqslant \frac{(1-\eta')|dz|}{2|z| \log |z|}.$$

Avem $ds = \frac{|dz|}{1+|z|^2}$ și $|z| = \operatorname{ctg} \rho$. Prin urmare $I(z, \complement D) = \frac{d\sigma}{ds} \geqslant$

$$\geqslant \frac{(1-\eta')(1+\operatorname{ctg}^2 \rho)}{2 \operatorname{ctg} \rho \log(\operatorname{ctg} \rho)} = \frac{1}{\frac{\sin 2\rho}{2\rho} \cdot \frac{\log(\operatorname{ctg} \rho)}{\log \frac{1}{\rho}}} \cdot \frac{1-\eta'}{2\rho \log \frac{1}{\rho}}$$ îndată ce $\operatorname{ctg} \rho \geqslant$

$$\geqslant N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \eta'\right) \text{ sau } \rho \leqslant \operatorname{arc\,ctg}\, N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \eta'\right).$$

Însă $\frac{\sin 2\rho}{2\rho} < 1$ și $\frac{\log(\operatorname{ctg} \rho)}{\log \frac{1}{\rho}} = 1 + \frac{\log \frac{\rho}{\operatorname{tg} \rho}}{\log \frac{1}{\rho}} < 1$ și prin urmare $I(z, \complement D) >$

$$> \frac{1-\eta}{2\rho \log \frac{1}{\rho}},$$ îndată ce $\rho \leqslant \mu(\varepsilon, \eta) = \operatorname{arc\,ctg}\, N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \eta\right)$.

Cu ajutorul acestei leme vom demonstra

Teorema 3. *Fie $z = f(t)$ o funcție meromorfă în cercul $|t| < 1$, în care omite cel puțin trei valori și astfel încît $f(0) = 0$, $|f'(0)| = 1$. Imaginea cercului $|t| < 1$ în planul (z) conține un cerc cu centrul în $z = 0$ și a cărui rază depinde numai de dispersiunea valorilor omise.*

Fie x_0 cea mai mică soluție a ecuației $\dfrac{1}{4x \log \dfrac{1}{x}} = 1$. Vom demonstra teorema arătînd că $f(t)$ nu omite valori din cercul

$$|z| < \min\left[\operatorname{tg} x_0,\ \operatorname{tg} \mu\left(\varepsilon, \frac{1}{2}\right)\right],$$

unde $\mu(\varepsilon, \eta)$ este funcția din lema 2, iar ε est dispersiunea valorilor omise.

Să presupunem că $f(t)$ ar omite valoarea a cu

$$|a| < \min\left[\operatorname{tg} x_0,\ \operatorname{tg} \mu\left(\varepsilon, \frac{1}{2}\right)\right]$$

și fie F mulțimea valorilor omise. În $|t| < 1$, $f(t)$ ia valori din F și deci putem aplica principiul metricei hiperbolice

$$d\sigma_z \leqslant d\sigma_t,$$

unde $d\sigma_z$ și $d\sigma_t$ sînt metricele hiperbolice ale domeniilor $|t| < 1$ F. Avem $d\sigma_t = |dt|$, iar $d\sigma_z = I(z, F)\, ds_z = I(z, F)\,|dz|$ întrucît în $z = 0$, $ds_z = |dz|$. Inegalitate devine

$$I(0, F) \leqslant \frac{|dt|}{|dz|} = 1.$$

Fie ρ distanța sferică între punctul 0 și mulțimea F. Întrucît $a \in F$ avem $\operatorname{tg} \rho \leqslant |a| < \operatorname{tg} \mu\left(\varepsilon, \dfrac{1}{2}\right)$ sau $\rho < \mu\left(\varepsilon, \dfrac{1}{2}\right)$. În virtutea lemei 2, rezultă

$$I(0, F) > \frac{1}{4\rho \log \dfrac{1}{\rho}}$$

și cum $\operatorname{tg} \rho \leqslant |a| \leqslant \operatorname{tg} x_0$ sau $\rho \leqslant x_0$ rezultă $I(0, F) > \dfrac{1}{4\rho \log \dfrac{1}{\rho}} > 1$, ceea ce ar contrazice inegalitatea de mai sus.

Teorema de mai sus conține ca un caz particular teorema lui Koebe, care afirmă: Imaginea cercului $|t| < 1$, prin funcția $f(t)$ olomorfă și univalentă în cerc cu $f(0) = 0$, $|f'(0)| = 1$ conține cercul $|z| < R = \dfrac{1}{4}$. Într-adevăr,

$f(t)$ fiind olomorfă, omite punctul de la ∞ și deoarece $|f'(0)| = 1$ omite un punct pe cercul $|z| = 1$. Fiind și univalentă mulțimea punctelor omise formează un continuum care conține deci un punct pe cercul $|z| = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$. Considerînd punctul de la infinit și punctele de pe cercurile $|z| = 1$, $|z| = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$ omise, putem observa că dispersiunea lor este mai mare decît $\frac{\pi}{8}$ și prin urmare imaginea cercului $|t| < 1$ prin funcția $f(t)$ conține, în virtutea teoremei 3, un cerc $|z| < R\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Valoarea numerică a razei, care ar rezulta din calculele de mai sus, este însă mult mai mică decît $\frac{1}{4}$, așa încît teorema 3 nu dă rezultate numerice bune.

Pentru a ne simplifica limbajul, vom spune că o mulțime E este acoperită de o funcție $f(t)$ meromorfă în $|t| < 1$ dacă nu există nici o valoare $a \in E$ omisă, adică așa fel încît $f(t) = a$ să nu admită nici o soluție în $|t| < 1$.

Teorema 4. *Fie F_1 și F_2 două mulțimi închise și disjuncte care nu conțin punctul $z = 0$. Orice funcție $f(t)$ meromorfă în $|t| < 1$ cu $f(0) = 0$, $|f'(0)| = 1$, care nu acoperă nici una din mulțimile F_1 și F_2 acoperă un cerc a cărui rază depinde numai de F_1 și F_2.*

Vom folosi notațiile $\rho_{12} = \rho(F_1, F_2)$, $\rho_k = \rho(0, F_k)$, unde prin ρ înțelegem ca de obicei distanțele măsurate pe sferă.

Să considerăm ecuația $\rho = \mu\left[\min(\rho_{12}, \rho_1 - \rho, \rho_2 - \rho), \frac{1}{2}\right]$, $\mu(\varepsilon, \eta)$ fiind funcția introdusă în lema 2 și folosită și în demonstrația teoremei 3. Întrucît μ nu descrește cînd ε crește, iar $\min(\rho_{12}, \rho_1 - \rho, \rho_2 - \rho)$ nu descrește cînd ρ descrește, rezultă că ecuația de mai sus are cu siguranță o rădăcină pozitivă minimă pe care o vom însemna cu ρ_0. Vom arăta că funcția $f(t)$, din enunț, acoperă cercul $|z| < \min(\operatorname{tg}\rho_0, \operatorname{tg} x_0)$ (x_0 este ca și în teorema 3 cea mai mică rădăcină a ecuației $1 = \frac{1}{4x \log \frac{1}{x}}$).

Să presupunem că $f(t)$ n-ar acoperi acest cerc și fie a_0 o valoare omisă din el. Întrucît $f(t)$ nu acoperă mulțimile F_1 și F_2, există punctele a_1 și a_2, $a_1 \in F_1$, $a_2 \in F_2$ neacoperite. Funcția $f(t)$ omite prin urmare valorile a_0, a_1, a_2.

Să calculăm dispersiunea lor: $\rho(a_1\ a_2) \geqslant \rho(F_1, F_2) = \rho_{12}\ \rho(a_0, a_k) \geqslant \geqslant \rho(a_k, 0) - \rho(a_0, 0) \geqslant \rho_k - \rho(a_0, 0)$, deci $\varepsilon(a_0, a_1, a_2) \geqslant \min(\rho_{12}, \rho_1 - \rho_0, \rho_2 - \rho_0)$. Din modul cum l-am definit pe ρ_0 rezultă $\rho \leqslant \mu[\min(\rho_{12}, \rho_1 - \rho_0, \rho_2 - \rho_0), \frac{1}{2}]$, pentru orice $\rho < \rho_0$. În particular, inegalitatea va avea loc pentru $\rho = \rho(a_0, 0) < \rho_0$. Rezultă, în virtutea lemei 2,

$$I[0, (a_0, a_1, a_2)] > \frac{1}{4\rho(a_0, 0) \log \frac{1}{\rho(a_0, 0)}}$$

și deoarece $\rho(a_0, 0) < x_0$

$$I[0, (a_0, a_1, a_2)] > 1.$$

În virtutea principiului metricei hiperbolice aplicat funcției $f(t)$ care omite în $|t| < 1$ valorile a_0, a_1 și a_2, avem

$$I[0, (a_0, a_1, a_2)]\, ds_z = d\sigma_z \leqslant |dt|.$$

Însă $ds_z = |dz|$ pentru $z = 0$ și $\left|\frac{dt}{dz}\right| = \frac{1}{|f'(0)|} = 1$, de unde $I[0, (a_0, a_1, a_2)] \leqslant 1$ ceea ce constituie o contradicție și teorema este demonstrată.

Dacă restrîngem teorema la cazul funcțiilor $f(t)$ olomorfe în $|t| < 1$, putem considera mulțimea F_2 ca reducîndu-se la punctul de la ∞, care nu este niciodată acoperit și obținem următoarea teoremă particulară.

Teorema 4.' *Pentru orice mulțime F închisă și mărginită care nu conține punctul $z = 0$, există un cerc cu centrul în origine, astfel în cît orice funcție $z = f(t) = t + c_2t^2 + \ldots$ acoperă sau mulțimea F sau cercul corespunzător.*

Sub acest enunț teorema conține teoremele 7, 8, 9 și 10 din memoriul lui Bermant [2] și prin intermediul lor o serie de alte teoreme privind acoperirile efectuate de funcțiile $f(t) = t + c_2t^2 + \ldots$ olomorfe în $|t| < 1$, [3], [4].

Asupra problemei domeniului acoperit de aceste funcții precum și de funcțiile meromorfe de același tip vom reveni cu rezultate mult mai precise la punctul 8, unde se va vedea și legătura dintre această problemă și teorema lui Landau, care mărginește raza cercului în care o funcție meromorfă poate omite trei valori.

6. Vom supune dependența funcției $I(z, \complement D)$ de domeniul D unui studiu mai atent. Concluzia finală va fi că $I(z, \complement D)$ este continuă în raport cu $\complement D$ într-un sens ce va fi precizat în cele ce urmează. Ne este utilă o lemă ajutătoare.

Lema 3. *Fie D_1 și D_2 două domenii cu $D_1\, CD_2$ și astfel încît frontiera lui D_2 conține cel puțin trei puncte. Fie z_0 un punct din D_1 și $d_2(z_0)$ distanța între z_0 și frontiera lui D_1 măsurată în metrica lui D_2.* Avem

$$I(z_0, \complement D_1) \leqslant \frac{I(z_0, CD_2)}{\operatorname{th} d_2(z_0)}.$$

Putem presupune, fără nici o micșorare a generalității, că $z_0 = 0$. Să considerăm funcția $f(t)$ care reprezintă conform cercul $|t| < 1$ pe suprafața universală de acoperire a domeniului D_2 cu $f(0) = 0$ și fie F mulțimea punctelor din $|t| < 1$ care se transportă pe frontiera lui D_1. Fie ρ distanța între mulțimea închisă F și origine. Avem $d_2(z_0) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}$ și deci $\operatorname{th} d_2(z_0) = \rho$. În cercul $|t| < \rho$, $f(t)$ ia valori în D_1 și prin urmare putem aplica principiul metricei hiperbolice $d\sigma_1 \leqslant d\sigma_t$. Însă $d\sigma_t = \frac{|dt|}{\rho}$ și $d\sigma_1 = I(0, \complement D_1)\, ds$ și deci inegalitatea devine $I(0, \complement D_1)\, ds \leqslant \frac{|dt|}{\rho}$. Pe de altă parte, însă avem

$d\sigma_2 = I(0, \complement D_2)\, ds = |\, dt\,|$ de unde

$$I(0, \complement D_1) \leqslant \frac{I(0, \complement D_2)}{\rho} = \frac{I(0, \complement D_2)}{\operatorname{th} d_2(0)}\,.$$

Fie F o mulțime închisă conținînd cel puțin trei puncte, altfel arbitrară și D_n componentele complementarei lui F. Vom înțelege prin $I(z, F)$ o funcție egală cu $I(z, \complement D_n)$, pentru $z \in Dn$ și egală cu infinit pentru z situat în F. Cu această definiție se poate vedea ușor că $I(z, F)$ este continuă în sens larg pe întreaga sferă complexă. Pentru ca definiția să fie absolut generală, vom lua $I(0, F) = 0$, dacă F nu conține trei puncte. Cu alte cuvinte, asociem fiecărei mulțimi închise o metrică pe sfera complexă; distanța între două puncte în această metrică se definește ca de obicei.

Lema 4. *Există o funcție* $\rho(\rho_0, \varepsilon, M)$, *așa fel încît pentru orice mulțime închisă* F *situată pe sfera complexă cu* $\varepsilon(F) \geqslant \varepsilon$ *și orice punct* z *cu* $\rho(z, F) \geqslant \rho_0$ *avem* $d_F(A, z) \geqslant M$, *unde* A *este mulțimea punctelor* z *pentru care* $\rho(z, F) \leqslant \rho(\rho_0, \varepsilon, M)$, *iar* $d_F(z, A)$ *este distanța în metrica asociată lui* F *între punctul* z *și mulțimea* A.

Fie μ_0 cel mai mic din numerele ρ_0 și $\mu\left(\varepsilon, \frac{1}{2}\right)$, unde $\mu(\varepsilon, \eta)$ este funcția din lema 2. Prin Γ_μ vom înțelege mulțimea punctelor situate la o distanță sferică egală cu μ de mulțimea F. Fie λ o curbă ce unește mulțimile Γ_μ și Γ_{μ_0} cu $\mu_0 > \mu$. Avem

$$\int_\lambda d\sigma_F = \int_\lambda I(z, F)\, ds > \int_\lambda \frac{1}{4} \frac{ds}{\rho(z, F) \log \dfrac{1}{\rho(z, F)}} \geqslant \frac{1}{4} \int_\mu^{\mu_0} \frac{d\rho}{\rho \log \dfrac{1}{\rho}} =$$

$$= \frac{1}{4} \log \frac{\log \dfrac{1}{\mu}}{\log \dfrac{1}{\mu_0}},$$

întrucît punctele situate pe curba λ satisfac relației $\rho(z, F) < \mu_0 \leqslant \mu\left(\varepsilon, \frac{1}{2}\right)$ și deci în virtutea lemei 2, $I(z, F) \geqslant \dfrac{1}{4\rho(z, F) \log \dfrac{1}{\rho(z, F)}}$. Rezultă deci că distanța în metrica asociată lui F între mulțimile Γ_μ și Γ_{μ_0} este mai mare sau egală cu $\frac{1}{4} \log \dfrac{\log \dfrac{1}{\mu}}{\log \dfrac{1}{\mu_0}}$, Avem

$$d_F(A, \Gamma_{\mu_0}) \geqslant d_F(\Gamma_\mu, \Gamma_{\mu_0}) \geqslant \frac{1}{4} \log \frac{\log \dfrac{1}{\mu}}{\log \dfrac{1}{\mu_0}}\,.$$

întrucît $\mu_0 \leqslant \rho_0$. Dacă luăm $\mu \leqslant \mu_0^{e^{4M}}$ avem $\frac{1}{4} \log \frac{\log \frac{1}{\mu}}{\log \frac{1}{\mu_0}} \geqslant M$ și prin urmare putem lua $\rho(\rho_0, \varepsilon, M) = \mu_0^{e^{4M}}$, unde μ_0 nu depinde decît de ε și ρ_0.

Pentru a demonstra continuitatea lui $I(z, F)$ în raport cu F, la care ne-am referit mai sus, este necesar să introducem cîteva noțiuni din topologie.

Fie E un spațiu metric și A, B două mulțimi închise din E. Prin $d(A, B)$ vom înțelege distanța între aceste mulțimi, adică $d(A, B) = \inf d(a, b)$ cu $a \in A$, $b \in B$, iar prin $\alpha(A, B)$ vom nota abaterea lui A față de B, adică cel mai mic număr α pentru care $A \subseteq U(B, \alpha)$ unde $U(B, \alpha)$ este mulțimea punctelor situate la o distanță mai mică decît α de B. Prin $\bar{\alpha}(A, B)$ vom înțelege abaterea reciprocă a celor două mulțimi, adică cel mai mare dintre numerele $\alpha(A, B)$ și $\alpha(B, A)$. Abaterea reciprocă a două mulțimi, $\bar{\alpha}(A, B)$, satisface axiomele distanței și ca atare poate fi considerată ca o metrică în spațiul mulțimilor închise ale spațiului E.

Teorema 5. *Există o funcție* $\eta(\sigma, \varepsilon, \rho_0)$, *astfel încît* $\bar{\alpha}(F, F') < \eta(\sigma, \varepsilon, \rho_0)$, $\varepsilon(F) \geqslant \varepsilon$ *să implice* $|I(z, F) - I(z, F')| < \sigma$ *pentru punctele* z *pentru care avem* $\rho(z, F) \geqslant \rho_0$.

Vom observa mai întîi că avem $I(z, F) \leqslant \frac{1}{\operatorname{tg} \rho(z, F)}$. Într-adevăr putem presupune, făcînd o rotație care nu modifică termenii inegalității, că $Z = 0$. Să considerăm cercul $\gamma : |z| < \operatorname{tg} \rho(z, F)$, care este scufundat în complementara lui F, $\gamma \subseteq \complement F$ și prin urmare vom avea

$$I(z, F) \leqslant I(z, \complement \gamma) = \frac{1}{\operatorname{tg} \rho(Z, F)}.$$

Vom da o demonstrație constructivă în sensul că vom arăta că avem

$$\eta(\sigma, \varepsilon, \rho_0) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\rho_0}{2}, \rho\left(\frac{\rho_0}{2}, \frac{\varepsilon}{3}, \operatorname{arg\,th} \frac{2}{2 + \sigma \operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2}}\right)\right\},$$

unde $\rho(\rho_0, \varepsilon, M)$ este funcția din lema 4. Într-adevăr, să presupunem că avem $\bar{\alpha}(F, F') < \eta(\sigma, \varepsilon, \rho_0)$. Întrucît $\varepsilon(F) \geqslant \varepsilon$ există trei puncte a, b, c, aparținînd lui F, astfel încît $\varepsilon(a, b, c) \geqslant \varepsilon$. Deoarece $\bar{\alpha}(F, F') \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, rezultă că există punctele a', b' și c' în F, așa fel încît $\rho(a, a')$, $\rho(b, b')$ și $\rho(c, c')$ sînt mai mici decît $\frac{\varepsilon}{3}$, prin urmare $\rho(a', b') \geqslant \rho(a, b) - \rho(a', a) - \rho(b, b') \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}$ și deci $\varepsilon(F') \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Fie a' un punct din F' și a un punct din F pentru care $\rho(a, a') < \bar{\alpha}(F, F')$. Avem

$$\rho(z, a') \geqslant \rho(z, a) - \rho(a, a') \geqslant \rho(z, F) - \bar{\alpha}(F, F')$$

și deci $\rho(z, F') \geqslant \rho(z, F) - \bar{\alpha}(F, F')$.

Întrucît $\bar{\alpha}(F, F') \leqslant \frac{\rho_0}{2}$ în punctele z pentru care $\rho(z, F) \geqslant \rho_0$ vom avea și $\rho(z, F') \geqslant \frac{\rho_0}{2}$.

Fie acum $F'' = F \cup F'$. În virtutea lemei 3

$$I(z, F) \leqslant I(z, F'') \leqslant \frac{I(z, F)}{\operatorname{th} d_F, (z, F'')},$$

$$I(z, F') \leqslant I(z, F'') \leqslant \frac{I(z, F')}{\operatorname{th} d_F, (z, F'')},$$

unde d_F și $d_{F'}$ sînt distanțele, în metricele lui F și F' respectiv. Avem

$$|I(z,F) - I(z,F')| \leqslant |I(z,F'') - I(z,F)| + |I(z,F'') - I(z,F')| \leqslant$$

$$\leqslant I(z,F)\left[\frac{1}{\operatorname{th} d_F(z, F'')} - 1\right] + I(z, F')\left[\frac{1}{\operatorname{th} d_{F'}(z, F'')} - 1\right].$$

Întrucît $\bar{\alpha}(F, F') \leqslant \rho\left(\frac{\rho_0}{2}, \frac{\varepsilon}{3}, \operatorname{arg\,th} \frac{2}{2 + \sigma \operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2}}\right)$, rezultă că toate punctele lui F'' sînt situate la o distanță mai mică decît $\rho\left(\frac{\rho_0}{2}, \frac{\varepsilon}{3}, \operatorname{arg\,th} \frac{2}{2 + \sigma \operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2}}\right)$, atît față de F cît și față de F'. Prin urmare pentru punctele în care $\rho(z, F) \geqslant \rho_0 > \frac{\rho_0}{2}$ și pentru care, în virtutea considerațiilor de mai sus, $\rho(z, F') \geqslant \frac{\rho_0}{2}$ vom avea conform lemei 4

$$d_F(z, F''),\ d_{F'}(z, F'') \geqslant \operatorname{arg\,th} \frac{2}{2 + \sigma \operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2}}$$

$$\operatorname{th} d_F(z, F''),\ \operatorname{th} d_{F'}(z, F'') \geqslant \frac{2}{2 + \sigma \operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2}}$$

$$\frac{1}{\operatorname{th} d_F(z, F'')} - 1,\ \frac{1}{\operatorname{th} d_{F'}(z, F'')} - 1 \leqslant \frac{2 + \sigma \operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2}}{2} - 1 = \sigma \operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2}.$$

Însă

$$I(z, F) \leqslant \frac{1}{\operatorname{tg} \rho_0} < \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2}} \text{ și } I(z, F') \leqslant \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2}},$$

întrucît $\rho(z, F) \geqslant \rho_0$ și $\rho(z, F') \geqslant \frac{\rho_0}{2}$. Prin urmare

$$|I(z, F) - I(z, F')| \leqslant 2 \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2}} \frac{\sigma \operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2}}{2} = \sigma$$

și teorema este demonstrată.

Această teoremă dovedește nu numai continuitatea lui $I(z, F)$ în raport cu F — la schimbări mici ale lui F rezultă schimbări mici pentru $I(z, F)$ — dar chiar un gen de continuitate uniformă pentru toate mulțimile F pentru care $\varepsilon(F) \geqslant \varepsilon$.

7. Funcția $I(z, F)$ este reală și continuă pe produsul cartezian al sferei complexe (z) cu $\mathfrak{F}$, spațiul mulțimilor închise situate pe aceeași sferă.

Fie $\mathfrak{F}_\varepsilon$ acele mulțimi închise din $\mathfrak{F}$ pentru care $\varepsilon(F) \geqslant \varepsilon$. Mulțimea $(z) \times \mathfrak{F}_\varepsilon$ unde semnul $\times$ înseamnă produs cartezian, fiind compactă și funcția $I(z, F)$, fiind continuă pe ea, există un punct z_0 și o mulțime F_0, astfel încît $I(z, F) \geqslant I(z_0, F_0)$ pentru orice z și F cu $\varepsilon(F) \geqslant \varepsilon$. Este evident că $I(z_0, F_0) > 0$, întrucît F_0 conține cel puțin trei puncte. Să notăm $\psi(\varepsilon) = \inf_{\varepsilon(F) \geqslant \varepsilon} I(z, F) = I(z_0, F_0) > 0$.

Această observație simplă nu este altceva decît teorema lui Landau, care afirmă: *Dacă $f(t)$ este o funcție meromorfă în $|t| < R$, $f(0) \neq \infty$, unde omite valorile $a_1, a_2 \ldots a_n$ există o funcție $L[f(o), f'(o), a_1 \ldots a_n]$, astfel încît $R \leqslant L[f(o), |f'(o)|, a_1 \ldots a_n]$.* Vrem să arătăm că L nu depinde de valoarea inițială dacă se înlocuiește derivata obișnuită $\left|\frac{dz}{dt}\right|$ cu derivata sferică $\frac{ds_z}{ds_t}$, care este egală cu $\left|\frac{dz}{dt}\right| \frac{1 + |t|^2}{1 + |z|^2}$ cînd $t \neq \infty$, $z \neq \infty$. Vom numi, așadar, derivata sferică a unei funcții și o vom nota cu $\dot{f}(z)$ limita raportului dintre lungimea arcului imagine și lungimea arcului obiect, cînd ultima tinde către zero. De asemenea, vom arăta că L nu depinde nici de $a_1 \ldots a_n$, ci numai de dispersiunea lor. Aceasta revine de fapt la a spune că putem majora uniform pe L pentru toate sistemele de puncte de dispersiune mai mare decît ε. Vom demonstra cu alte cuvinte,

Teorema 6. *Dacă $f(t)$ este o funcție meromorfă în $|t| < R$, și omite aici valori a căror dispersiune este mai mare sau egală cu ε atunci $R \leqslant \frac{1}{\dot{f}(0) \cdot \psi(\varepsilon)}$, unde $\psi(\varepsilon)$ a fost definit mai sus.*

Într-adevăr, fie F mulțimea valorilor omise ; $\varepsilon(F) \geqslant \varepsilon$. În $|t| < 1$, $f(t)$ ia valori din $[F$, așa încît putem aplica principiul metricii hiperbolice. În virtutea acestui principiu avem $I(0, F)\, ds_z \leqslant I(0, |t| \geqslant R)\, ds_t$. Însă $I(0, |t| \geqslant R) = \frac{1}{R}$ și $I(0, F) \geqslant \psi(\varepsilon)$.

De aici $R \leqslant \frac{1}{\psi(\varepsilon) \cdot \dot{f}(0)}$.

Aceeași observație se poate face și relativ la teorema lui Schotki, care are următorul enunț. *Fie $f(t)$ o funcție olomorfă în cercul $|t| < R$ în care omite valorile $a_1, a_2 \ldots a_n$. $n \geqslant 2$.* Dacă $|f(0)| \leqslant K$ *există o funcție depinzînd numai de* K, 0 *și de valorile omise* $M(K, 0, a_1 \ldots a_n)$, *astfel încît* $|f(t)| \leqslant M(K, 0, a_1 \ldots a_n)$ *în* $|t| \leqslant 0\ R$.

Teorema 7. *Fie $f(t)$ o funcție meromorfă în cercul $|t| < R$, în care omite valori a căror dispersiune este egală sau mai mare decît ε. Dacă distanța sferică între $f(0)$ și valorile omise este mai mare sau egală cu ρ_0, există o funcție depinzînd numai de ρ_0, 0 și ε, $S(\rho_0, 0, \varepsilon)$, astfel încît distanța sferică între $f(t)$ și valorile omise este mai mare decît $S(\rho_0, 0, \varepsilon)$ pentru $|t| < 0\ R$.*

Fie F valorile omise de $f(t)$ în $|t| < R$, $\varepsilon(F) \geqslant \varepsilon$. Să aplicăm principiul metricii hiperbolice funcției $f(t)$, care ia în $|t| < R$ valori din $[F$

$$d_F[f(0), f(t)] \leqslant d(o, t) = \frac{1}{2} \log \frac{R + |t|}{R - |t|} < \frac{1}{2} \log \frac{1 + 0}{1 - 0}.$$

În virtutea lemei 4 în punctele z pentru care avem

$$\rho(z, F) \leqslant \rho\left(\rho_0, \varepsilon, \frac{1}{2} \log \frac{1 + 0}{1 - 0}\right)$$

avem și

$$d_F[f(0), f(t)] \geqslant \frac{1}{2} \log \frac{1 + 0}{1 - 0}$$

de unde rezultă

$$\rho[f(t), F] > \rho\left((\rho_0, \varepsilon, \frac{1}{2} \log \frac{1 + 0}{1 - 0}\right) = S(\rho_0, 0, \varepsilon).$$

8. Ne propunem acum să stabilim caracterele generale ale mulțimii punctelor omise de funcțiile $f(t)$, meromorfe în $|t| < 1$ și normate prin $f(0) = 0$ și $|f'(o)| = 1$, caractere care să nu depindă de funcțiile $f(t)$. În prealabil vom stabili o lemă ajutătoare ;

Lema 5. *Fie a, b, c vîrfurile unui triunghi plan, l și L, respectiv, cea mai mică și cea mai mare latură a acestui triunghi. Avem inegalitatea*

$$I[\infty, (a, b, c,)] \geqslant \min\left\{\frac{BL}{\log \frac{l}{L}}, BL\right\},$$

unde B este o constantă absolută pozitivă.

Să vedem mai întîi cum se transformă $I(\infty, F)$ cînd supunem mulțimea F unei transformări afine $w = \alpha z + \beta$, unde α și β sînt numere complexe finite. Fie F' mulțimea obținută din F prin această transformare. Are loc egalitatea

$$I(\infty, F')\, ds_w = I(\infty, F)\, ds_z,$$

întrucît $d\sigma_z = d\sigma_w$ într-o transformare conformă și biunivocă. Însă

$$\frac{ds_w}{ds_z} = \lim_{z \to \infty} \frac{\operatorname{arc\,ctg} |w|}{\operatorname{arc\,ctg} |z|} = \lim_{z \to \infty} \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{1}{|\alpha|},$$

ceea ce dovedește că $I(\infty, F) = |\alpha|\, I(\infty, F)$.

În particular ototranslațiile lasă funcția $I(\infty, F)$ invariabilă. Așadar, putem translata triunghiul (a, b, c), așa fel încît vîrful în care se întîlnesc laturile

de lungime l și L să fie adus în origine. Fie $0, a'$ și b' vîrfurile noului triunghi

$$l = |b'| \leqslant |a' - b'| \leqslant |a'| = L.$$

Să supunem planul unei inversiuni $\xi = \frac{1}{z}$. Obținem

$$I[\infty, (0, a', b')] = I\left[0, \left(\infty, \frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}\right)\right] \frac{ds_\xi}{ds_z}$$

Însă $\frac{ds_\xi}{ds_z} = 1$, întrucît inversiunea revine la o rotație a sferei. Deci

$$I[\infty, (0, a', b')] = I\left[0, \left(\infty, \frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}\right)\right].$$

Vom folosi relația (4) pe care o transcriem

$$d\sigma_z = \frac{K\left(\frac{b-a}{z-a}\right) \frac{|b-a|}{|z-a|^2} |dz|}{2\left|\frac{b-a}{z-a}\right| \log\left|\frac{z-a}{b-a}\right|} = \frac{K\left(\frac{b-a}{z-a}\right) |dz|}{2|z-a| \log\left|\frac{z-a}{b-a}\right|}.$$

Pentru a obține expresia lui $I\left[0, \left(\infty, \frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}\right)\right]$, este suficient să înlocuim în relația de mai sus pe z cu 0, a cu $\frac{1}{a'}$ și b cu $\frac{1}{b'}$

$$I\left[0, \left(\infty, \frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}\right)\right] = \frac{K\left(\frac{\frac{1}{b'} - \frac{1}{a}}{-\frac{1}{a'}}\right)}{2\left|\frac{1}{a'}\right| \log\left|\frac{-\frac{1}{a'}}{\frac{1}{b'} - \frac{1}{a'}}\right|} = \frac{|a'| K\left(\frac{b'}{b'-a'}\right)}{2 \log\left|\frac{b'-a'}{b'}\right|},$$

întrucît $\frac{K'w)}{\log\left|\frac{1}{w}\right|} = \frac{k\left(\frac{1}{w}\right)}{\log|w|}$ cum se vede în formula (3), p. 531, făcînd transformarea $I = \frac{1}{w}$

Să presupunem mai întîi $\left|\frac{b'}{b'-a'}\right| \leqslant \frac{1}{e}$; Atunci $K\left(\frac{b'}{b'-a'}\right) \geqslant K\left(\frac{1}{e}\right) > 0$, unde am pus $K(\theta) = \min_{|w| < \theta} K(w)$. Întrucît $|a'| \geqslant |b' - a'|$, $\log\left|\frac{b'-a'}{b'}\right| \leqslant \log\left|\frac{a'}{b'}\right|$ și deci

$$I[\infty, (a, b, c)] = I\left[0, \left(\infty, \frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}\right)\right] \geqslant \frac{K\left(\frac{1}{e}\right) L}{2 \log \frac{L}{l}}.$$

Dacă $\left|\frac{b'}{b'-a'}\right| > \frac{1}{e}$, atunci să observăm că

$$I[\infty, (a', b', 0)] = |b'| I\left[\infty, \left(\frac{a'}{|b'|}, \frac{b'}{|b'|}, 0\right)\right].$$

Punctul $\frac{b'}{|b'|}$ se găsește pe circumferința $|z| = 1$, iar punctul $\frac{a'}{|b'|}$ în afara cercului $|z| < 1$. Întrucît $|b'-a'| \geqslant b'|$, $\left|\frac{b'}{|b'|}\right| - \left|\frac{a'}{|b'|}\right| \geqslant 1$, rezultă

$$\rho\left(\frac{a'}{|b'|}, \frac{b'}{|b'|}\right) \geqslant \operatorname{arc\,tg} 2 - \operatorname{arc\,tg} 1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$$

și cum $\rho\left(\frac{b'}{|b'|}, 0\right) = \frac{\pi}{4}$, iar $\rho\left(\frac{a'}{|b'|}, 0\right) \geqslant \frac{\pi}{4}$, rezultă

$$\varepsilon\left(\frac{a'}{|b'|}, \frac{b'}{|b'|}, 0\right) \geqslant \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\Big).$$

În virtutea observației care a precedat teorema 6, avem deci

$$I\left[\infty, \left(\frac{a'}{|b'|}, \frac{b'}{|b'|}, 0\right)\right] \geqslant \psi\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right).$$

Dar $|a'| \leqslant |b'-a'| + |b'| \leqslant (1+e)|b'|$ și deci $|b'| \geqslant \frac{|a'|}{1+e}$.

Rezultă că în acest al doilea caz

$$I\left[\infty, (a', b', 0)\right] \geqslant \frac{L}{1+e} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}.$$

Dacă luăm

$$B = \min\left\{\frac{K\left(\frac{1}{e}\right)}{2}, \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}}{1+e}\right\},$$

obținem

$$I\left[\infty, (a, b, c,)\right] \geqslant \min\left\{\frac{BL}{\log\frac{L}{l}}, BL\right\}.$$

Teorema 8. *Fie F mulțimea punctelor omise de funcția $z = f(t)$ meromorfă în $|t| < 1$ cu $f(0) = 0$, $|f'(0)| = 1$, iar F' mulțimea obținută din F prin inversiunea $w = \frac{1}{z}$. Mulțimea F' este conținută în două cercuri de rază $\frac{L}{e^{BL}}$, unde L este diametrul mulțimii F', iar B este o constantă pozitivă, dacă $L > \frac{1}{B}$.*

În virtutea principiului metricii hiperbolice avem

$$I(o, F)\, ds_z \leqslant I[0, (|t| \geqslant 1)]\, ds_t,$$

sau $I(0, F) \leqslant 1$, întrucît $\frac{ds_t}{ds_z} = \frac{1}{|f'(0)|} = 1$ și $I[0, (|t| \geqslant 1)] = 1$. Prin inversiunea $w = \frac{1}{z}$ obținem $I(0, F) = I(\infty, F')$, cum s-a văzut mai sus, și deci $I(\infty, F') \leqslant 1$. Fie a' și b' două puncte din F' pentru care $|a' - b'| = L$, iar c' un al treilea punct din F'.
În virtutea lemei 5

$$I(\infty, F') \geqslant I[\infty, (a', b', c')] \geqslant \min\left\{\frac{BL}{\log\frac{L}{l}},\ BL\right\},$$

unde l este cel mai mic din numerele $|a' - c'|$, $|b' - c'|$.
Întrucît $I(\infty, F') \leqslant 1$ și $BL \geqslant 1$, rezultă $l \leqslant \frac{L}{e^{BL}}$, ceea ce demonstrează teorema.

Dacă ne restrîngem la funcțiile olomorfe, obținem următorul caz particular.

Teorema 9. *Funcțiile* $z = f(t) = t + c_2 t^2 + \ldots$ *olomorfe în cercul* $|t| < 1$ *acoperă cercul* $|z| < B$, *cu excepția unui semicerc curb de forma*

$$\left\{|z - re^{i\theta}| < \frac{r}{e^{\frac{B}{r}} - 1},\ |z| > r\right\}.$$

Funcția $f(t)$ fiind olomorfă omite valoarea $z = \infty$ și deci mulțimea F' din teorema 8 conține punctul 0.

Fie a punctul de modul minim omis de $f(t)$. Presupunem $|a| = r < B$, căci în caz contrar teorema este evidentă. Punctul $a' = \frac{1}{a}$ va aparține mulțimii F'. Notînd cu L diametrul mulțimii F', obținem $L \geqslant |a' - o| = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{r} > \frac{1}{B}$ și prin urmare $\frac{L}{e^{BL}} \leqslant \frac{\frac{1}{r}}{e^{\frac{B}{r}}}$, funcția $\frac{L}{e^{BL}}$ fiind descrescătoare pentru $L > \frac{1}{B}$. Rezultă, din teorema precedentă, că întreaga mulțime F' este inclusă în cercurile $|w| < \frac{1}{re^{\frac{B}{r}}}$ și $|w - a'| < \frac{1}{re^{\frac{B}{r}}}$. Prin inversiune, primul cerc se transformă în mulțimea $|z| > re^{\frac{B}{r}} > B$ și ca atare nu posedă puncte în $|z| < B$. Fie b' punctul de modul minim al celui de-al doilea cerc iar $b = \frac{1}{b'}$. Prin inversiune cercul

$|w - a'| < \dfrac{1}{re^{\frac{B}{r}}}$ se va transforma într-un cerc conținut în cercul cu centrul în a și trecînd prin b, întrucît raza a', b' suferă dilatația maximă prin inversiune. Întrucît

$$|b'| = \frac{1}{r} - \frac{1}{re^{\frac{B}{r}}} = \frac{e^{\frac{B}{r}} - 1}{re^{\frac{B}{r}}}, \quad |b| = \frac{1}{|b'|} = \frac{re^{\frac{B}{r}}}{e^{\frac{B}{r}} - 1},$$

iar $|b - a| = |b| - |a|$, deoarece b și a au același argument, rezultă

$$|b - a| = \frac{re^{\frac{B}{r}}}{e^{\frac{B}{r}} - 1} - r = \frac{r}{e^{\frac{B}{r}} - 1},$$

ceea ce demonstrează teorema.

În particular teorema conține și precizează rezultatul anterior datorit lui Valiron [5], [6], după care oricărui ε îi corespunde un $\rho(\varepsilon)$, așa fel încît orice funcție $f(t)$, de tipul celei de mai sus, acoperă un sector al cercului $|z| < \rho(\varepsilon)$ de deschidere $2\pi - \varepsilon$. Aceasta rezultă din faptul că semicercul este văzut din origine sub un unghi de deschidere $\dfrac{1}{e^{\frac{B}{r}} - 1}$ care tinde la zero odată cu r, adică cu modulul centrului, arătîndu-se în același timp că rapiditatea cu care tinde la zero este foarte mare.

9. Principiul metricei hiperbolice se aplică în interiorul domeniilor de meromorfie ale funcțiilor, dar, cel puțin în forma în care este enunțat, nu ne dă nici un fel de informații în legătură cu comportarea funcției pe frontiera acestui domeniu. Ne propunem să-i dăm o extensiune în acest sens.

Lema 6. *$\lim_{n\to\infty} \overline{\alpha}(F_n, F) = 0$ implică $\lim_{n\to\infty} d_{F_n}(a, b) = d_F(a, b)$ dacă F conține cel puțin trei puncte.*

Excluzînd cazul $a = b$ ca fiind banal, ne rămîn de studiat posibilitățile : sau a și b sînt situați în aceeași componentă a complementarei lui F sau nu. Vom cerceta mai întîi primul caz.

Distanța $d_F(a, b)$ este prin definiție marginea inferioară a numerelor $\int_\lambda I(z, F)\, ds$, unde λ este o curbă oarecare unind pe a cu b. Această margine inferioară este atinsă efectiv, spațiul fiind complet, și fie λ și λ_n curbele pentru care avem

$$\int_\lambda I(z, F)\, ds = d_F(a, b),$$

$$\int_{\lambda_n} I(z, F_n)\, ds = d_{F_n}(a, b).$$

În virtutea teoremei 5

$$\lim_{n\to\infty} I(z, F_n) = I(z, F),$$

convergența fiind uniformă pe λ întrucît, evident, toate punctele curbei λ sînt situate la o distanță sferică de F mai mare decît un număr pozitiv fix. Prin urmare,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} d_{F_n}(a,b) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\lambda_n} I(z, F_n)\, ds \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\lambda} I(z, F_n)\, ds =$$

$$= \int_{\lambda} I(z, F)\, ds = d_F(a,b),$$

întrucît din definiția lui λ_n avem $\int_{\lambda_n} I(z, F_n)\, ds \leqslant \int_{\lambda} I(z, F_n)\, ds$.

Să luăm acum un n suficient de mare, astfel ca $d_{F_n}(a, b) < 2\, d_F(a,b)$ și

$$\overline{\alpha}(F_n, F) \leqslant \min\left\{\frac{\varepsilon(F)}{3}, \frac{\rho(a,F)}{2}, \frac{1}{2}\rho\left[\frac{\rho(a,F)}{2}, \frac{\varepsilon(F)}{3}, 2\, d_F(a,b)\right]\right\},$$

unde $\rho(\rho_0, \varepsilon, M)$ este funcție din lema 4. După cum s-a văzut din demonstrația teoremei 5,

$$\varepsilon(F_n) \geqslant \varepsilon(F) - 2\,\overline{\alpha}(F_n, F) \geqslant \varepsilon(F) - 2\frac{\varepsilon(F)}{3} = \frac{\varepsilon(F)}{3}$$

și

$$\rho(a, F_n) \geqslant \rho(a,F) - \overline{\alpha}(F_n, F) \geqslant \rho(a, F) - \frac{\rho(a,F)}{2} = \frac{\rho(a,F)}{2}.$$

Fie Z un punct pentru care

$$\rho(z,F) \leqslant \frac{1}{2}\rho\left[\frac{\rho(a,F)}{2}, \frac{\varepsilon(F)}{3}, 2\, d_F(a,b)\right];$$

avem

$$\rho(z, F_n) \leqslant \rho(z,F) + \overline{\alpha}(F_n, F) \leqslant \rho\left[\frac{\rho(a,F)}{2}, \frac{\varepsilon(F)}{3}, 2\, d_F(a,b)\right],$$

iar în virtutea lemei 4

$$d_{F_n}(a,z) \geqslant 2\, d_F(a,b).$$

Cum n a fost luat suficient de mare pentru ca să avem $d_{F_n}(a,b) < 2\, d_F(a,b)$, rezultă că

$$\rho(\lambda_n, F) \geqslant \frac{1}{2}\rho\left[\frac{\rho(a,F)}{2}, \frac{\varepsilon(F)}{3}, 2\, d_F(a,b)\right].$$

Fie $A = \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} \lambda_k}$. Întrucît $\rho(A,F)$ este pozitiv, $I(z, F_n)$ converge uniform către $I(z,F)$ pe A. Pentru orice $\sigma > 0$ există un $N(\sigma)$, astfel încît $n \geqslant N(\sigma)$ implică

$$|I(z, F_n) - I(z,F)| < \sigma,$$

pentru orice $z \in A$. În particular

$$\left| \int_{\lambda_n} I(z, F_n)\, ds - \int_{\lambda_n} I(z, F)\, ds \right| \leqslant \int_{\lambda_n} | I(z, F_n) - I(z, F) |\, ds \leqslant \sigma\, l(\lambda_n),$$

unde $l(\lambda_n)$ este lungimea sferică a curbei λ_n.

Întrucît $\varepsilon(F_n) \geqslant \dfrac{\varepsilon(F)}{3}$, $I(z, F_n) \geqslant \psi\left[\dfrac{\varepsilon(F)}{3}\right]$, unde $\psi(\varepsilon)$ este funcția introdusă la punctul 7.

Avem

$$d_{F_n}(a, b) = \int_{\lambda_n} I(z, F_n)\, ds \geqslant \psi\left[\frac{\varepsilon(F)}{3}\right] l(\lambda_n),$$

și deci

$$l(\lambda_n) \leqslant \frac{d_{F_n}(a, b)}{\psi\left[\dfrac{\varepsilon(F)}{3}\right]} \leqslant \frac{2\, d_F(a, b)}{\psi\left[\dfrac{\varepsilon(F)}{3}\right]}.$$

De aici rezultă

$$d_F(a, b) = \int_{\lambda} I(z, \lambda)\, ds \leqslant \int_{\lambda_n} (I(z, F)\, ds \leqslant d_{F_n}(a, b) + \frac{2\sigma\, d_F(a, b)}{\psi\left[\dfrac{\varepsilon(F)}{3}\right]}$$

și prin urmare

$$d_F(a, b) \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}}\, d_{F_n}(a, b) + \frac{2\sigma\, d_F(a, b)}{\psi\left[\dfrac{\varepsilon(F)}{3}\right]},$$

Cum σ este arbitrar de mic

$$d_F(a, b) \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}}\, d_{F_n}(a, b)$$

și ținînd seama de inegalitatea

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, d_{F_n}(a, b) \leqslant d_F(a, b),$$

dovedită mai sus, obținem

$$\lim_{n \to \infty} d_{F_n}(a, b) = d_F(a, b),$$

adică enunțul lemei în primul caz.

Să trecem acum la cazul al doilea, cînd a și b nu sînt situații în aceeași componentă a complementarei mulțimii F. Orice curbă λ care unește aceste două puncte posedă cel puțin un punct situat pe F.

Lungimea curbei λ în metrica asociată mulțimii F este egală cu lungimea porțiunii ac plus lungimea porțiunii cb. Una cel puțin din aceste porțiuni este infinită, cum rezultă imediat din lema 4, și ca atare lungimea curbei λ este infinită. Rezultă că $d_F(a, b) = \infty$. Trebuie deci să arătăm că

$$\lim_{n \to \infty} d_{F_n}(a, b) = \infty.$$

Vom distinge două subcazuri : cînd cel puțin unul din punctele a și b nu aparține mulțimii F, sau cînd ambele aparțin lui F. Să considerăm primul subcaz ; $a \in \complement F$. Pentru un n suficient de mare, astfel ca $\overline{\alpha}(F_n, F) < \rho(a, F)$, $a \in \complement F_n$. Dacă b aparține lui F_n sau este situat într-o componentă diferită a lui $\complement F_n$, atunci $d_{F_n}(a, b) = \infty$. În acest contrar, să notăm cu ε_n marginea superioară a numerelor $\rho(\lambda, F_n)$ unde λ este o curbă oarecare unind pe a cu b. Întrucît orice λ intersectează pe F, avem $\rho(\lambda, F_n) \leqslant \overline{\alpha}(F, F_n)$ și prin urmare $\varepsilon_n \leqslant \leqslant \overline{\alpha}(F, F_n)$. Fie λ o curbă ce unește pe a cu b și c un punct al ei, astfel încît

$$\rho(c, F_n) = \rho(\lambda, F_n) \leqslant \varepsilon_n \leqslant \overline{\alpha}(F, F_n).$$

Dacă luăm un n suficient de mare, așa fel ca

$$\overline{\alpha}(F, F_n) \leqslant \min\left\{\frac{\rho(a, F)}{2}, \frac{\varepsilon(F)}{3}, \rho\left[\frac{\rho(a, F)}{2}, \frac{\varepsilon(F)}{3}, M\right]\right\},$$

avem ca mai sus

$$\varepsilon(F_n) \geqslant \frac{\varepsilon(F)}{3}, \quad \rho(a, F_n) \geqslant \frac{\rho(a, F)}{2}. \text{ Din}$$

$$\rho(c, F_n) \leqslant \overline{\alpha}(F, F_n) \leqslant \rho\left[\frac{\rho(a, F)}{2}, \frac{\varepsilon(F)}{3}, M\right]$$

deducem, aplicînd lema 4

$$d_{F_n}(a, c) \geqslant M.$$

Lungimea curbei λ în metrica asociată mulțimii F_n este mai mare decît lungimea porțiunii cuprinse între a și c, care la rîndul ei este mai mare decît $d_{F_n}(a, c)$. Prin urmare, $d_{F_n}(a, b) \geqslant M$ și deci $\lim\limits_{n \to \infty} d_{F_n}(a, b) \geqslant M$. Cum M este arbitrar de mare, deducem

$$\lim_{n \to \infty} d_{F_n}(a, b) = \infty.$$

În sfîrșit, să considerăm cazul cînd atît a cît și b aparțin mulțimii F. Să luăm pe n suficient de mare pentru ca

$$\overline{\alpha}(F, F_n) \leqslant \min\left\{\frac{\varepsilon(F)}{3}, x\left[\frac{M}{\rho(a, b)}\right], \rho\left[\rho_0, \frac{\varepsilon(F)}{3}, M\right]\right\},$$

unde $x(N)$ este cea mai mică soluție a ecuației $\dfrac{1}{4x \log \dfrac{1}{x}} = N$,

$\rho_0 = \min\left\{\mu\left[\dfrac{\varepsilon(F)}{3}, \dfrac{1}{2}\right], x\left[\dfrac{M}{\rho(a, b)}\right]\right\}$, iar $\mu(\varepsilon, \eta)$ este funcția din lema 2.

Întrucît $\overline{\alpha}(F, F_n) \leqslant \dfrac{\varepsilon(F)}{3}$, rezultă $\varepsilon(F_n) \geqslant \dfrac{\varepsilon(F)}{3}$.

Din $\overline{\alpha}(F, F_n) \leqslant \rho\left[\rho_0, \dfrac{\varepsilon(F)}{3}, M\right]$ și $a \in F$ rezultă $\rho(a, F_n) \leqslant \rho\left[\rho_0, \dfrac{\varepsilon(F)}{3}, M\right]$

Fie λ o curbă ce unește punctele a și b. Dacă λ posedă un punct c, astfel încît $\rho(c, F_n) > \rho_0$, atunci, în virtutea lemei 4, $d_{F_n}(a, c) \geqslant M$ de unde rezultă că lungimea curbei λ în metrica lui F_n este mai mare decît M. Dacă λ nu posedă nici un astfel de punct, deci dacă toate punctele $z \in \lambda$ satisfac relația

$$\rho(z, F_n) \leqslant \rho_0 \leqslant \mu\left[\frac{\varepsilon(F)}{3}, \frac{1}{2}\right]$$

avem în virtutea lemei 2

$$I(z, F_n) \geqslant \frac{1}{4\rho(z, F_n) \log \frac{1}{\rho(z, F_n)}}.$$

Întrucît

$$\rho(z, F_n) \leqslant \rho_0 \leqslant x\left[\frac{M}{\rho(a, b)}\right]$$

rezultă

$$I(z, F_n) \geqslant \frac{1}{4\rho(z, F_n) \log \frac{1}{\rho(z, F_n)}} \geqslant \frac{M}{\rho(a, b)}.$$

Lungimea curbei λ în metrica lui F_n va fi

$$\int_\lambda I(z, F_n)\, ds \geqslant \frac{M}{\rho(a, b)} \int_\lambda ds \geqslant \frac{M}{\rho(a, b)} \cdot \rho(a, b) = M.$$

Rezultă că orice curbă λ, care unește punctele a și b, are o lungime, măsurată în metrica lui F_n, mai mare decît M. De aici urmează

$$d_{F_n}(a, b) \geqslant M \varlimsup_{n\to\infty} d_{F_n}(a, b) \geqslant M.$$

Cum M este arbitrar de mare, obținem $\lim_{n\to\infty} d_{F_n}(a, b) = \infty$ și lema este complet demonstrată.

Fie D un domeniu arbitrar, z_0 un punct al frontierei lui D și A, B, două mulțimi situate în D și avînd pe z_0 ca punct de acumulare. Notăm cu D_r, A_r și B_r intersecțiile cercului $|z - z_0| < r$ cu D, A și B respectiv, iar cu $\sigma_{D_{r_0}}(A_r, B)$ abaterea mulțimii A_r față de B, măsurată în metrica lui D_{r_0}. Vom nota

$$\alpha(A, B; r_0) = \lim_{r\to\infty} \sigma_{D_{r_0}}(A_r, B),$$

$$\alpha(A, B) = \lim_{r_0\to 0} \alpha(A, B; r_0),$$

existența ambelor limite, finite sau infinite, fiind garantată de monotonia expresiilor $\sigma_{D_{r_0}}(A_r, B)$ și $\alpha(A, B; r_0)$. Vom numi $\alpha(A, B)$ abaterea absolută a lui A față de B relativ la D și z_0.

Fie $f(z)$ o funcție meromorfă și uniformă în D și E o mulțime situată în D avînd pe z_0 ca punct de acumulare. Notăm, cu notațiile uzuale

$$S_{z_0}^{(E)} = \bigcap_{r>0} \overline{f(E_r)} \qquad R_{z_0}^{(E)} = \bigcap_{r>0} f(E_r)$$

Vom enunța acum extensiunea principiului metricei hiperbolice la frontiera domeniilor.

Fie $f(z)$ o funcție meromorfă și uniformă într-un domeniu D și z_0 un punct al frontierei lui D. Dacă A și B sînt două mulțimi din D avînd pe z_0 ca punct de acumulare, avem

$$\alpha'\left(S_{z_0}^{(A)}, S_{z_0}^{(B)}\right) \leqslant \alpha(A, B),$$

unde $\alpha(A, B)$ este abaterea absolută a lui A față de B relativ la D și z_0, iar $\alpha'\left(S_{z_0}^{(A)}, S_{z_0}^{(B)}\right)$ este abaterea mulțimii $S_{z_0}^{(A)}$ față de $S_{z_0}^{(B)}$, măsurată în metrica asociată mulțimii $\overline{[R_{z_0}^{(D)}}$.

Din $R_{z_0}^{(D)} = \bigcap_{r>0} f(D_r)$ rezultă $\overline{[R_{z_0}^{(D)}} \supseteq [R_{z_0}^{(D)} = \bigcup_{r>0} [f(D_r)$ și deci $\overline{[R_{z_0}^{(D)}} \supseteq [f(D_r)$.

Aceasta înseamnă $\alpha\left([f(D_r), \overline{[R_{z_0}^{(D)}} = 0\right.$ și deci $\bar{\alpha}\left[[f(D_r), \overline{[R_{z_0}^{(D)}}\right] = \alpha\left[\overline{[R_{z_0}^{(D)}}, [f(D_r)\right]$. Întrucît $[f(D_r) \subseteq [f(D_{r'})$ pentru $r > r'$, $\alpha\left[\overline{[R_{z_0}^{(D)}}, [f(D_r)\right]$ este o funcție nedescrescătoare și deci $\lim_{r\to 0} \alpha\left[\overline{[R_{z_0}^{(D)}}, [f(D_r)\right]$ există. Vrem să arătăm că această limită este zero. Într-adevăr, să presupunem că această limită ar fi un număr $\varepsilon > 0$. Din $\alpha\left[\overline{[R_{z_0}^{(D)}}, [f(D_r)\right] \geqslant \varepsilon$ rezultă existența unui punct $a_r \in \overline{[R_{z_0}^{(D)}}$ cu

$$\rho[a_r, [f(D_r)] \geqslant \varepsilon.$$

Fie a un punct de acumulare al șirului $a_{\frac{1}{n}}$. Avem $\rho\left[a, [f\left(D_{\frac{1}{n}}\right)\right] \geqslant$

$\geqslant \rho\left[a_{\frac{1}{n}}, [f\left(D_{\frac{1}{n}}\right)\right] - \rho\left(a, a_{\frac{1}{n}}\right) \geqslant \varepsilon - \rho\left(a, a_{\frac{1}{n}}\right)$. Cum $\lim_{n\to\infty} \rho\left(a, a_{\frac{1}{n}}\right) = 0$ putem găsi un n oricît de mare, astfel ca $\rho\left[a, [f\left(D_{\frac{1}{n}}\right)\right] \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ și deci $\rho\left[a, [f\left(D_r\right)\right] \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, pentru orice r întrucît familia $[f(D_r)$ este monotonă. Rezultă că în cercul sferic $\rho(a, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ nu pătrund puncte ale mulțimilor $[f(D_r)$ și deci nici ale mulțimii $[R_{z_0}^{(D)} = \bigcup_{r>0} [f(D_r)$. Aceasta este însă o absurditate, întrucît punctele a_1 aparținînd mulțimii închise $\overline{[R_{z_0}^{(D)}}$ și tinzînd către a rezultă că $a \in \overline{[R_{z_0}^{(D)}}$ și deci $\rho\left[a, [R_{z_0}^{(D)}\right] = 0$ Prin urmare am demonstrat că

$$\lim_{r\to 0} \bar{\alpha}\left[[f(D_r), \overline{[R_{z_0}^{(D)}}\right] = 0.$$

Fie a și b două puncte, $d'(a, b)$ distanța lor în metrica asociată lui $[R_{z_0}^{(D)}$ și $d_r'(a, b)$ distanța lor în metrica asociată lui $[f(D_r)$. În virtutea lemei 5 avem $\lim_{r\to 0} d_r'(a, b) = d'(a, b)$. Această egalitate este de altfel adevărată și în cazul exceptat în această lemă, cînd $\overline{[R_{z_0}^{(D)}}$ nu ar conține trei puncte, deoarece în acest caz nici $[f(D_r)$ nu pot conține trei puncte și ca atare $d'(a, b) = d_r'(a, b) = 0$.

Să trecem acum la demonstrarea principiului enunțat mai sus. Dacă $\alpha(A, B) = \infty$ inegalitatea este banală, așa că ne vom restrînge la cazul $\alpha(A, B) < \infty$.

Fie $a \in S_{z_0}^{(A)}$; există punctele $z_r \in A_r$ cu $\lim_{r\to 0} f(z_r) = a$. Există un $z_r' \in B$, astfel încît $d_{r_0}(z_r, z_r') < \alpha_{D_{r_0}}(A_r, B) + \varepsilon$ după cum se vede din definiția numărului $\alpha_{D_{r_0}}(A_r, B)$, $d_{r_0}(z_r, z_r')$ fiind distanța între punctele z_r și z_r' în metrica lui D_{r_0}. În D_{r_0} $f(z)$ ia valori din $f(D_{r_0})$ și deci, în virtutea principiului metricii hiperbolice, avem

$$d_{r_0}'[f(z_r), f(z_r')] \leqslant d_{r_0}(z_r, z_r') < \alpha_{D_{r_0}}(A_r, B) + \varepsilon.$$

Fie b un punct de acumulare al mulțimii $f(z_r')$ cînd r tinde către zero. Avem $\lim_{n\to\infty} f(z_{r_n}') = b \in S_{z_0}^{(B)}$. Dacă $a \in [R_{z_0}^{(D)}$ șirul $f(z_r')$ va tinde către a după cum se vede din lema 4 și deci $a = b$, $d'(a, b) = 0$. În caz contrar se vede că b nu poate aparține lui $[R_{z_0}^{(D)}$ și vom avea

$$d_{r_0}'(a, b) \leqslant d_{r_0}'[a, f(z_r)] + d_{r_0}'[f(z_r), f(z_r')] +$$

$$+ d_{r_0}'[f(z_r'), b] \leqslant d_{r_0}'[a, f(z_r)] + \alpha_{D_{r_0}}(A_r, B) + \varepsilon + d_{r_0}'[f(z_r'), b].$$

Însă

$$\lim_{r\to 0} d_{r_0}'[a, f(z_r)] = 0,$$

$$\lim_{r\to 0} d_r'[f(z_{r_0}'), b] = 0.$$

Prin urmare

$$d_{r_0}'(a, b) \leqslant \alpha(A, B; r_0) + \varepsilon$$

și mai departe

$$d'(a, b) = \lim_{r_0\to 0} d_{r_0}'(a, b) \leqslant \lim_{r_0\to 0} \alpha(A, B; r_0) + \varepsilon = \alpha(A, B) + \varepsilon$$

ε fiind arbitrar de mic $d'(a, b) \leqslant \alpha(A, B)$. Cu alte cuvinte orice punct din $S_{z_0}^{(A)}$ se găsește la o distanță mai mică sau egală cu $\alpha(A, B)$ față de $S_{z_0}^{(B)}$ și prin urmare

$$\alpha'(S_{z_0}^{(A)}), S_{z_0}^{(B)} \leqslant \alpha(A, B),$$

adică tocmai inegalitatea pe care voiam s-o demonstrăm.

O inegalitate similară se poate stabili și dacă înlocuim abaterea lui A față de B cu abaterea reciprocă sau cu distanța. În cele ce vor urma însă vom avea de aplicat numai această extensie a principiului metricei hiperbolice.

10. Vom da acum o aplicație a acestei extinderi pentru funcțiile meromorfe în semiplanul superior al planului (z), pe care îl vom nota cu D. Metrica lui D este $d\sigma = \frac{|dz|}{2y}$ cu $z = x + iy$. Fie z_1 și z_2 două puncte din D. Geodezica ce le unește este, după cum se știe, arcul cercului care trece prin z_1 și z_2 și este ortogonal axei reale: fie $z = \xi + re^{i\theta}$ ecuația acestui cerc și $z_k = \xi + re^{i\theta_k}$.

Avem

$$d(z_1, z_2) = \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r d\theta}{2r \sin\theta} \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} \over \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} \right| = \frac{1}{2} \left| \log \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}} \right|.$$

Fie δ^1 δ^2 două semidrepte situate în D cu excepția extremității în punctul ξ al axei reale. Avem

$$\alpha_D(\delta^1, \delta^2) = \frac{1}{2} \left| \log \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}} \right|,$$

unde θ_k este înclinația dreptei δ^k față pe axa reală pozitivă. Fie D_{r_0} intersecția semiplanului D cu cercul $|z - \xi| < r_0$ și $w = \varphi_{r_0}(z)$ funcția care reprezintă conform pe D_{r_0} pe semiplanul superior al planului (w). Funcția $\varphi_{r_0}(w)$ fiind olomorfă în ξ și cu derivata reală și pozitivă, va transforma semidreptele δ^1 și δ^2 în două curbe λ^1 și λ^2 situate în semiplanul superior al planului (w), care vor admite drept tangente în punctul u, transformatul lui ξ, dreptele δ'^1 și δ'^2 care fac cu axa reală unghiurile θ_1 și θ_2 respectiv. Să presupunem $\theta_1 < \theta_2$ și fie δ''^1, δ''^2 două semidrepte cu extremitatea în u și înclinate față de axa reală cu $\theta_1'' < \theta_1$ și $\theta_2'' > \theta_2$. Abaterea segmentului δ_r^1 față de δ^2 relativă la D_{r_0}, este egală cu abaterea imaginii λ_r^1 a lui δ_r^1 față de λ^2 relativă la semiplanul superior

$$\alpha_{D_{r_0}}(\delta_r^1, \delta^2) = \alpha_D(\lambda_r^1, \lambda^2)$$

Pentru un r suficient de mic ultima abatere este mai mică decît abaterea dreptei δ''^1 față de δ''^2

$$\alpha_D(\lambda_1', \lambda^2) \leqslant \alpha_D(\delta''^1, \delta''^2) = \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_2''}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1''}{2}},$$

și prin urmare

$$\alpha(\delta^1, \delta^2; r_0) = \lim_{r \to 0} \alpha_{D_{r_0}}(\delta_r^1, \delta^2) \leqslant \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_2''}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1''}{2}}.$$

Cum θ_1'' și θ_2'' sînt oricît de apropiați de θ_1 și θ_2 respectiv, obținem

$$\alpha(\delta^1, \delta^2; r_0) \leqslant \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}}.$$

Cum pe de altă parte

$$\alpha(\delta^1, \delta^2; r_0) \leqslant \alpha_D(\delta^1, \delta^2) = \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}$$

rezultă

$$\alpha(\delta^1, \delta^2; r_0) = \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}},$$

de unde

$$\alpha(\delta^1, \delta^2) = \lim_{r_0 \to 0} \alpha(\delta^1, \delta^2; r_0) = \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}},$$

unde $\alpha(\delta^1, \delta^2)$ este abaterea absolută a lui δ^1 față de δ^2 relativ la D și ξ.

Fie λ o curbă situată în semiplanul superior cu excepția extremității situată în punctul ξ și admițînd în punctul ξ o tangentă δ. Fie θ înclinarea acestei tangente pe axa reală și δ^1, δ^2 semidreptele ce pornesc din ξ și sînt înclinate față de axa reală cu unghiurile θ_1, θ_2 respectiv așa fel ca $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Este evident că avem

$$\bar{\alpha}(\lambda, \delta) \leqslant \bar{\alpha}(\delta^1, \delta^2) = \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}.$$

Dacă $[R_\xi^{(D)}$ conține cel puțin trei puncte, putem aplica principiul metricei hiperbolice extins și obținem

$$\bar{\alpha}'(S_\xi^{(\lambda)}, S_\xi^{(\delta)}) \leqslant \bar{\alpha}(\delta^1, \delta^2) = \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}.$$

Întrucît putem lua pe θ_1 și θ_2 oricît de aproape de θ, avem

$$\bar{\alpha}(S_\xi^{(\lambda)}, S_\xi^{(\delta)}) = 0,$$

ceea ce implică $S_\xi^{(\delta)} = S_\xi^{(\lambda)}$.

Vom enunța acest rezultat în modul următor:

T e o r e m a 10. *Fie $f(z)$ o funcție meromorfă în semiplanul superior și ξ un punct al axei reale în vecinătatea căruia $f(z)$ omite trei valori. Dacă λ^1 și λ^2 sînt două curbe Jordan situate în semiplanul superior cu excepția extremității lor comune situată în ξ și dacă aceste două curbe admit o tangentă comună în ξ atunci mulțimile limită ale lui $f(z)$ după aceste curbe coincid*

$$S_\xi^{(\lambda_1)} = S_\xi^{(\lambda_2)}.$$

Vom numi un punct ξ al axei reale punct de totală nedeterminare dacă pentru orice unghi Δ cu vîrful în ξ și interior semiplanului superior avem, $S_\xi^{(\Delta)} = (w)$ adică umple întreg planul valorilor. Fie δ o semidreaptă cu vîrful în ξ, și care face cu axa reală unghiul θ. Fie Δ_ε unghiul mărginit de laturile δ^1, δ^2 înclinate față de axa reală cu unghiurile $\theta - \varepsilon$, $\theta + \varepsilon$ respectiv.

Dacă $[R_\xi^{(D)}$ conține cel puțin trei valori, avem, în virtutea principiului metricei hiperbolice extins,

$$\alpha'\left(S_\xi^{(\Delta_\varepsilon)}, S_\xi^{(\delta)}\right) \leqslant \alpha(\Delta_\varepsilon, \delta) \leqslant \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta+\varepsilon}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}.$$

Dacă ξ este un punct de totală nedeterminare, $S_\xi^{(\Delta_\varepsilon)} = (w)$ și prin urmare

$$\alpha'\left[(w), S_\xi^{(\delta)}\right] \leqslant \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta+\varepsilon}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}.$$

Cum membrul întîi al inegalității nu depinde de ε, care poate fi luat oricît de mic,

$$\alpha'\left[(w), S_\xi^{(\delta)}\right] = 0$$

ceea ce implică $S_\xi^{(\delta)} = (w)$.

Cum pe de altă parte avem, în virtutea teoremei 10, $S_\xi^{(\delta)} = S_\xi^{(\lambda)}$ pentru orice curbă λ admițînd pe δ drept tangentă în ξ, rezultă că am demonstrat.

Teorema 11. *Fie $f(z)$ o funcție meromorfă în semiplanul superior și ξ un punct al axei reale în vecinătatea căruia $f(z)$ omite trei valori. Dacă ξ este un punct de nedeterminare totală pentru $f(z)$, în sensul că mulțimea limită a oricărui unghi umple planul întreg, toate curbele jordaniene interioare semiplanului superior, cu excepția extremității situate în ξ, care admit o tangentă în ξ diferită de axa reală, se transformă prin $f(z)$ în curbe dense în tot planul.*

11. Să revenim la cazul general în care D este un domeniu oarecare și z_0 un punct al frontierei lui.

Fie $l(z_0, r) = \inf l_r(\lambda)$ unde λ este o curbă oarecare situată în D_r și înconjurînd pe z_0 iar $l_r(\lambda)$ este lungimea ei în metrica lui D_r. Funcția $l(z_0, r)$ crește cînd r descrește și deci $l(z_0) = \lim_{r\to 0} l(z_0, r)$ finit sau infinit există întotdeauna. Dacă $l(z_0) < \infty$ vom spune că z_0 este un punct solitar al frontierei lui D. Punctele izolate ale frontierei domeniului D sînt evident solitare, dar reciproca nu este adevărată. Într-adevăr, fie $\{\theta_n\}_{1\leqslant n<\infty}$ mulțimea tuturor numerelor raționale cuprinse între 0 și 2π așezate într-un șir simplu. Vom nota cu Δ_n sectoarele $0 < |z| < 1$ și $\theta_n - \frac{\varepsilon}{2^n} < \arg z < \theta_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$ iar cu Γ_n coroanele circulare

$$\frac{\theta}{2^n} < |z| < \frac{1}{2^n}, \quad \frac{1}{2} < \theta < 1.$$

Fie $D = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma \cup\right] \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right] \cup \Gamma_0$ unde Γ_0 este exteriorul cercului $|z| = 1$. Punctul $z = 0$ este un punct solitar al frontierei lui D. Într-adevăr, în orice D_r există o coroană Γ_n. Fie λ curba $|z| = \frac{\theta + 1}{2^{n+1}}$. Lungimea ei relativă la D_r va fi $l_r(\lambda) = \int_{|z| = \frac{\theta+1}{2^{n+1}}} d\sigma_r$. Fie z un punct al curbei λ și γ_z cercul cu centrul în z și de rază $\frac{1-\theta}{2^{n+1}}$. Întrucît $\gamma_z \subseteq D_r$ vom avea

$d\sigma_r \leqslant d\sigma_z = \frac{|dz|}{\frac{1-\theta}{2^{n+1}}}$ unde $d\sigma_z$ este metrica lui γ_z. Prin urmare

$$l_r(\lambda) \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\theta+1}{2^{n+1}} d\varphi}{\frac{1-\theta}{2^{n+1}}} = 2\pi \frac{1+\theta}{1-\theta}.$$

Rezultă $l(z_0, r) \leqslant l_r(\lambda) \leqslant 2\pi \frac{1+\theta}{1-\theta}$ și deci

$$l(z_0) = \lim_{r \to 0} l(z_0, r) \leqslant 2\pi \frac{1+\theta}{1-\theta},$$

ceea ce dovedește că punctul $z = 0$ este solitar.

Să considerăm acum densitatea superioară a lui D în $z = 0$. În cercul $|z| < \frac{1}{2^n}$, măsura lui D este mai mică decît

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2\varepsilon\pi}{2^{k+n}} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\pi(1-\theta^2)}{2^{2k}} = \frac{\pi\varepsilon}{2^{2n}} +$$

$$+ \frac{\pi(1-\theta^2)}{2^{2n}} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{2^{2n}} \left[\varepsilon + \frac{4}{3}(1-\theta^2)\right].$$

Suprafața cercului $|z| < \frac{1}{2^n}$ fiind $\frac{\pi}{2^{2n}}$, densitatea medie a lui D în acest cerc este mai mică decît $\varepsilon + \frac{4}{3}(1-\theta^2)$ și prin urmare densitatea superioară a lui D în $z = 0$ este mai mică decît $\varepsilon + \frac{4}{3}(1-\theta^2)$. Cu alte cuvinte există puncte solitare ale frontierei domeniului D, pentru care densitatea inferioară a complementarei lui D în z_0 este oricît de aproape de 1 vrem.

Fie z_0 un punct solitar al frontierei lui D și λ curba pentru care $l_r(\lambda_r) < l(z_0, r) + r$ și $E = \bigcup_{r>0} \lambda_r$. Vom demonstra

Teorema 12. *Fie $f(z)$ o funcție meromorfă și uniformă în D, iar z_0 un punct solitar al frontierei lui D în vecinătatea căruia $f(z)$ omite trei valori.*

Oricare ar fi continuul λ situat în D și având pe z_0 ca punct de acumulare, are loc inegalitatea

$$\alpha'\left(S_{z_0}^{(E)},\ S_{z_0}^{(\lambda)}\right) \leqslant \frac{1}{2}\, l(z_0),$$

unde primul membru al inegalității reprezintă abaterea mulțimii $S_{z_0}^{(E)}$ față de $S_{z_0}^{(\lambda)}$ în metrica asociată mulțimii $\overline{[R^{(D)}}$.

În virtutea principiului metricei hiperbolice extins este suficient să arătăm că

$$\alpha(E,\ \lambda) < \frac{1}{2}\, l(z_0).$$

Fie $r < r_0$ două numere fixe; să evaluăm numărul $\sigma_{D_{r_0}}(E_r,\ \lambda)$. Orice punct al mulțimii E_r este situat pe una din curbele $\lambda_{r'}$ cu $r \leqslant r$. Fie $z'_{r'}$ un punct al intersecției curbei $\lambda_{r'}$ cu λ; având în vedere că λ este un continuum, această intersecție nu poate fi vidă pentru un r' suficient de mic. Ținînd seamă că

$$l_{r_0}(\lambda_{r'}) < l_{r'}(\lambda_{r'}) \leqslant l(z_0,\ r') + r',$$

rezultă că $d_{r_0}(z_{r'},\ z'_{r'}) < \frac{1}{2}\, l(z_0,\ r') + \frac{r'}{2}$, oricare ar fi punctul $z_{r'} \in \lambda_{r'}$.

Prin urmare $\sigma_{D_{r_0}}(E_r,\ \lambda) \leqslant \frac{1}{2}\, l(z_0) + \frac{r}{2}$.

De aici rezultă

$$\alpha(E,\ \lambda;\ r_0) = \lim_{r \to 0} \sigma_{D_{r_0}}(E_r,\ \lambda) \leqslant \frac{1}{2}\, l(z_0)$$

și

$$\alpha(E,\ \lambda) = \lim_{r_0 \to 0} \alpha(E,\ \lambda;\ r_0) \leqslant \frac{1}{2}\, l(z_0)$$

ceea ce demonstrează teorema.

Numărul a se numește o valoare asimptotică în punctul z_0 dacă există o curbă jordaniană λ situată în D cu excepția extremității situate în z_0 pentru care $S_{z_0}^{(\lambda)} = \{a\}$. Să notăm cu $I_{z_0}^{(D)}$ mulțimea valorilor asimptotice în z_0.

Teorema 13. *Fie $f(z)$ o funcție meromorfă și uniformă în D, iar z_0 un punct solitar al frontierei lui D, în vecinătatea căruia $f(z)$ omite trei valori. Diametrul mulțimii $I_{z_0}^{(D)}$, măsurat în metrica asociată mulțimii $\overline{[R_{z_0}^{(D)}}$, nu poate să depășească valoarea $\frac{1}{2}\, l(z_0)$.*

Fie a o valoare asimptotică $\{a\} = S_{z_0}^{(\lambda)}$. Fie z_r un punct al intersecției curbei λ cu curba λ_r definită mai sus la construcția mulțimii E. Avem evident $\lim_{r \to 0} f(z_r) = a$, de unde rezultă $a \in S_{z_0}^{(E)}$. Cu alte cuvinte avem $I_{z_0}^{(D)} \subseteq S_{z_0}^{(E)}$. Pe de

altă parte, însă, din teorema 12 rezultă

$$\alpha'(S_{z_0}^{(E)}, \{a\}) \leqslant \frac{1}{2} l(z_0),$$

pentru orice $a \in \Gamma_{z_0}^{(D)}$.

Fie a și b două puncte în $\Gamma_{z_0}^{(D)}$. Întrucît $b \in S_{z_0}^{(E)}$ rezultă că $d'(a, b) \leqslant \frac{1}{2} l(z_0)$. Cum a și b sînt arbitrarii, teorema este demonstrată.

Dacă există o valoare asimptotică, care să aparțină mulțimii $\overline{R_{z_0}^{(D)}}$ ea va fi unică, distanța între un punct din această mulțime și orice alt punct în metrica asociată lui $\overline{R_{z_0}^{(D)}}$ fiind infinită. Valorile omise jucînd un rol important în studiul singularităților și ele fiind cu siguranță valori asimptotice cînd mulțimea tuturor singularităților este de capacitate nulă, de exemplu, ne îndreptățește să punem în evidență acest rezultat.

Teorema 14. *Fie $f(z)$ o funcție meromorfă și uniformă în D, iar z_0 un punct solitar al frontierei lui D în vecinătatea căruia $f(z)$ omite cel puțin trei valori. Dacă oreuna din valorile omise este valoarea asimptotică în z_0, $f(z)$ nu mai posedă nici o altă valoare asimptotică în z_0.*

Să remarcăm că teorema 14 conține teorema mare a lui Picard, deoarece într-un punct singular esențial izolat valorile omise sînt cu siguranță valori asimptotice.

12. Putem folosi rezultatele de mai sus la studiul repartiției valorilor. Într-adevăr, fie z_0 un punct al frontierei domeniului D, în care $f(z)$ admite cel puțin două valori asimptotice. Fie a, b, c trei valori oarecare, dintre care una este o valoare asimptotică și z_n puncte în care $f(z)$ ia una din valorile a, b, c. Fie Δ domeniul obținut prin eliminarea punctelor z_n din D. Punctul z_0 nu poate fi un punct solitar al frontierei lui Δ deoarece ar contrazice teorema 14.

Teorema 15. *Fie z_0 un punct singular esențial izolat al funcției uniforme $f(z)$, care posedă în z_0 cel puțin două valori asimptotice. Fie a una din ele, iar b și c două valori oarecare. Punctele în care $f(z)$ ia una din valorile a, b sau c sînt așa fel distribuite în jurul lui z_0, încît prin eliminarea lor se obține un domeniu față de care z_0 nu este un punct solitar.*

Să notăm de exemplu cu z_n punctele în care $f(z) = a$, b sau c, în ordinea modulelor crescătoare și să presupunem că z_0 este situat la infinit.

Avem $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = 1$. Într-adevăr, în caz contrar ar exista un șir de coroane Γ_{n_k}: $|z_{n_k}| < |z| < |z_{n_k+1}|$ cu $\left| \frac{z_{n_k+1}}{z_{n_k}} \right| \geqslant 1 + \varepsilon$. Curbele $|z| = \sqrt{|z_{n_k}| \, |z_{n_k+1}|}$ vor avea o lungime măsurată în metrica lui Γ_{n_k} mai mică decît un număr finit depinzînd de ε.

Acest număr este $\frac{\pi^2}{\log(1+\varepsilon)}$ și ca atare $z_0 = \infty$ ar fi solitar, ceea ce contrazice teorema 15.

În particular, dacă funcția este olomorfă și admite o valoare asimptotică finită, iar a și b sînt două numere arbitrare punctele z_n în care $f(z)$ ia una din

valorile a sau b așezate în ordinea modulelor nedescrescătoare satisfac cu siguranță condiției $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1$. Dacă funcția $f(z)$ omite două valori și z_n sînt punctele în care $f(z_n) = 0$, a fiind o valoare neomisă, iar punctele z_n așezate în ordinea modulelor nedescrescătoare, avem iarăși $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1$.

Întrucît funcțiile meromorfe pentru care $\liminf_{r\to\infty}\frac{T(r)}{(\log r)^2} < +\infty$ satisfac relației $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1$, ele posedă cel mult o valoare asimptotică [8], [9]; se poate demonstra că aceste funcții și chiar cel din clasa mai generală pentru care $\liminf_{r\to\infty}\frac{T(r)}{(\log r)^2\log\log r} < \frac{1}{3\pi^2}$ posedă cel mult o valoare defectă.

13. Ne propunem să demonstrăm

T e o r e m a 16. *Fie $u(z)$ o funcție armonică în $|z| < R \leqslant \infty$ și $m(r)$, $M(r)$ respectiv minimul și maximul ei pe cercul $|z| = r$. Subsistă următoarea inegalitate*:

$$-M'(r)\,m'(r) \geqslant \left[\frac{M(r) - m(r)}{\pi r}\right]^2.$$

Fie $v(z)$ conjugata armonică a lui $u(z)$ și $f(z) = e^{u(z)+iv(z)}$. Să notăm

$$m_1(r) = \inf_{|z|=r}|f(z)| \qquad M_1(r) = \sup_{|z|=r}|f(z)|.$$

Este evident că avem

$$m(r) = \log m_1(r) \qquad M(r) = \log M_1(r).$$

În cercul $|z| < r'$, $w = f(z)$ ia valori în coroana $m_1(r') < |w| < M_1(r')$. Fie $|z| = r < r'$ un cerc și z_1, z_2 două puncte situate pe acest cerc, în care avem $|f(z_1)| = m_1(r)$, $|f(z_2)| = M_1(r)$. Să aplicăm principiul metricei hiperbolice

$$d'[f(z_1), f(z_2)] \leqslant d(z_1, z_2),$$

unde distanța din primul membru este măsurată relativ la coroana circulară $m_1(r') < |w| < M_1(r')$, iar cea din membrul doi relativ la cercul $|z| < r$. Avem

$$d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, 0) + d(z_2, 0) =$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{r'+r}{r'-r} + \frac{1}{2}\log\frac{r'+r}{r'-r} = \log\frac{r'+r}{r'-r}.$$

Pentru a evalua primul membru să stabilim metrica unei coroane circulare

Fie $R_1 < |z| < R_2$ o coroană oarecare; funcția $w = e_{i\pi} \dfrac{\log \dfrac{R_1}{z}}{\log \dfrac{R_2}{R_1}}$ reprezintă conform suprafața universală de acoperire a coroanei pe semiplanul superior al planului (w). Obținem

$$d\sigma_z = d\sigma_w = \frac{|dw|}{2\rho} = \frac{\pi |dz|}{2|z| \log \dfrac{R_2}{R_1} \sin\left(\pi \dfrac{\log \dfrac{R_1}{|z|}}{\log \dfrac{R}{R_1}}\right)}$$

Folosind această expresie obținem

$$d'[f(z_1), f(z_2)] \geqslant d'[m_1(r), M_1(r)] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{m_1(r)}^{M_1(r)} \frac{\pi\, dt}{t \log \dfrac{M_1(r')}{m_1(r')} \sin\left[\pi \dfrac{\log \dfrac{M_1(r')}{t}}{\log \dfrac{M_1(r')}{m_1(r')}}\right]}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{tg}\left[\dfrac{\pi}{2} \dfrac{\log \dfrac{M_1(r')}{m_1(r)}}{\log \dfrac{M_1(r')}{m_1(r')}}\right]}{\operatorname{tg}\left[\dfrac{\pi}{2} \dfrac{\log \dfrac{M_1(r')}{M_1(r)}}{\log \dfrac{M_1(r')}{m_1(r')}}\right]}$$

De unde, ținînd seama de $d'[f(z_1), f(z_2)] \leqslant d(z_1, z_2)$

$$\frac{\operatorname{tg}\left[\dfrac{\pi}{2} \dfrac{\log \dfrac{M_1(r')}{m_1(r)}}{\log \dfrac{M_1(r')}{m_1(r')}}\right]}{\operatorname{tg}\left[\dfrac{\pi}{2} \dfrac{\log \dfrac{M_1(r')}{M_1(r)}}{\log \dfrac{M_1(r')}{m_1(r)}}\right]} \leqslant \left(\frac{r' + r}{r' - r}\right)^2$$

sau încă

$$\left[\frac{\log\frac{M_1(r')}{m_1(r')}}{r'+r}\right]^2 \leqslant \frac{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}\,\frac{\log\frac{M_1(r')}{M_1(r)}}{\log\frac{M_1(r)}{m_1(r)}}\right]}{\left[\frac{\pi}{2}\,\frac{\log\frac{M_1(r')}{M_1(r)}}{\log\frac{M_1(r')}{m_1(r)}}\right]} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\,\frac{\log\frac{M_1(r')}{m_1(r)}}{\log\frac{M_1(r)}{m_1(r')}}\right]}{\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\,\frac{\log\frac{M_1(r)}{m_1(r)}}{\log\frac{M_1(r')}{m_1(r')}}\right]} \times$$

$$\times \frac{\log\frac{M_1(r')}{M_1(r)}}{r'-r} \cdot \frac{\log\frac{m_1(r)}{m_1(r)}}{r'-r} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

Înlocuind $\log M_1(r) = M(r)$, $\log m_1(r) = m(r)$ și făcînd pe r' să tindă către r obținem

$$\left[\frac{M(r)-m(r)}{2r}\right]^2 \leqslant -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 M'(r)\cdot m'(r),$$

de unde inegalitatea anunțată.

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕНЕНИЙ ПРИНЦИПА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ

[(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе приводятся некоторые применения принципа гиперболической метрики.

Доказывается большая теорема Пикара, теорема Жюлиа и приводится ее уплотнение. Обобщается теорема деформации Кёбе и улучшается теорема Ландау об ограничении радиуса круга, в котором мероморфная функция может опускать три значения. Далее показывается, что гиперболическая метрика, ассоциированная области, зависит непрерывно от границы области; это обстоятельство используется для расширения принципа гиперболической метрики на границу области. При помощи этого расширения исследуется поведение однозначных мероморфных функций в окрестности неизолированных особенностей специального типа, а также и одна задача о распределении значений.

Наконец, устанавливается неравенство относительно максимума и минимума гармонических функций.

QUELQUES APPLICATIONS DU PRINCIPE DE LA MÉTRIQUE HYPERBOLIQUE

(RÉSUMÉ)

Cette Note indique plusieurs applications du principe de la métrique hyperbolique.

L'Auteur y démontre le grand théorème de Picard, le théorème de Julia et en indique un raffinement. Il y généralise le théorème de déformation de Koebe et améliore le théorème de Landau, concernant la limitation du rayon d'un cercle dans lequel une fonction méromorphe peut omettre trois valeurs. L'étude expose en outre que la métrique hyperbolique, associée à un domaine, dépend d'une manière continue de la frontière du domaine, et l'on utilise ce fait pour étendre à la frontière des domaines, le principe de la métrique hyperbolique. A l'aide de cette extension, l'Auteur étudie le comportement des fonctions méromorphes uniformes dans le voisinage des singularités non-isolées d'un type particulier, ainsi qu'un problème de répartition des valeurs.

Il établit enfin une inégalité se rapportant au maximum et au minimum des fonctions harmoniques.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen.* Zweite Auflage. Springer, Berlin, 1953, p. 49.
2. A. Bermant, *Ra:t'ajenie moduliarnoi funcții i zadaci o pokrîtiah.* Mat. sbornik, 1944, vol. 15 (57) nr. 2, p. 285.
3. P. Montel, *Sur les domaines formés par les points représentants les valeurs d'une fonction analytique.* Annal. Sci. de l'Ecole Norm. Sup., 1929, vol. 46, 3, p. 1.
4. E. Landau, *Zum Koebeschen Verzerungssatz.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1922, vol. 46, p. 347.
5. G. Valiron, *Sur un théorème de M. M. Koebe et Landau.* Bull. Sci. Math., 1927, t. 51, p. 34.
6. — *Sur les valeurs des fonctions holomorphes dans un cercle.* C. R. Acad. Sci., Paris, 1926, vol. 183, p. 1256.
7. P. Montel, *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes.* Paris, 1933
8. G. Valiron, *Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions méromorphes.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1925, vol. 49.
9. Y. Tumura, *Sur les théorèmes de M. Valiron et les singularités transcendantes indirectement critiques.* Proceedings of the Imperial Academy, 1941, vol. 17, p. 65.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

ALGEBRE INFINITE ASOCIATE LA ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE, OMOGENE, CU COEFICIENŢI CONSTANŢI DE ORDIN OARECARE *)

DE

M. N. ROŞCULEŢ

1. Consideraţii generale. În lucrarea de faţă ne vom ocupa de ecuaţiile diferenţiale, cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordinul n,

$$\sum_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_p} C_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_p} \frac{\partial^n U}{\partial x_0^{\alpha_0}\,\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_p^{\alpha_p}} = 0, \tag{1}$$

la care, căutînd soluţii de forma

$$U = f(\omega)$$

cu

$$\omega = x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_{p-1} x_{p-1} + \theta x_p$$

vom asocia algebre infinite de ordinul ∞^{p-1}, asociative şi comutative, construite pe corpul numerelor reale (R). Dacă presupunem pe $f(\omega)$ monogenă, pentru ca $f(\omega)$ să fie soluţie a ecuaţiei (1), este necesar ca elementele hipercomplexe φ_i şi θ să fie legate prin următoarea relaţie:

$$\sum_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_p} C_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_p}\, \varphi_0^{\alpha_0}\,\varphi_1^{\alpha_1}\ldots\varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}\,\theta^{\alpha_p} = 0$$
$$\varphi_0 = 1,\ \varphi_i^0 = 1,\ \theta^0 = 1. \tag{2}$$

Relaţia (2), în cazul ecuaţiei lui Laplace cu două variabile, este

$$\theta^2 + 1 = 0,$$

iar pentru ecuaţia (1) în două variabile,

$$\lambda_0\,\theta^n + \lambda_1\,\theta^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1}\,\theta + \lambda_n = 0. \tag{3}$$

Algebrele finite, asociative şi comutative, construite, pornind de la relaţia (3), au făcut obiectul lucrărilor [1], [2], [3], însă problemele puse erau mai simple, deoarece elementele bazei algebrei erau în număr finit.

---

*) Lucrare prezentată Institutului de matematică în şedinţa din 25 mai 1955.

Pentru numărul variabilelor mai mare decît doi, ordinul devine infinit și anume ∞^{p-1}, dacă variabilele sînt $x_0, x_1, \ldots, x_p$, deci în număr de $p+1$. Într-adevăr, relația (2), unde presupunem $C_{0,0,\ldots,0,n} \neq 0$, definește o algebră infinită de elemente ale bazei

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}, \\ \varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}\theta, \\ \vdots \\ \varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}\theta^{n-1}, \end{array}\right\} \tag{4}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}$ pot lua toate valorile întregi între $-\infty$ și $+\infty$, iar puterile lui ζ^β, $\beta \geqslant n$, fiind unic determinate de ecuația caracteristică (2). Algebra este asociativă și comutativă cu element unitate scalarul 1, și o vom considera construită pe corpul numerelor reale (R). Dacă ecuația (1) depinde numai de trei variabile independente x_0, x_1, x_2, atunci algebra este de ordinul infinit și cazul cel mai simplu este algebra infinită asociată ecuației lui Laplace în trei variabile. Avînd în vedere dificultățile ce intervin, am împărțit lucrarea în trei părți, prima privind ecuația lui Laplace cu trei variabile, a doua privind ecuația lui Laplace cu număr oarecare de variabile și, în fine, am studiat algebrele asociate ecuației (1) fără nici o restricție făcută asupra numerelor n sau p. Cercetări în această direcție am regăsit în două memorii [4], [5], ale lui P. W. K e t c h u m, însă cercetările noastre diferă de la început, deși scopul este același. Legile de înmulțire ale elementelor bazei, chiar la ecuația lui Laplace în trei variabile, necesită la P. W. K e t c h u m un tablou infinit în două direcții, ceea ce implică dificultăți în mînuirea lor. Pentru cazul general, problema este numai pusă, tocmai din cauza acestei dificultăți, care, cu elementele bazei introduse în această lucrare, dispare. De fapt, de aceste memorii am luat cunoștință după ce liniile generale ale prezentei lucrări fuseseră trasate.

I. ALGEBRĂ INFINITĂ ASOCIATĂ ECUAȚIEI $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$

2. Operații cu numere din algebră. După cum am spus, ne vom ocupa mai întîi de algebra asociată ecuației lui Laplace,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{5}$$

Ecuația caracteristică asociată ecuației (5) este

$$1 + \theta^2 + \varphi^2 = 0,$$

$$\theta^0 = 1, \ \varphi^0 = 1, \tag{6}$$

iar elementele algebrei vor fi

$$\ldots \varphi^{-n}, \theta\varphi^{-n}, \ldots, \varphi^{-1}, \theta\varphi^{-1}, 1, \theta, \ldots, \varphi^n, \theta\varphi^n, \ldots \tag{7}$$

între 1, θ și φ fiind legătura (6). Un număr din algebră are o infinitate de componente

$$\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_n + \theta\, b_n)\, \varphi^n, \tag{8}$$

iar algebra definită de (6) este echivalentă cu algebra liniară, infinită, asociativă și comutativă de elemente

$$1,\ \varepsilon_n,\ \varepsilon'_n, \qquad (n, \text{ întreg oarecare})$$

cu legile de înmulțire date de

$$\varepsilon_n\, \varepsilon_m = \varepsilon_{m+n}$$
$$\varepsilon'_n\, \varepsilon_m = \varepsilon'_{m+n}$$
$$\varepsilon'_n\, \varepsilon'_m = -\,\varepsilon_{m+n} - \varepsilon_{n+m-2}\,.$$

Într-adevăr, dacă punem

$$\varepsilon_n = \varphi^n,$$
$$\varepsilon'_n = \theta\varphi^n$$

și ținem seamă de (6), avem aceleași legi de compoziție ale elementelor ε_n, ε'_n sau φ^n, $\theta\varphi^n$.

Suma sau diferența a două numere din algebră se face după regula obișnuită.

Produsul a două numere din algebră,

$$\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} (x_n + \theta y_n)\, \varphi^n \tag{9}$$

și

$$\Omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} (X_n + \theta Y_n)\, \varphi^n$$

este evident asociativ și comutativ. Acest produs este complet determinat de (6), încît avem

$$\omega \cdot \Omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} [x_{n+p} X_{-p} - y_{n+p} Y_{-p} - y_{n+p-1} \cdot Y_{-p-1} + (x_{n+p} Y_{-p} + y_{n+p} \cdot X_{-p})\, \theta] \varphi^n \Big]. \tag{10}$$

Pentru ca operația (10) să aibă sens, este necesar ca seriile

$$S_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (x_{n+p} X_{-p} - y_{n+p} Y_{-p} - y_{n+p-1} Y_{-p-1}) \tag{11}$$

și

$$S'_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (x_{n+p} Y_{-p} + y_{n+p} X_{-p}),$$

pentru n luînd toate valorile întregi între $-\infty$ și $+\infty$, să fie convergente.

Pentru ca acest fapt să fie îndeplinit, este suficient ca seriile

$$\sigma = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (x_p + y_p),$$

$$\sigma' = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (X_p + Y_p)$$

să fie absolut convergente, deoarece seriile S_n și S'_n sînt conținute în produsul

$$\sigma \cdot \sigma' = \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} (x_p + y_p) \right] \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} (X_p + Y_p) \right],$$

oricare ar fi n. Deoarece seria cu termenul general

$$u_n = S_n + S'_n$$

este de asemenea absolut convergentă, urmează că operația (10) este închisă în algebră, dacă șirurile

$$(x_n),\ (y_n),$$

și

$$(X_n),\ (Y_n)$$

aparțin spațiului (l), [6]. În cele ce urmează, cînd vom spune că ω dat de (9) aparține lui (l), vom înțelege că (x_n) și (y_n) aparțin lui (l).

Pentru numere din algebre cu un număr finit de componente,

$$\omega = \sum_{-m}^{+m} (x_p + \theta y_p)\, \varphi^p ,$$

este de la sine înțeles că operația (10) are totdeauna sens.

Dacă considerăm acum numere

$$\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} (x_p + \theta y_p)\, \varphi^p$$

cu

$$|x_p| < M\ ,\ |y_p| < M\ ,$$

adică șirul (x_p) și (y_p) aparținînd spațiului (m), este ușor de văzut că produsul lui ω cu un număr oarecare Ω, aparținînd lui (l),

$$\Omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} (X_p + \theta\, Y_p)\, \varphi^p ,$$

are componentele de asemenea mărginite. Cînd un număr ω, dat de (9), are componentele mărginite în ansamblul lor, vom spune că el aparține lui (m). De aici, se vede că dacă

$$\Omega \in (l)\ ,\ \omega \in (m),$$

avem

$$\omega \cdot \Omega \in (m),$$

deci $\omega \in (m)$ formează un grup aditiv, mulțimea scalarilor fiind extinsă la $\Omega \in (l)$.

Putem asocia fiecărui număr ω din algebră, un determinant infinit în patru direcții care se obține din tabloul

$$\Delta_{np}(\omega) = \begin{Vmatrix} x_{n+p} & -(y_{n+p} + y_{n+p-2}) \\ y_{n+p} & x_{n+p} \end{Vmatrix} \tag{12}$$

în modul următor. Față de centru, format de Δ_{00}, elementele liniilor la dreapta se obțin dînd lui p valorile $1, 2 \ldots m, \ldots$ iar elementele liniilor la stînga lui Δ_{00} se obțin dînd lui p valorile $-1, -2, \ldots, -m, \ldots$, în timp ce elementele coloanelor în sus de Δ_{00} se obțin dînd lui n valorile $-1, -2, \ldots, -m, \ldots$ și în fine, elementele coloanelor în jos de Δ_{00} dînd lui n valorile $1, 2 \ldots m \ldots$.

Se vede imediat că fiecare linie sau coloană a acestui determinant, pe care îl vom nota $N(\omega)$, conține, cel puțin odată, toate componentele numărului ω.

$$N(\omega) = \begin{vmatrix} & & & \vdots & \vdots & & & \\ & & & x_n & -(y_n + y_{n-2}) & & & \\ & & & y_n & x_n & & & \\ & & & \vdots & \vdots & & & \\ \ldots x_{-n} & -(y_{-n} + y_{-n-2}) \ldots & & x_0 & -(y_0 + y_{-2}) \ldots & x_n & -(y_n + y_{n-2}) \ldots & \\ \ldots y_{-n} & x_{-n} & \ldots & y_0 & x_0 & \ldots y_n & x_n & \ldots \\ & & & \vdots & \vdots & & & \\ & & & x_{-n} & -(y_{-n} + y_{-n-2}) & & & \\ & & & y_{-n} & x_{-n} & & & \\ & & & \vdots & \vdots & & & \end{vmatrix} \tag{13}$$

Toate elementele determinantului $N(\omega)$ se obțin din tabloul de mai sus, deplasîndu-l paralel cu el însuși, astfel ca x_0 să rămînă permanent pe diagonala principală.

Să considerăm determinantul finit $N_{4n+2}(\omega)$ — redusul lui $N(\omega)$ — de ordinul $4n + 2$, adică, avînd coloanele $2n + 1$ și $2n + 2$, cît și liniile $2n + 1$ și $2n + 2$ cu elementele scrise efectiv în (13) și restul elementelor completate cum s-a precizat. Dacă scriem și determinantul $N_{4n+2}(\Omega)$ corespunzător lui Ω și facem produsul lor, avem imediat

$$N_{4n+2}(\omega) \cdot N_{4n+2}(\Omega) = N_{4n+2}(\omega \cdot \Omega) \tag{14}$$

oricare ar fi n.

Determinantul (13) este normal de tip Poincaré, deoarece prin împărțirea fiecărei linii cu x_0, elementele diagonalei principale sînt egale cu unitatea, însă nu satisface condiției de convergență absolută, deoarece produsul

$$\prod_{i,k}^{\infty} (1 + |a_{ik}|)$$

nu este convergent. Într-adevăr, acest produs conține de o infinitate de ori care din elementele

$$\frac{x_i}{x_0} \quad , \quad \frac{y_i}{x_0}$$

și evident seria

$$\sum_{i,k}^{\infty} |a_{ik}| \tag{15}$$

nu este convergentă.

Cum relația (14) este valabilă pentru orice n, urmează că formal se menține și pentru $n = \infty$. Determinantul $N(\omega)$ este o extindere a normei unui număr dintr-o algebră cu elementele bazei în număr finit. Într-adevăr, dacă considerăm sistemul infinit de ecuații liniare dedus din

$$\omega \cdot \Omega = 1$$

determinantul infinit $N(\omega)$ este determinantul sistemului în ipoteza că sistemul ar satisface condițiilor de aplicabilitate a regulelor obișnuite de rezolvare prin determinanți. După cum se știe, o condiție suficientă este ca tocmai seria (15) să fie convergentă, condiție care în cazul de față nu este îndeplinită.

Totuși determinantul $N(\omega)$ cu o ușoară modificare poate fi considerat ca o extensiune a noțiunii de modul. Modulul unui număr complex $z = x + iy$ este

$$N(z)^{\frac{1}{2}} = |z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

unde $\frac{1}{2}$ este inversul ordinului determinantului care definește pe $N(z)$:

$$N(z) = \begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix}.$$

În această situație, este natural să considerăm ca modulul unui număr din algebră limita

$$\mathfrak{M}(\omega) = \lim_{m \to \infty} [N(\omega)]^{\frac{1}{m}}. \tag{16}$$

Cum avem

$$N_m(\omega)\, N_m(\Omega) = N_m(\omega \cdot \Omega),$$

urmează că avem și

$$\mathfrak{M}(\omega) \cdot \mathfrak{M}(\Omega) = \mathfrak{M}(\omega \cdot \Omega)$$

și rămîne să arătăm numai că $\mathfrak{M}(\omega)$ este finit cînd (x) și (y) aparțin lui (l).

O majorantă a lui $N_{4n+2}(\omega)$ normalizat — după cum se știe — este produsul

$$H_{4n+2}(\omega) = \prod_{i,k} (1 + |a_{ik}|),$$

a_{ik} fiind elementele determinantului (13). Avem

$$\Pi(1+|a_{ik}|)=\left(1+\left|\frac{y_0}{x_0}+\frac{y_{-2}}{x_0}\right|\right)^{2n+1}\cdots\left(1+\left|\frac{y_{-2n}}{x_0}+\frac{y_{-2n-2}}{x_0}\right|\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1+\left|\frac{y_1}{x_0}+\frac{y_{-1}}{x_0}\right|\right)^{2n}\cdots\left(1+\left|\frac{y_{2n}}{x_0}+\frac{y_{2n-2}}{x_0}\right|\right)\cdot\left[\left(1+\left|\frac{y_1}{x_0}\right|\right)\left(1+\left|\frac{y_{-1}}{x_0}\right|\right)\right]^{2n}\cdots$$

$$\cdots\left[\left(1+\left|\frac{y_{2n}}{x_0}\right|\right)\left(1+\left|\frac{y_{-2n}}{x_0}\right|\right)\right]\cdot\left[\left(1+\left|\frac{x_1}{x_0}\right|\right)\left(1+\left|\frac{x_{-1}}{x_0}\right|\right)\right]^{4n}\cdots$$

$$\cdots\left[\left(1+\left|\frac{x_{2n}}{x_0}\right|\right)\left(1+\left|\frac{x_{-2n}}{x_0}\right|\right)\right]^2\cdot\left(1+\left|\frac{y_0}{x_0}\right|\right)^{2n+1}.$$

Deci,

$$\mathcal{N}_{4n+2}(\omega)\leqslant\left[|x_0|^{4n+2}\,\Pi(1+|a_{ik}|)\right]^{\frac{1}{4n+2}}=$$

$$|x_0|\left(1+\left|\frac{y_0}{x_0}+\frac{y_{-2}}{x_0}\right|\right)^{\frac{1}{2}}\cdots\left(1+\left|\frac{y_{-2n}}{x_0}+\frac{y_{-2n-2}}{x_0}\right|\right)^{\frac{1}{4n+2}}\cdot$$

$$\cdot\left(1+\left|\frac{y_1}{x_0}+\frac{y_{-1}}{x_0}\right|\right)^{\frac{2n}{4n+2}}\cdots\left(1+\left|\frac{y_{2n}}{x_0}+\frac{y_{2n-2}}{x_0}\right|\right)^{\frac{1}{4n+2}}\cdot$$

$$\cdot\left[\left(1+\left|\frac{y_1}{x_0}\right|\right)\left(1+\left|\frac{y_{-1}}{x_0}\right|\right)\right]^{\frac{2n}{4n+2}}\cdots\left[\left(1+\left|\frac{y_{2n}}{x_0}\right|\right)\left(1+\left|\frac{y_{-2n}}{x_0}\right|\right)\right]^{\frac{1}{4n+2}}\cdot$$

$$\cdot\left[\left(1+\left|\frac{x_1}{x_0}\right|\right)\left(1+\left|\frac{x_{-1}}{x_0}\right|\right)\right]^{\frac{4n}{4n+2}}\cdots\left[\left(1+\left|\frac{x_1}{x_0}\right|\right)\left(1+\left|\frac{x_{-1}}{x_0}\right|\right)\right]^{\frac{2}{4n+2}}\cdot\left(1+\left|\frac{y_0}{x_0}\right|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cum însă

$$1+\left|\frac{y_0}{x_0}+\frac{y_{-2}}{x_0}\right|\leqslant\left(1+\left|\frac{y_0}{x_0}\right|\right)\left(1+\left|\frac{y_{-2}}{x_0}\right|\right)$$

avem și

$$\mathcal{N}_{4n+2}(\omega)\leqslant|x_0|\cdot\left[\left(1+\left|\frac{x_1}{x_0}\right|\right)\left(1+\left|\frac{x_{-1}}{x_0}\right|\right)\right]^{\frac{4n}{4n+2}}\cdots$$

$$\cdots\left[\left(1+\left|\frac{x_{2n}}{x_0}\right|\right)\left(1+\left|\frac{x_{-2n}}{x_0}\right|\right)\right]^{\frac{2}{4n+2}}\cdot\left(1+\left|\frac{y_0}{x_0}\right|\right)\cdot\left[\left(1+\left|\frac{y_1}{x_0}\right|\right)\right.$$

$$\left.\left(1+\left|\frac{y_{-1}}{x_0}\right|\right)\right]^{\frac{2n}{4n+2}+\frac{1}{2}}\cdots\left[\left(1+\left|\frac{y_{2n+2}}{x_0}\right|\right)\left(1+\left|\frac{y_{-2n-2}}{x_0}\right|\right)\right]^{\frac{3}{4n+2}}\leqslant$$

$$\leqslant|x_0|\left(1+\left|\frac{y_0}{x_0}\right|\right)\prod_{\substack{-2n-2\\ i\neq 0}}^{2n+2}\left[\left(1+\left|\frac{x_i}{x_0}\right|\right)\left(1+\left|\frac{y_i}{x_0}\right|\right)\right]$$

și deoarece seria

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{y_n}{x_0}+\frac{x_n}{x_0}\right)$$

este absolut convergentă, urmează că $\mathfrak{N}(\omega)$ are o majorantă finită, deci este finit.

Prin $\mathfrak{N}(\omega)$ vom înțelege totdeauna limita (16) și avem

$$\mathfrak{N}(\omega)\cdot\mathfrak{N}(\Omega)=\mathfrak{N}(\omega\cdot\Omega).$$

3. Subalgebra B_1. Un număr din algebră se scrie sub forma

$$\omega=\xi+\theta\eta,$$

cu

$$\xi=\sum_{-\infty}^{+\infty}\varphi^n\ x_n$$

$$\eta=\sum_{-\infty}^{+\infty}\varphi^n\ y_n.$$

Mulțimea numerelor ξ sau η determină în algebra A_1 o subalgebră B_1, cum se poate verifica imediat. Elementele algebrei sînt

$$\varphi^n \qquad (n=\ldots,\ -m,\ldots -1,0,1,\ldots,\ m,\ldots)$$

cu legile de compoziție

$$\varphi^n\cdot\varphi^m=\varphi^{n+m} \tag{17}$$

asociative și comutative.

Produsul a două numere din algebră

$$\xi=\sum_{-\infty}^{+\infty}x_n\varphi^n$$

și

$$\chi=\sum_{-\infty}^{+\infty}X_n\ \varphi^n$$

este dat de

$$\xi\chi=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_{n+k}\,X_{-k}\right)\varphi^n, \tag{18}$$

încît norma unui număr din algebră este determinantul circulant infinit în patru direcții

$$N(\xi)=\begin{vmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\ldots\ x_{-n} & x_{-n+1}\ldots & x_{-1} & x_0 & x_1\ldots & x_{n-1} & x_n\ldots \\
\ldots\ x_{-n-1} & x_{-n}\ \ldots & x_{-2} & x_{-1} & x_0\ldots & x_{n-2} & x_{n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}$$

Din el se obține imediat că

$$\mathfrak{N}(\xi \cdot \chi) = \mathfrak{N}(\xi) \cdot \mathfrak{N}(\chi)$$

și

$$\mathfrak{N}(\xi) \leqslant \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_n|. \tag{19}$$

În algebra (B_1), în afară de modulul $\mathfrak{N}(\xi)$, există și alte expresii reale care se bucură de proprietatea (19).

Într-adevăr, să asociem fiecărui număr ξ din B_1 expresia reală

$$N_1(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n. \tag{20}$$

Avem

$$N_1(\xi \cdot \chi) = N_1(\xi) \cdot N_1(\chi),$$

relație efectivă, întrucît $N_1(\xi)$ și $N_1(\chi)$, oricare ar fi ξ și χ în B_1, sînt absolut convergente. Vom numi un astfel de număr subnormă. Dacă

$$N_1(\xi) = 0,$$

atunci pentru orice număr ζ din idealul generat de ξ

$$I(\zeta) = \{\zeta \mid \zeta = \omega \cdot \xi;\ \xi \in B_1,\ \omega \in B_1,\ N_1(\xi) = 0\},$$

avem

$$N_1(\zeta) = 0.$$

În mod analog, putem atașa la idealul generat de un număr ψ din B_1, cu

$$N_1(\psi) \neq 0,$$

$$\psi = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n \varphi^n,$$

$$I(\psi) = \{\gamma \mid \gamma = \omega \cdot \psi;\ \omega \in B_1,\ \psi \in B_1,\ N_1(\psi) \neq 0\},$$

un șir de numere (α_n), mărginite în ansamblul lor, astfel ca

$$N_{(\alpha_n)}(\psi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n b_n = 0. \tag{21}$$

Cum se poate verifica imediat, pentru orice număr $\gamma \in I(\psi)$,

$$\gamma = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \varphi^n,$$

avem

$$N_{\{\alpha_n\}}(\gamma) = 0.$$

Vom spune că norma definită de (20) este de pondere $\{1\}$, iar norma definită de (21) este de pondere $\{\alpha_n\}$.

În legătură cu cele de mai sus, se obține din teoria ecuațiilor liniare infinite următorul rezultat. Dacă numărul

$$\xi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \varphi^n$$

are norma nulă pentru o infinitate de ponderi,

$$\{\sigma_{n,p}\}$$

astfel ca determinantul infinit în patru direcții

$$|\sigma_{n,p}|$$

să fie absolut convergent și diferit de zero, atunci $x_n = 0$ pentru orice n.

Să considerăm acum șirul de numere reale sau complexe

$$\{\sigma_n\}$$

care verifică relația

$$\sigma_n \sigma_m = \sigma_{n+m}.$$

Numărul

$$N_{\{\alpha_n\}}(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n \sigma_n$$

este o subnormă a numărului ω. Într-adevăr, dacă

$$\omega \cdot \Omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} x_{n-k} X_k \right) \varphi^n \qquad (x),\ (X) \in (l)$$

avem

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \sigma_n \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \alpha_n \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_n \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{n-k} X_k \right]$$

cum se poate verifica imediat.

Dacă

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \alpha_n = 0,$$

este evident că pentru orice produs $\omega \cdot \Omega$, Ω fiind oarecare în algebra B_1 această proprietate se menține. Numerele ω, pentru care

$$N_{\{\alpha_n\}}(\omega) = 0,$$

generează un ideal în B_1, pe care îl vom numi un divizor al lui zero al algebrei B_1.

Este natural acum să introducem numărul

$$M(\omega) = \lim_{p \to \infty} \left[\prod_p \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \sigma_{n,p} \right) \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{22}$$

pe care îl vom numi tot modulul numărului ω, deși identitatea cu $\mathfrak{M}(\omega)$ este greu de stabilit. Numerele $\sigma_{n,p}$ se bucură de proprietatea

$$\sigma_{n,p} \cdot \alpha_{m,p} = \sigma_{m+n,p},$$

deci sînt rădăcini ale unității. Prin urmare, produsul care determină pe $M(\omega)$ este format din toate elementele distincte

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x_n \cdot \sigma_{n,p},$$

unde $\alpha_{1,p}^{q} = 1$, pentru q oarecare, întreg și pozitiv. Deci

$$\alpha_{1,p} = 1, -1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, i, -i, \ldots$$

Avem, evident,

$$M(\omega) \cdot M(\Omega) = M(\omega \cdot \Omega)$$

și

$$M(\omega) \leqslant \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_n|,$$

deoarece

$$|\alpha_{n,p}| = 1.$$

O expresie analogă se introduce și pentru algebra A_1. Într-adevăr, numărul

$$N_s(\omega) = U_s + \sqrt{-\alpha_{1,s}^2 - 1} \cdot V_s,$$

unde

$$U_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n,s}\, x_n, \tag{23}$$

$$V_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n,s}\, y_n,$$

este o subnormă a algebrei A_1 și se poate verifica aceeași proprietate

$$N_s(\omega)\, N_s(\Omega) = N_s(\omega, \Omega),$$

$$N_s(\omega \cdot \Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} (x_{n+p} X_{-p} - y_{n+p} Y_{-p} - y_{n+p-1} Y_{-p-1})\, \alpha_{n,s} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{-\alpha_{1,s}^2 - 1} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (x_{n+p} Y_{-p} + y_{n+p} X_{-p})\, \alpha_{n,s} \right] =$$

$$= \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \alpha_{n,s} + \sqrt{-\alpha_{1,s}^2 - 1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \alpha_{n,s} \right)$$

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \alpha_{n,s} + \sqrt{-\alpha_{1,s}^2 - 1} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \alpha_{n,s} \right);$$

însă, avem

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \alpha_{n,s} \right) \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} X_n \alpha_{n,s} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_{n+p} X_{-p} \right) \alpha_{n,s}$$

și

$$- (\alpha_{1,s}^2 + 1) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \alpha_{n,s} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \alpha_{n,s} \right) =$$

$$= - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} (y_{n+p} Y_{-p} + y_{n+p-1} Y_{-p-1}) \right),$$

ceea ce demonstrează enunțul, deoarece coeficientul lui $\sqrt{-\alpha_{1,s}^2 - 1}$ din partea a doua se obține imediat.

Vom numi și în această situație modulul lui ω în A_1, numărul

$$M(\omega) = \lim_{s\to\infty}\left[\prod_s\left[\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \alpha_{n,s}\right)^2 + (\alpha_{1,s}^2+1)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \alpha_{n,s}\right)^2\right]\right]^{\frac{1}{2s}} \tag{24}$$

și avem, și în această situație,

$$M(\omega \cdot \Omega) = M(\omega)\cdot M(\Omega).$$

Numerele ω din algebra A_1 (sau B_1) pentru care avem

$$N_s(\omega) = 0$$

determină un ideal în A_1 (sau B_1), care este un divizor al lui zero al algebrei. Algebra A_1 (sau B_1) are, așadar, o infinitate de divizori ai lui zero.

Construcția unui număr ω, care aparține unui divizor al lui zero, se face în modul următor. Fie numărul ω în B_1 pentru care dorim să avem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \alpha^n = 0, \qquad (\alpha_n = \alpha^n)$$

$$\alpha^q = 1$$

$$\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \varphi^n.$$

Dacă Ω este un număr oarecare din B_1,

$$\Omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n \varphi^n,$$

un număr ω este dat de

$$\omega = (\varphi - \alpha)\,\Omega,$$

deci

$$x_n = X_{n-1} - \alpha X_n$$

și

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n x_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha^n X_{n-1} - \alpha^{n+1} X_n) = 0.$$

Fie acum ω un număr din A_1 pentru care dorim să avem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_n \alpha^n + \sqrt{-1-\alpha^2}\, y_n \alpha^n) = 0.$$

$$\alpha^q = 1$$

Dacă

$$\Omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n \varphi^n + \sum_{-\infty}^{+\infty} Y_n \varphi^n \theta,$$

atunci un număr ω este dat tot de

$$\omega = (\varphi - \alpha)\ \Omega.$$

4. Inversul unui număr din algebră. Dacă căutăm un număr Ω care să verifice relația

$$\Omega = \frac{1}{\omega} = \sum_{n=0}^{+\infty} (X_n + \theta Y_n)\, \varphi^n,$$

pentru numărul redus

$$\omega = x + \theta\, y + \varphi\, z,$$

obținem o soluție unică dată de sistemul

$$\begin{aligned} xX_0 - yY_0 &= 1, \\ xY_0 + yX_0 &= 0, \\ xX_1 + zX_0 - yY_1 &= 0, \\ xY_1 + zY_0 + yX_1 &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ xX_n + zX_{n-1} - yY_n - yY_{n-2} &= 0, \\ xY_n + zY_{n-1} + yX_n &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{25}$$

care se poate rezolva din aproape în aproape. Într-adevăr,

$$X_0 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad Y_0 = \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

$$X_1 = \frac{z(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad Y_1 = \frac{2xyz}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dacă Ω are toate componentele nenule,

$$\Omega = \frac{1}{\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (X_n + \theta\ Y_n)\, \varphi^n,$$

sîntem conduși la relațiile

$$\begin{aligned} xX_n - yY_n - yY_{n-2} + zX_{n-1} &= \begin{cases} 0 & n \neq 0, \\ 1 & n = 0, \end{cases} \\ yX_n + xY_n + zY_{n-1} &= 0, \end{aligned} \tag{26}$$

n luînd valori întregi între $-\infty$ și $+\infty$.

Sistemul astfel obținut nu are o soluție unică și definește o clasă de funcții X_n și Y_n, ale căror proprietăți le vom studia mai tîrziu.

Tot astfel, dacă Ω are numai componente cu indici negativi,

$$\frac{1}{\omega} = \sum_{n=0}^{-\infty} (X_p + \theta Y_p)\, \varphi^p,$$

soluția este unică. Rezultatul este același dacă suma este luată de la n la $-\infty$ cu n fix, deoarece toți X_p și $Y_p\, p > 0$ sînt nuli.

Din (26) avem

$$\begin{aligned} yY_0 &= 0, \\ xY_0 + yX_0 &= 0, \\ zX_0 - yY_{-1} &= 0, \\ xX_0 - yY_0 + zX_{-1} &= 1, \\ zY_0 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ xX_{-n} + y(Y_{-n} + Y_{-n-2}) + zX_{-n-1} &= 0, \\ xY_{-n} + yX_{-n} + zY_{-n+1} &= 0, \end{aligned} \tag{27}$$

care poate fi rezolvat din aproape în aproape şi ne dă

$$X_0 = Y_0 = Y_{-1} = 0$$

$$X_{-1} = \frac{z}{y^2 + z^2}, \quad Y_{-2} = \frac{-y}{y^2 + z^2}.$$

Dacă notăm cu $\overline{X}$ şi $\overline{Y}$ sumele (presupuse convergente, deci $\omega \in (l)$

$$\overline{X} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n, \quad \overline{Y} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n,$$

cu X_n şi Y_n date de relaţiile (25), le putem calcula şi avem

$$(x + z)\overline{X} - 2y\overline{Y} = 1,$$

$$y\overline{X} + (x + z)\overline{Y} = 0,$$

care ne dă imediat

$$\overline{X} = \frac{x + z}{(x + z)^2 + 2y^2},$$

$$\overline{Y} = \frac{-y}{(x + z)^2 + 2y^2}.$$

Se verifică uşor că $\overline{X}$ şi $\overline{Y}$ sînt funcţii armonice. Însă, în algebră inversul este unic şi pentru ca Ω dat de (25), (26) sau (27) să fie un invers, trebuie să aparţină lui (l). De aici deducem că dacă o soluţie Ω_i dată de (26) aparţine lui (l) într-o regiune (D_i) a spaţiului, ea este unică în acea regiune. Dacă (S_i) este suprafaţa care mărgineşte pe (D_i) şi $(D_i + S_i)$ epuizează punctele pentru care soluţia respectivă Ω_i aparţine lui (l), urmează ca altă soluţie Ω_j, definită ca invers într-un domeniu (D_j) mărginită de (S_j), trebuie să coincidă cu Ω_i pe frontiera comună domeniilor (D_i) şi (D_j) dacă au frontiera comună. Urmează, în acest caz, că una este prelungirea celeilalte în domeniile respective.

5. Serii de puteri. Funcţia exponenţială

$$e^{\omega} = \exp \omega \tag{28}$$

este definită ca și în cazurile cunoscute prin relația funcțională

$$\exp(\omega_1 + \omega_2) = \exp \omega_1 \cdot \exp \omega_2 .$$

Vom arăta că pentru

$$\omega = x + \theta y + \varphi z$$

ori care ar fi x, y, z operația $\exp \omega$ are sens. Într-adevăr,

$$\exp \omega . = \exp x . \exp(\varphi z) \cdot \exp(\theta y).$$

Deoarece

$$\exp \varphi z = 1 + \varphi \frac{z}{1!} + \varphi^2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + \varphi^n \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{28'}$$

este evident că aparține lui (l) oricare ar fi z, deoarece seria $\exp z$ are raza de convergență infinită.

Rămîne să arătăm că $\exp(\theta y)$ aparține lui (l) oricare ar fi y finit. Avem

$$\exp(\theta y) = 1 + \frac{\theta y}{1!} + \frac{\theta^2}{2!} y^2 + \ldots + \frac{(^n}{n!} y^n + \ldots =$$

$$1 + \frac{-1-\varphi^2}{2!} y^2 + \frac{(-1-\varphi^2)^2}{4!} y^4 + \ldots + \frac{(-1-\varphi^2)^m}{(2m)!} y^{2m} + \ldots \tag{29}$$

$$+ \theta \left[\frac{y}{1!} + \frac{-1-\varphi^2}{3!} y^3 + \ldots + \frac{(-1-\varphi^2)^m}{(2m+1)!} y^{2m+1} + \ldots \right].$$

Seria cu termenul general

$$u_n = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!} |y|^n$$

este o majorantă a seriei modulelor tuturor termenilor din (29) și prin urmare (29) are sens pentru orice y. Deci, operația $\exp(\omega)$ are sens pentru orice ω de componente finite.

Partea reală a lui $\exp \omega$ este

$$R(\exp \omega) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2 - z^2}{2!} + \frac{x^3 - 3xz}{3!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!} \left(x^n - \frac{n!}{2!\,(n-2)!} x^{n-2} z + \frac{n!}{4!\,(n-4)!} x^{n-4} z^4 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^k \frac{n!}{(2k)!\,(n-2k)!} (x^{n-2k} z^{2k} + \ldots) + \ldots \right.$$

și este o funcție armonică. În particular, deoarece nu depinde de y, este chiar o funcție armonică în plan.

Să considerăm acum seria

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^n + \ldots \tag{30}$$

și să găsim o regiune de convergență a ei. Avem

$$\omega^n = (x + \varphi z + \theta y)^n = (y + \varphi z)^n + C_n^1 (x + \varphi z)^{n-1} \cdot \theta \cdot y + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k \cdot (x + \varphi z)^{n-k} \cdot \theta^k \cdot y^k + \ldots + C_n^n \cdot \theta^n \cdot y^n \qquad (31)$$

dacă luăm dreapta ce trece prin originea axelor $O\ x\ y\ z$,

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

și înlocuind în (31) pe y și z cu $\frac{\beta}{\alpha}\ x$ și $\frac{\gamma}{\alpha}\ x$ o expresie majorantă a modulelor termenilor ce intervin în (30) este dată de

$$\sigma_n = \left[\left(1 + \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|\right)^n + C_n^1\left(1 + \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|\right)^{n-1}\frac{\beta}{\alpha} + C_n^2\left(1 + \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|\right)^{n-2} 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + C_n^{2k}\left(1 + \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|\right)^{n-2k} \cdot 2^k \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^{2k} + \ldots + C_n^n \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n 2^{\frac{n}{2}}\right] |x|^n,$$

deci avem și

$$\sigma_n \leqslant \left(1 + \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| + \sqrt{2}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right)^n |x|^n.$$

Prin urmare, pentru punctele ω situate în interiorul suprafeței definită în primul octant, de ecuații

$$x = \frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\gamma| + \sqrt{2}|\beta|},$$
$$y = \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\gamma| + \sqrt{2}|\beta|}, \qquad (32)$$
$$z = \frac{|\gamma|}{|\alpha| + |\gamma| + \sqrt{2}|\beta|},$$

și prelungite în celelalte octante prin simetrie, seria (30) este absolut convergentă. Suprafața (32) nu conține în interior toate punctele interioare unei sfere de rază unitatea, deoarece pentru $x = z = 0$ și $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ seria (30) este divergentă. Considerațiile de mai sus sînt valabile pentru orice serie de tipul (28) sau (30), oricare ar fi numărul

$$\omega = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (x_p + \theta\ y_p)\ \varphi^p,$$

aparținînd lui (l). Rezultatele de mai sus ne îndreptățesc să asociem, în general, totdeauna unei serii de forma

$$S(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n$$

cu a și ω aparținînd lui (l) o regiune (D) din spațiul cu o infinitate de dimensiuni al variabilei ω, care să conțină mai mult decît un punct, în care $S(\omega)$ să aparțină lui (l).

În cele ce urmează, va fi necesar să extindem clasa acestor serii

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (U_n + \theta\ V_n)\ \varphi^n ,$$

cerînd numai ca într-o regiune (D) a lui ω, U_n și V_n să fie mărginite în ansamblul lor, adică $S(\omega)$ să aparțină lui (m). Înmulțirea unei astfel de serii cu un număr din algebră, cu un număr finit de componente, nu-i schimbă apartenența.

Dacă avem două serii

$$S_l(\omega),$$

$$\sum_m(\omega),$$

una aparținînd lui (l) și cealaltă lui (m), într-o aceeași regiune (D) a lui ω, produsul

$$S_l(\omega).\ \sum_m(\omega)$$

ne conduce la o serie aparținînd lui (m).

6. Funcții monogene de variabila ω. O funcție de o variabilă hipercomplexă

$$\omega = x + \theta\ y + \varphi\ z \tag{33}$$

are o infinitate de componente

$$f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [U_n\ (x,\ y,\ z) + \theta\ V_n\ (x,\ y,\ z)]\varphi^n, \tag{34}$$

pe care le vom numi funcții conjugate. Indicele n are importanță în legăturile dintre ele, deoarece noțiunea de conjugat implică și ordonarea lor după mulțimea n a numerelor întregi. În cele ce urmează, vom presupune că funcțiile U_n și V_n sînt mărginite și derivabile pînă la ordinul doi dintr-un domeniu (D) din spațiu fără însă să cerem ca seriile

$$\sum_{-\infty}^{\infty} U_n\ ,\ \sum_{-\infty}^{+\infty} V_n$$

să fie convergente în (D). Vom spune că $f(\omega)$ este monogenă într-un punct $M\ (x,\ y,\ z)$ al lui (D) dacă diferențiala exterioară a lui $f(\omega)\ d\omega$ este nulă în M, adică

$$[df(\omega)\ d\omega]_M = 0, \tag{35}$$

Deoarece avem

$$df(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\ dU_u\ (x,\ y,\ z) + \theta\ d\ V_n\ \ (x,\ y,\ z)]\ \varphi^n,$$

condiția (35) se transformă în real în

$$dU_n\ dx - [dV_n + dV_{n-2}]\ dy + dU_{n-1}\ dz = 0,$$

$$dU_n\ dy + dV_n\ dx + dV_{n-1}\ dz = 0,$$

care sînt echivalente cu

$$\frac{\partial U_n}{\partial x} = \frac{\partial U_{n+1}}{\partial z} = \frac{\partial V_n}{\partial y}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial z} = \frac{\partial V_{n-1}}{\partial x}, \tag{36'}$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial y} = -\frac{\partial V_n}{\partial x} - \frac{\partial V_{n-2}}{\partial x} \tag{36''}$$

n luînd valori întregi de la $-\infty$ la $+\infty$.

Condițiile (36) de monogeneitate le obținem și dacă luăm derivatele lui $f(\omega)$ cînd ω variază numai după x, apoi numai după y și în fine numai după z și le egalăm.

Funcțiile U_n și V_n definite de (36) sînt soluții ale ecuației lui Laplace în variabilele x, y, z. Într-adevăr, din (36) avem

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_n}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V_{n-1}}{\partial y \partial z},$$

iar din (36''),

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 V_n}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_{n-2}}{\partial x \partial y};$$

adunîndu-le obținem

$$\Delta U_n = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_{n-1}}{\partial z} - \frac{\partial V_{n-2}}{\partial x}\right),$$

însă partea a doua este nulă în virtutea lui (36') și avem prin urmare

$$\Delta U_n = 0,$$

oricare ar fi n. Pentru V_n, rezultatul este același.

Este ușor de văzut că monogeneitatea atrage următoarea proprietate: integrala lui $f(\omega)$ pe o curbă închisă situată în spațiu, care prin deformări continue, reducîndu-se la un punct, nu întîlnește singularități ale lui $f(\omega)$, este nulă. Să mai remarcăm însă că avem și

$$\iint_S f(\omega)\,[dy\ dz + 0\ dz\ dx + \varphi\ dx\ dy] = 0, \tag{37}$$

(S) fiind o suprafață închisă suficient de regulată pentru a se aplica formulele stokiene, iar $f(\omega)$ fiind monogenă într-o regiune (D) care conține pe (S). Dacă înlocuim pe $f(\omega)$ cu $f'(\omega)$ avem

$$\iint_S f'(\omega)\,[dy\ dz + 0\ dz\ dx + \varphi\ dx\ dy] =$$

$$= \iint_S \frac{\partial f(\omega)}{\partial x} dy\ dz + \frac{\partial f(\omega)}{\partial y} dz\ dx + \frac{\partial f(\omega)}{\partial z} dx\ dy,$$

din care obținem imediat

$$\iint_S \frac{df(\omega)}{dn}\, ds = 0, \tag{38}$$

ds fiind elementul de arie pe suprafața (S).

Formulele (37) și (38) s-au obținut fără ca $f(\omega)$ să aparțină lui (l) ci numai lui (m). În real, relația (37) se scrie

$$\iint_S U_n\, dy\, dz - (V_{n+1} + V_{n-1})\, dz\, dx + U_{n-1}\, dx\, dy = 0$$

și

$$\iint_S V_n\, dy\, dz + U_n\, dz\, dx + V_{n-1}\, dx\, dy = 0,$$

iar (38) în real este cunoscuta formulă a lui Green

$$\iint_S \frac{dU}{dn}\, ds = 0.$$

Fie

$$S(x, y, z, \theta, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (U_n\, \varphi^n + V_n\, \theta\varphi^n)$$

o funcție monogenă ale cărei componente verifică relațiile (36), (36′) și (36″). Produsul lui $S(x, y, z, \theta, \varphi)$ cu $\omega = x + \theta y + \varphi z$ este de asemenea funcție monogenă. Avem

$$S.\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (U_n^*\, \varphi^n + V_n^*\, \theta\, \varphi^n),$$

din care obținem

$$U_n^* = x\, U_n - (V_n + V_{n-2})\, y + U_{n-1}\, z$$

$$V_n^* = U_n\, y + x\, V_n + z\, V_{n-1}$$

și se vede imediat că verifică relațiile (36), (36′) și (36″). De aici deducem că produsul lui S cu ω^n ne conduce la același rezultat.

Rezultatul se extinde pentru două funcții oarecare S și $\overline{S}$ aparținînd însă lui (l) în același domeniu (D). Într-adevăr, din

$$S^* = S\,.\,\overline{S} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n\, \varphi^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n\, \theta\, \varphi^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{U}_n\, \varphi^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{V}_n\, \theta\varphi^n\right)$$

obținem

$$U_n^* \sum_{p=-\infty}^{+\infty} = (U_{n+p}\, \overline{U}_{-p} - V_{n+p}\, \overline{V}_{-p} - V_{n+p-1}\, \overline{V}_{-p-1}),$$

$$V_n^* = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (U_{n+p}\, \overline{V}_{-p} + V_{n+p}\, \overline{U}_{-p}).$$

Presupunînd că putem deriva termen cu termen seria care dă pe U_n^* și V_n^*, obținem

$$\frac{\partial U_n^*}{\partial x} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial U_{n+p}}{\partial x} \overline{U}_{-p} + U_{n+p} \frac{\partial \overline{U}_{-p}}{\partial x} - \frac{\partial V_{n+p}}{\partial x} \overline{V}_{-p} - \right.$$

$$\left. - V_{n+p} \frac{\partial \overline{V}_{-p}}{\partial x} - V_{n+p-1} \frac{\partial \overline{V}_{-p-1}}{\partial x} - \frac{\partial V_{n+p-1}}{\partial x} \overline{V}_{-p-1} \right)$$

și

$$\frac{\partial V_n^*}{\partial y} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial U_{n+p}}{\partial y} \overline{V}_{-p} + U_{n+p} \frac{\partial \overline{V}_p}{\partial y} + \frac{\partial V_{n+p}}{\partial y} \overline{U}_p + V_{n+p} \frac{\partial \overline{U}_{-p}}{\partial y} \right).$$

Cum din (36) trebuie să avem

$$\frac{\partial U_n^*}{\partial x} = \frac{\partial V_n^*}{\partial y},$$

sîntem conduși la

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\overline{U}_p \left(\frac{\partial U_{n+p}}{\partial x} - \frac{\partial V_{n+p}}{\partial y} \right) + U_{n+p} \left(\frac{\partial \overline{U}_{-p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{V}_{-p}}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. - V_{n+p} \left(\frac{\partial \overline{V}_p}{\partial x} + \frac{\partial \overline{U}_{-p}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{V}_{-p-2}}{\partial x} \right) - \overline{V}_{-p} \left(\frac{\partial V_{n+p}}{\partial x} + \frac{\partial U_{n+p}}{\partial y} + \frac{\partial V_{n+p-2}}{\partial x} \right) \right] = 0$$

relație nulă, deoarece fiecare paranteză este nulă în virtutea lui (36).

Putem spune deci că, în anumite condiții, relațiile de monogeneitate sînt închise relativ la operația de adunare și de înmulțire.

Am văzut că $\frac{1}{\omega}$ definește o clasă de numere hipercomplexe cu o infinitate de componente X_n și Y_n, legate prin relațiile

$$x X_n - y Y_n - y Y_{n-2} + z X_{n-1} = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0, \end{cases}$$

$$y X_n + x Y_n + z Y_{n-1} = 0.$$

Putem arăta că dacă Y_{n-p}, X_{n-p}, $p \geqslant 1$ sînt armonice conjugate, în ordinea dată de indici, atunci și X_n și Y_n sînt armonice.

Din (26) avem

$$X_n = \frac{xy\, Y_{n-2} - xz\, X_{n-1} - yz\, Y_{n-1}}{x^2 + y^2},$$

$$Y_n = \frac{yz\, X_{n-1} - y^2\, Y_{n-2} - xz\, Y_{n-1}}{x^2 + y^2}.$$

Pentru a demonstra aceasta, este suficient a arăta că verifică relațiile (36), (36′) și (36″)

$$\frac{\partial X_n}{\partial x} = \frac{-2x\,[xyY_{n-2} - xzX_{n-1} - yzY_{n-1}]}{(x^2+y^2)^2} +$$

$$+ \frac{(x^2+y^2)\left[yY_{n-2} + xy\cdot\frac{\partial Y_{n-2}}{\partial x} - zX_{n-1} - xz\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x} - yz\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial x}\right]}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Y_n}{\partial y} = \frac{[-2y\;yz\,X_{n-1} - y^2Y_{n-2} - xzY_{n-1}]}{(x^2+y^2)^2} +$$

$$+ \frac{(x^2+y^2)\left[zX_{n-1} + yz\frac{\partial X_{n-1}}{\partial y} - 2yY_{n-2} - y^2\frac{\partial Y_{n-2}}{\partial y} - xz\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial y}\right]}{(x^2+y^2)}.$$

Egalînd

$$\frac{\partial X_n}{\partial x} = \frac{\partial Y_n}{\partial y}, \qquad (\alpha)$$

obținem

$$yY_{n-2} + xy\cdot\frac{\partial Y_{n-2}}{\partial x} - xz\cdot\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x} - yz\cdot\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial x} =$$

$$= yz\cdot\frac{\partial X_{n-1}}{\partial y} - y^2\cdot\frac{\partial Y_{n-2}}{\partial y} - xz\cdot\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial y};$$

deoarece Y_{n-2} este omogenă și de grad -1, avem relația

$$Y_{n-2} = -\left(x\frac{\partial Y_{n-2}}{\partial x} + y\frac{\partial Y_{n-2}}{\partial y} + z\frac{\partial Y_{n-2}}{\partial z}\right)$$

și înlocuind, obținem egalitatea (α), ținînd seama însă de (36).

Pentru a completa demonstrația, trebuie să mai arătăm și

$$\frac{\partial X_n}{\partial z} = \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial y}, \qquad (\beta)$$

$$\frac{\partial Y_n}{\partial z} = \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial x}, \qquad (\gamma)$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial x} = -\frac{\partial Y_n}{\partial x} - \frac{\partial Y_{n-2}}{\partial x}. \qquad (\delta)$$

Pentru (β), trebuie să avem

$$xy\frac{\partial Y_{n-2}}{\partial z} - x\cdot X_{n-1} - xz\cdot\frac{\partial X_{n-1}}{\partial z} - y\cdot Y_{n-1} - yz\cdot\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial z} = (x^2+y^2)\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial y},$$

însă avem și

$$X_{n-1} = -x \cdot \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x} - y \frac{\partial X_{n-1}}{\partial y} - z \frac{\partial X_{n-1}}{\partial z}$$

$$Y_{n-1} = -x \cdot \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial x} - y \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial y} - z \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial z}$$

și înlocuindu-le, egalitatea se verifică, deoarece se grupează în modul următor

$$x^2 \left(\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial y} \right) + xy \left(\frac{\partial X_{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial Y_{n-2}}{\partial z} \right) = 0.$$

Pentru (γ) obținem

$$yX_{n-1} + yz \frac{\partial X_{n-1}}{\partial z} - y^2 \frac{\partial Y_{n-2}}{\partial z} - xY_{n-1} - xz \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial z} = (x^2 + y^2) \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial x};$$

folosind și aici relația lui Euler pentru Y_{n-1} și X_{n-1}, rezultatul se grupează astfel:

$$xy \left(\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial y} = \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x} \right) - y^2 \left(\frac{\partial X_{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial Y_{n-2}}{\partial z} + \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial x} \right) = 0.$$

Relația (δ) se demonstrează în mod analog.

Se poate arăta că dacă X_{n+p}, Y_{n+p-1} ($p > 0$) sînt funcții armonice conjugate, în ordinea dată de indici, atunci și X_n și Y_{n-1} sînt armonice. Din (26) avem

$$X_{-n-1} = \frac{1}{y^2 + z^2} (yz\, Y_{-n} - xz\, X_{-n} - xy\, Y_{-n-1}),$$

$$Y_{-n-2} = \frac{1}{y^2 + z^2} (xy\, X_{-n} - y^2\, Y_{-n} - xz\, Y_{-n-1}),$$

și se demonstrează în același mod că sînt funcții armonice conjugate. De aici, deducem că

$$\frac{1}{\omega},$$

admițînd descompunerea

$$\frac{1}{\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (X_n + \theta Y_n)\, \varphi^n,$$

cu indici numai pozitivi sau negativi, are componentele funcții armonice. Prin urmare, seria infinită

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, \omega^n,$$

pentru ω aparținînd regiunii unde $\frac{1}{\omega}$ este un invers în algebră, este o soluție a ecuației lui Laplace, iar componentele sale sînt funcții armonice.

Să presupunem că ω nu mai are forma redusă, ci are o infinitate de componente

$$\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \varphi^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \theta \varphi^n.$$

Anulînd

$$d[f(\omega)\, d\omega],$$

cu $f(\omega)$ și derivatele sale parțiale de ordinul întîi aparținînd de astă dată lui (l), în domeniul unde $f(\omega)$ este definită, obținem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [dU_{p-n}\, dx_n - (dV_{p-n} + dV_{p-n-2})\, dy_n] = 0$$

și

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [dU_{p-n}\, dy_n + dV_{p-n}\, dx_n] = 0,$$

pentru orice p întreg. Efectuînd produsele exterioare, obținem condițiile de monogeneitate

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_{p-n}}{\partial x_m} = \frac{\partial U_{p-m}}{\partial x_n} = \frac{\partial V_{p-n}}{\partial y_m} = \frac{\partial V_{p-m}}{\partial y_n}, \\
&\frac{\partial U_{p-n}}{\partial y_m} + \frac{\partial V_{p-m}}{\partial x_n} + \frac{\partial V_{p-m-2}}{\partial x_n} = 0, \\
&\frac{\partial U_{p-n}}{\partial y_m} = \frac{\partial U_{p-m}}{\partial y_n}, \\
&\frac{\partial V_{p-m}}{\partial x_n} = \frac{\partial V_{p-n}}{\partial x_m};
\end{aligned} \tag{39}$$

se vede ușor că U_{p-m} și V_{p-m} sînt soluții a o infinitate de ecuații Laplace de forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_m^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{m+1}^2} = 0,$$

oricare ar fi p.

Să căutăm condițiile de monogeneitate în algebra B_1. Dacă

$$f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n(x, z)\, \varphi^n$$

și ω are forma redusă

$$\omega = x + \varphi z,$$

anulînd

$$d[f(\omega)\, d\omega], \tag{40}$$

avem

$$dU_n\, dx + dU_{n-1}\, dz = 0,$$

sau

$$\frac{\partial U_n}{\partial z} = \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x},$$

și se vede că este identică cu relația (36') din condițiile de monogeneitate. Prin urmare monogeneitatea în algebră A_1 implică și monogeneitatea în algebra B_1.

Să considerăm acum cazul cînd ω are o infinitate de componente,

$$\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \varphi^n.$$

Relația (40) este echivalentă cu

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} dU_{p-n}\, dx_n = 0$$

p luînd valori între $-\infty$ și $+\infty$. Avem deci

$$\frac{\partial U_{p-n}}{\partial x_m} = \frac{\partial U_{p-m}}{\partial x_n} \tag{41}$$

pentru orice m, n și p cuprins între $-\infty$ și $+\infty$. Regăsim, și aici, același rezultat, adică monogeneitatea în A_1 implică și monogeneitatea în B_1.

7. Polinoame armonice. Să considerăm puterea a n-a a unui număr ω:

$$\omega^n = (x + \theta y + \varphi z)^n,$$

Se vede imediat că ω^n are $2n + 1$ componente,

$$\omega^n = \sum_{i=0}^{n} P_i(x, y, z)\, \varphi^i + \sum_{i=0}^{n-1} Q_i(x, y, z)\, \varphi^i\, \theta, \tag{42}$$

$P_i(x, y, z)$ și $Q_i(x, y, z)$ fiind polinoame omogene, de gradul n, armonice. Se știe că numărul polinoamelor omogene, de gradul n, armonice, liniar independente este $2n + 1$, adică tocmai numărul polinoamelor P_i și Q_i. Vom arăta că P_i și Q_i date de (42) formează o bază de polinoame armonice, adică sînt liniar independente și, prin urmare, orice polinom armonic de gradul n, omogen, se poate exprima printr-o combinație liniară a lor.

Să remarcăm că fiecare din cele $2n + 1$ polinoame date de (42) conține numai cîte un termen din expresia

$$(x + \varphi z)^n + C_n^1\, y\, (x + \varphi z)^{n-1}\, .\, \theta, \tag{43}$$

însă toți termenii distincți din (43) sînt liniar independenți, și numărul lor este tot $2n + 1$, deci P_i și Q_i formează o bază de polinoame armonice.

Să arătăm acum că orice polinom $U_n(x, y, z)$, omogen, de gradul n, poate fi exprimat prin partea reală a lui

$$\lambda_n\, \omega^n,$$

λ_n fiind un număr din algebră convenabil ales. Să presupunem că U_n este scris sub forma

$$U_n(x, y, z) = \sum_{i=0}^{n} p_i\, P_i(x, y, z) + \sum_{i=0}^{n-1} q_i\, Q_i(x, y, z), \tag{44}$$

cu p_i și q_i nu toate nule. În această situație, este suficient să luăm pentru λ_n numărul hipercomplex

$$\lambda_n = \sum_{i=0}^{n} p_i \varphi^{-i} + \sum_{i=0}^{n-1} q_i \varphi^{-i} \theta^{-1}, \tag{45}$$

pentru ca produsul $\lambda_n \omega^n$ să aibă partea reală pe U_n.

Numărul λ_n, dat de (45), are o infinitate de componente deoarece

$$\theta^{-1} = -\frac{\theta}{1+\varphi^2} = -\theta(1 - \varphi^2 + \varphi^4 - \varphi^6 + \ldots + (-1)^n \varphi^{2n} + \ldots),$$

însă operația

$$\lambda_n \omega^n .$$

are sens, deoarece n este finit. De aici, deducem că orice polinom armonic $V_n(x, y, z)$, neomogen, de gradul n, cel mult, poate fi scris sub forma

$$V(x, y, z) = \text{Real}\left[\sum_{0}^{n}{}' \lambda_k \omega^k\right],$$

cu λ numere hipercomplexe convenabil alese. Pentru a evita numerele λ_k cu o infinitate de componente, pentru n finit, să observăm că dacă punem

$$^{*}\lambda_n = \sum_{0}^{n} \varphi^{-i} p_i + \sum_{0}^{n-1} \varphi^{-i} \theta q_i^{*} \tag{46}$$

se găsește imediat că trebuie să avem

$$\begin{aligned}
& p_i^{*} = p_i \\
& -q_0^{*} = q_0 - q_2 + q_4 - \ldots, \\
& -q_1^{*} = q_1 - q_3 + q_5 - \ldots, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& -q_i^{*} = q_i - q_{i+2} + q_{1+4} \cdots + (-1)^1 q_{i+2k} + \ldots, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& -q_{n-3}^{*} = q_{n-3} - q_{n-1}, \\
& -q_{n-2}^{*} = q_{n-2}, \\
& -q_{n-1}^{*} = q_{n-1},
\end{aligned} \tag{47}$$

unde în expresia lui $-q_i^{*}(i,$ par), în partea a doua, ultimul termen este $(-1)^{\frac{n-1}{2}} q_{n-1}$, dacă n este impar și $(-1)^{\frac{n-2}{2}} q_{n-2}$ dacă n este par, iar în expresia lui $-q_i^{*}$ (i, impar), ultimul termen este $(-1)^{\frac{n-1}{2}} q_{n-2}$, dacă n este impar și $(-1)^{\frac{n}{2}} q_{n-1}$, dacă n este par. Avem și în această situație

$$U_n(x, y, z) = \text{Real}(\lambda_n \omega^n),$$

cu λ_n dat de (46). Avantajul lui λ_n, dat de (46), față de cel dat de (45) este că se elimină din expresia lui λ_n termenii care de fapt nici nu intervin în partea reală a lui $\lambda_n \omega^n$ și care totuși încarcă acest produs.

Să considerăm acum o funcție $f(x, y, z)$, soluție a ecuației lui Laplace, care în jurul originii are dezvoltarea

$$f(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{ijk}\, x^i\, y^j\, z^k, \tag{48}$$

Grupînd termenii omogeni, de grad 0, 1, 2, ..., n, ... putem scrie

$$f(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, y, z),$$

$U_n(x, y, z)$ fiind un polinom armonic omogen de gradul n, deci de forma (44), iar numerele p_i și q_i fiind date, deci cunoscute.

Ne propunem să arătăm că putem găsi totdeauna un șir de numere hipercomplexe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ astfel încît să avem

$$f(x, y, z) = \text{Real}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, \omega^n\right).$$

Prin procedeul arătat mai sus se vede că p^* și q^* sînt în mod unic determinate de relațiile (47). Se ivește o dificultate în cazul cînd, n fiind infinit, seriile care reprezintă pe q^* sînt complet nedeterminate.

Pentru a înlătura această dificultate, vom da o sumă seriilor (47), cînd n tinde către infinit, care în operațiile noastre să ne conducă la rezultatul dorit. Să dăm seriei

$$q_0^* \simeq q_0 - q_2 + q_4 - q_6 + \ldots + (-1)^n q^{2n} + \ldots \tag{49}$$

suma Borel

$$-q_0^* = \int_0^{\infty} q_0(\nu)\, e^{-\nu}\, d\nu, \tag{49'}$$

cu

$$q_0(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, q_{2n}\, \frac{\nu^n}{n!} \tag{49''}$$

și seriei

$$q_1^* \simeq q_1 - q_3 + q_5 - q_7 + \ldots + (-1)^n\, q_{2n+1} + \ldots \tag{50}$$

suma Borel

$$-q_1^* = \int_0^{\infty} q_1(\nu)\, e^{-\nu}\, d\nu, \tag{50'}$$

cu

$$q_1(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, q_{2n+1}\, \frac{\nu^n}{n!}. \tag{50''}$$

Pentru q_{2k}^* și q_{2k+1}^* să luăm sumele Borel

$$-q_{2k}^* = (-1)^k \int_0^{\infty} e^{-\nu}\, \frac{d^k}{d\nu^k}\left[q_0(\nu)\right] d\nu, \tag{51}$$

$$-q_{2k+1}^* = (-1)^k \int_0^{\infty} e^{-\nu}\, \frac{d^k}{d\nu^k}\left[q_1(\nu)\right] d\nu, \tag{52}$$

Să presupunem ,de asemenea, că (49) și (50) sînt absolut sumabile Borel [7].

Dacă (49) are un număr finit de termeni, adică ne aflăm în situația (47) putem înlocui pe (49) cu (49′), de astă dată $q_0(\nu)$ fiind dat tot de (49″), însă suma conținînd un număr finit de termeni.

Aceeași concluzie subsistă și pentru (50), deci sumele Borel, (49′) (50′) (51) și (52) le substituim sumelor (47) pentru n finit sau infinit fără nici o rezervă. Să arătăm că în această situație putem să punem totdeauna

$$U_n(x, y, z) = \text{Real}\ (\lambda_n \omega^n),$$

pentru orice, n, operația avînd sens și cînd $n \to \infty$, deoarece am presupus că (49) și (50) sînt absolut sumabile Borel.

Rămîne să arătăm că avem

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} p_k P_k(x, y, z) + \sum_{k=0}^{n-1} q_k Q_k(x, y, z) = \text{Real}\ (\lambda_n \omega^n),$$

însă

$$\text{Real}\ (\lambda_n\ \omega^n) = \text{Real}\left(\sum_{i=0}^{n} p_i^* \varphi^{-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \varphi^{-i}\, \theta\, q_i^*\right)\left(\sum_{0}^{n} \varphi^i P_i + \sum_{0}^{n-1} \varphi^i \theta \cdot Q_i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} p_i^* P_i - \sum_{i=0}^{n-1} q_i^* Q_i - \sum_{i=0}^{n-1} q_{i+2}^* Q_i$$

pentru $i = 2m$

$$- q_i^* - q_{i+2}^* = (-1)^m \int_0^\infty e^{-\nu} \frac{d^m}{d\nu^m}\Big[\, q_0(\nu)\,\Big]\, d\nu +$$

$$+ (-1)^{m+1} \int_0^\infty e^{-\nu} \frac{d^{m+1}}{d\nu^{m+1}} [q_0(\nu)]\, d\nu =$$

$$= (-1)^m \int_0^\infty e^{-\nu} \left[\frac{d^m}{d\nu^m}[q_0(\nu)] - \frac{d^{m+1}}{d\nu^{m+1}}[q_0(\nu)]\right] d\nu = q_{2m} = q_i\,,$$

rezultat care se obține imediat, deoarece prin integrare prin părți obținem

$$\int_0^\infty e^{-\nu} \frac{d^{m+1}}{d\nu^{m+1}} [q_0(\nu)]\, d\nu = - e^{-\nu} \frac{d^m}{d\nu^m} [q_0(\nu)] \Big|_0^\infty +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-\nu} \frac{d^m}{d\nu^m} [q_0(\nu)]\, d\nu = + (-1)^m q_{2m}$$

și înlocuind avem

$$- q_i^* - q_{i+2}^* = q_i\,,$$

Dacă i este impar ($i = 2m + 1$) obținem pe aceeași cale, însă pornind de la (59), același rezultat:

$$- q_i^* - q_{i+2}^* = (-1)^m \int_0^\infty e^{-\nu} \frac{d^m}{d\nu^m} [q_1(\nu)]\, d\nu +$$

$$+ (-1)^{m+1} \int_0^\infty e^{-\nu} \frac{d^{m+1}}{d\nu^{m+1}} [q_1(\nu)]\, d\nu = q_{2m+1} = q_i\,.$$

Într-adevăr,

$$\int_0^\infty e^{-\nu} \frac{d^{m+1}}{d\nu^{m+1}} [q_1(\nu)]\, d\nu = -e^{-\nu} \frac{d^m}{d\nu^m} [q_1(\nu)] \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\nu} \frac{d^m}{d\nu^m} [q_1(\nu)]\, d\nu$$

și înlocuind

$$-q_i^* - q_{i+2}^* = q_i$$

Putem deci enunța următorul rezultat. Fie $f(x, y, z)$ o soluție a ecuației lui Laplace, care dezvoltată în jurul originii are forma

$$f(x, y, z) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk}\, x^i\, y^j\, z^k,$$

cu un domeniu de convergență conținînd mai mult decît un punct.

Grupînd după polinoamele omogene de grad $0, 1, \ldots, n \ldots$, $f(x, y, z)$ se mai scrie:

$$f(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, y, z).$$

Fiecărei soluții $f(x, y, z)$ a ecuației lui Laplace, i se poate asocia o serie hipercomplexă

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \omega^n, \tag{53}$$

astfel ca

$$f(x, y, z) \equiv \text{Real}\left(\sum_0^\infty \lambda_n \omega^n \right), \tag{54}$$

λ_n fiind numere hipercomplexe, convenabil alese.

Să căutăm acum componenta lui φ^k din produsul $\lambda_n \omega^n$,

$$I_{\varphi^k} = \sum_{i=0}^{n-k} p_i\, P_{i+k}(x, y, z) - \sum_{i=0}^{n-k-1} (q_i^* + q_{i+2}^*)\, Q_{i+k}(x, y, z)$$

și a lui $\theta\varphi^k$

$$I_{\theta\varphi^k} = \sum_{i=0}^{n-k-1} p_i\, Q_{i+k}(x, y, z) + \sum_{i=0}^{n-k} q_i^*\, P_{i+k}(x, y, z);$$

este evident că dacă $\text{Real}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \omega^n \right)$ este convergentă, celelalte componente nu sînt necesar convergente.

8. Asupra structurii algebrelor A_1 și B_1. Să considerăm algebra de ordinul $2n + 1$ cu elementele bazei

$$\frac{1}{\varphi^n}, \frac{1}{\varphi^{n-1}}, \ldots \frac{1}{\varphi}, 1, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^n \tag{55}$$

cu elementul hipercomplex φ legat de relația

$$\varphi^{2n+1} = 1. \tag{56}$$

Un număr din această algebră este dat de

$$\xi = \sum_{p=-n}^{n} \varphi^p x_p,$$

iar produsul a două numere ξ, η

$$\eta = \sum_{p=-n}^{+n} \varphi^p y_p$$

este dat de

$$\eta\,\xi = \xi\eta = \sum_{m=-n}^{n} \left(\sum_{p=-n}^{+n} x_{m+p}\, y_{-p} \right) \varphi^m \pmod{n} \tag{57}$$

Dacă facem acum pe n să tindă către infinit, produsul (57) este chiar (18). Algebra astfel construită este suma a $2n$ algebre complexe și a unei algebre reale. Am putea să tragem de aici concluzia că algebra B_1, considerată ca limita algebrei astfel construite, este suma directă a unei infinități de algebre complexe și a unei algebre reale. Rezultatul nu este adevărat, deoarece se pot construi cu ușurință alte algebre de ordin finit n, care, cînd n tinde către infinit, să ne conducă la o algebră infinită cu aceleași elemente ale bazei și cu aceeași lege de înmulțire a două numere din algebră. Astfel, în algebra de elemente ale bazei

$$\frac{1}{\varphi^{n-1}}, \frac{1}{\varphi^{n-2}}, \ldots \frac{1}{\varphi}, 1, \varphi, \varphi^2, \ldots, \ldots, \varphi^n,$$

și cu ecuația caracteristică

$$\varphi^{2n} = 1$$

produsul a două numere din algebră este dat de

$$\xi \,.\, \eta = \sum_{p=-n+1}^{n} \left(\sum_{s=-n+1}^{n} x_{p-s}\, y_s \right) \varphi^p$$

și cînd n tinde către infinit, atît elementele bazei, cît și produsul a două numere din algebră, tind către elementele bazei și produsul a două numere din algebra B_1. Algebra astfel construită însă este suma directă a $2n-2$ algebre complexe și a două algebre reale, deci structura algebrei B_1, găsită pe această cale este diferită. Totuși, dacă procedeul de mai sus nu reușește pentru algebra B_1, reușește pentru algebra A_1 deși structura algebrei B_1 o considerăm necunoscută. Într-adevăr, să considerăm algebra de ordinul $4n + 2$ cu elementele bazei

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varphi^n}, \frac{1}{\varphi^{n-1}}, \ldots \frac{1}{\varphi}, 1, \varphi, \ldots, \varphi^{n-1}, \varphi^n, \\ &\frac{\theta}{\varphi^n}, \frac{\theta}{\varphi^{n-1}}, \ldots \frac{\theta}{\varphi}, \theta, \theta\,\varphi, \ldots \theta\,\varphi^{n-1}, \theta\,\varphi^n, \end{aligned} \tag{58}$$

cu legătura între θ și φ

$$\theta^2 + \varphi^2 + 1 = 0$$

iar pentru φ satisfăcînd ecuația caracteristică

$$\varphi^{2n+1} = 1$$

fapt care, vom vedea imediat că nu este esențial.

Produsul a două numere din algebra astfel construită

$$\omega = \sum_{k=-n}^{+n} (x_k + \theta\, y_k)\, \varphi^k,$$

$$\Omega = \sum_{k=-n}^{+n} (X_k + \theta\, Y_k)\, \varphi^k,$$

este dat de

$$\omega.\ \Omega = \sum_k \Big[\sum_p (x_{p+k} X_{-k} - y_{p+k} Y_{-k} - y_{p+k} Y_{-k-2})\, \varphi^p\Big] + \\ + \sum_k \Big[\sum_p (x_{p+k} Y_{-k} + y_{p+k} X_{-k})\, \varphi^p\Big]\, \theta,$$

adică analog cu (10) și care se obține din cel mai de sus făcînd pe n să tindă către infinit. Rămîne, așadar, să determinăm structura algebrei definită de (58) și să facem apoi pe $n \to \infty$.

Ecuația algebrică verificată de φ este

$$\varphi^{2n+1} = 1,$$

iar cea verificată de θ este

$$(\theta^2 + 1)^{2n+1} = -1. \tag{59}$$

Norma unui număr din algebra definită de (58) este dată de

$$N(\omega) = \prod_i \left[\sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{x_k}{\mu_i^k} + \nu_i \frac{y_k}{\mu_i^k}\right)\right]\left[\sum_{k=-n}^{+n} \left(\frac{x_k}{\mu_i^k} + \bar{\nu}_i \frac{y_k}{\mu_i^k}\right)\right],$$

unde μ_i și ν_i sînt rădăcinile ecuațiilor

$$\mu^{2n+1} = 1,$$

$$(\nu^2 + 1)^{2n+1} = -1,$$

puse în corespondență prin relația

$$\nu^2 + \mu^2 + 1 = 0, \tag{60}$$

ν_i și $\bar{\nu}_i$ fiind rădăcinile imaginar conjugate care corespund la un θ_i, prin relația (60). Este evident că nici unul din factorii liniari care intervin în expresia normei lui ω nu este real, deoarece ecuația (59) are numai rădăcini complexe oricare ar fi n. Prin urmare, algebra definită de elementele (58) este suma directă $2n+1$ algebre complexe. Deducem de aici că, atunci cînd algebra A_1 este construită pe corpul numerelor reale (R) este suma directă a o infinitate de algebre complexe. Legătura (60), de natură eliptică, între μ și ν, arată că μ și ν nu pot fi simultani reali, deci orice element liniar al normei unui număr din algebra definită de (58) este complex, oricare ar fi ecuația caracteristică a lui φ. În A_1 construit pe (C), se pot găsi numere al căror produs să fie nul.

Într-adevăr, numerele

$$\omega_1 = \theta\sqrt{-1} + 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2^2.2!}\varphi^4 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n.n!}\varphi^2 + \ldots$$

și

$$\omega_2 = \theta\sqrt{-1} - \left[1 + \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2^2.2!}\varphi^4 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n.n!}\varphi^{2n} + \ldots\right]$$

satisfac relația

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = 0.$$

Ele aparțin lui (l), deoarece avem

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2.2!} + \ldots + \frac{1.3.5.\ldots(2n-3)}{2^n n!} + \ldots = 3$$

și provin din egalitatea evidentă

$$(\theta\sqrt{-1} + \sqrt{1+\varphi^2})(\theta\sqrt{-1} - \sqrt{1+\varphi^2}) = 0,$$

În fine, să mai remarcăm că $\frac{\omega_1}{2.\sqrt{-1}\,\theta}$ și $\frac{\omega_2}{2.\sqrt{-1}\,\theta}$ sînt elemente idempotente în A_1.

$$\left(\frac{\omega_1}{2\sqrt{-1}.\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{-1}\,\theta}\sqrt{1+\varphi^2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\theta^2}(1+\varphi^2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-1}\,\theta}\sqrt{1+\varphi^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-1}\,\theta}\sqrt{1+\varphi^2}$$

9. Asupra unor rezultate ale lui N. Ciorănescu. Într-o lucrare [8], N. Ciorănescu caută un criteriu care să decidă că două funcții armonice sînt conjugate într-un domeniu (D) fără să se facă apel la funcții monogene de variabila z. Pentru a rezolva această problemă — în plan — consideră funcția

$$W = \ln\,[(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2],$$

cu u și v armonice, și găsește că pentru ca W să fie armonică oricare ar fi parametrii λ și μ trebuie ca u și v să fie conjugate. Reciproca este de asemenea adevărată, de unde rezultă echivalența monogeneității cu condiția impusă lui W.

Extinzînd această idee în spațiu, spune că trei funcții u, v, w sînt conjugate, dacă funcția

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{[(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2 + (w+\nu)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

este armonică oricare ar fi λ, μ și ν. Pentru ca u, v, w să fie conjugate, trebuie să satisfacă, după N. Ciorănescu, la condițiile suplimentare

$$(\text{grad } u)^2 = (\text{grad } v)^2 = (\text{grad } w)^2$$

și

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = \text{grad } v \cdot \text{grad } w = \text{grad } w \cdot \text{grad } u = 0$$

În sfîrșit, pentru ecuația lui Laplace cu n variabile, rezultatele sînt analoge.

Pentru cazul plan să facem remarca, că funcția w poate fi înlocuită cu orice funcție armonică. Într-adevăr, dacă

$$w = w(u + \lambda, \quad v + \mu),$$

avem

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial \omega^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \omega\, \partial \theta}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

cu

$$\omega = u + \lambda \qquad \theta = v + \mu.$$

Deoarece cerem ca w să fie armonică, urmează că trebuie să avem

$$(\text{grad } u)^2 = (\text{grad } v)^2$$

și

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = 0,$$

adică aceleași condiții găsite de N. Ciorănescu și care sînt echivalente cu condițiile lui Cauchy-Riemann.

În spațiu, problema este cu totul alta, deși funcția $\frac{1}{r}$ poate fi înlocuită și în acest caz cu orice funcție armonică. Ne propunem să găsim condițiile suplimentare care să le îndeplinească funcțiile armonice u, v, w pentru ca funcția

$$f(\omega) = f(u + \theta v + \varphi w),$$

monogenă în raport cu $\omega = u + \theta v + \varphi w$. să fie de asemenea soluție a ecuației lui Laplace. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \theta\frac{\partial v}{\partial x} + \varphi\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d\omega^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \theta\frac{\partial v}{\partial x} + \varphi\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{df}{d\omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varphi\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

Deci u, v, w, în afară de faptul de a fi armonice, trebuie să satisfacă condiția

$$(\text{grad } \omega)^2 = \sum_{x,y,z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \theta\frac{\partial v}{\partial x} + \varphi\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = 0 \qquad (1 + \theta^2 + \varphi^2 = 0),$$

care este echivalentă cu condițiile lui Ciorănescu

$$(\text{grad } u)^2 = (\text{grad } v)^2 = (\text{grad } w)^2,$$

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = \text{grad } v \cdot \text{grad } w = \text{grad } w \cdot \text{grad } u = 0,$$

Se pare că singurele funcții care verifică toate aceste condiții sînt

$$u = x, \quad v = y, \quad w = z,$$

deoarece condiția

$$(\text{grad } \omega)^2 = 0 \tag{61}$$

nu implică armonicitatea lui u, v, w, ca în cazul plan.

Într-adevăr, funcțiile

$$u = \frac{x}{r^2}, \quad v = \frac{y}{r^2}; \quad z = \frac{z}{r^2} \tag{62}$$

verifică condiția (61) fără a fi armonice.

Să observăm însă că (62) este chiar transformarea lui Lord Kelvin, deci este îndreptățit să punem următoarea problemă mai generală: să se găsească funcțiile u, v, w oarecare și $a\,(x, y, z)$ armonică, astfel ca

$$\Phi(x, y, z) = a \cdot f(u + \theta v + \varphi w),$$

cu $f(\omega)$ monogenă în $\omega = u + \theta v + \varphi w$, să fie soluție a ecuației lui Laplace. Avem

$$\Delta a = 0$$

și punînd condiția ca $\Delta\Phi = 0$, se găsește în afară de

$$(\text{grad}\ \omega)^2 = 0$$

și

$$\begin{aligned} a\ \Delta u &+ 2\,\text{grad}\ a \cdot \text{grad}\ u = 0 \\ a\ \Delta v &+ 2\,\text{grad}\ a \cdot \text{grad}\ v = 0 \\ a\ \Delta w &+ 2\,\text{grad}\ a \cdot \text{grad}\ w = 0 \end{aligned} \tag{63}$$

Regăsirea condiției (61) arată că este necesar ca u, v, w să fie conjugate în sensul lui Ciorănescu.

În afară de soluția cunoscută (62), sistemul astfel obținut are pentru $a = \frac{1}{r}$ și următoarele soluții:

$$(\alpha) \qquad u = \frac{y}{r^2}, \quad v = \frac{z}{r^2}, \quad w = \frac{x}{r^2}$$

$$(\beta) \qquad u = \frac{z}{r^2}, \quad v = \frac{x}{r^2}, \quad w = \frac{y}{r^2}$$

cît și orice combinație liniară a lor

$$U = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z}{r^2}, \quad V = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z}{r^2}, \quad W = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z}{r^2},$$

pentru care avem

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2$$

și

$$a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j = 0 \qquad (i \neq j).$$

II. ALGEBRĂ ASOCIATĂ LA ECUAȚIA LUI LAPLACE CU $n + 2$ VARIABILE

10. Operații cu numere din algebră. Fie acum ecuația lui Laplace cu $n + 2$ variabile

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \tag{64}$$

a cărei ecuație caracteristică este

$$1 + \varphi_1^2 + \ldots + \varphi_n^2 + \theta^2 = 0, \tag{65}$$

$$\varphi_1^0 = 1, \ \theta_0 = 1.$$

Algebra A_n care i se asociază are ∞^n elemente ale bazei

$$\varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n},$$

$$\varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n} \theta, \tag{66}$$

α_i luînd valori întregi între $-\infty$ și $+\infty$. Un număr din algebră are următoarea formă:

$$\omega = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n \\ -\infty}}^{+\infty} (x_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} + \theta \ y_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}) \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n}.$$

Pentru ca produsul a două numere din algebră să aparțină algebrei, este necesar ca seriile cu termenul general

$$x_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$$

și

$$y_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$$

să fie absolut convergente. Produsul a două numere este în mod unic determinat de relația (65). Avem

$$\omega . \Omega = \left[\sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \\ -\infty}}^{+\infty} (x_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} + \theta \ y_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}) \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (X_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n} + \theta Y_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n}) \varphi_1^{\beta_1} \varphi_2^{\beta_2} \ldots \varphi_n^{\beta_n} \right],$$

deci

$$\omega . \Omega = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \\ -\infty}}^{+\infty} \left[\sum_{\substack{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \\ -\infty}}^{+\infty} \left(x_{\alpha_1 - \gamma_1, \ldots, \alpha_n - \gamma_n} X_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n} - y_{\alpha_1 - \gamma_1, \ldots, \alpha_n - \gamma_n} Y_{\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sum_{p=1}^{n} y_{\alpha_1 - \gamma_1, \ldots, \alpha_{p-1} - \gamma_{p-1}, \alpha_p - \gamma_p - 2, \alpha_{p+1} - \gamma_{p+1}, \ldots, \alpha_n - \gamma_n} Y_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n} \right) \right] \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n} +$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ -\infty}}^{+\infty} \left[\sum_{\substack{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \\ -\infty}}^{+\infty} \left(x_{\alpha_1 - \gamma_1, \ldots, \alpha_n - \gamma_n} Y_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + y_{\alpha_1 - \gamma_1, \ldots, \alpha_n - \gamma_n} X_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n} \right) \right] \theta \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n};$$

în operațiile de însumare $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ iau toate valorile întregi de la $-\infty$ la $+\infty$.

Algebra astfel construită este echivalentă cu algebra cu ∞^n elemente,

$$1,\ \varepsilon_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},\ \varepsilon'_{\alpha_1,\ldots\alpha_n},$$

cu legi de înmulțire date de

$$\varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}\,\varepsilon_{\beta_1,\ldots,\beta_n} = \varepsilon_{\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n}$$

$$\varepsilon_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\cdot\varepsilon'_{\beta_1,\ldots,\beta_n} = \varepsilon'_{\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n}$$

$$\varepsilon'_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\cdot\varepsilon'_{\beta_1,\ldots,\beta_n} = \varepsilon_{\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n} -$$

$$-\sum_{p=1}^{n}\varepsilon_{\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_{p+1}+\beta_{p-1},\alpha_p+\beta_p+2,\alpha_{p+1}+\beta_{p+1},\ldots,\alpha_n+\beta_n}$$

operațiile între elemente fiind asociative și comutative.

Putem asocia și de astă dată unui număr ω din algebră un determinant infinit în patru direcții care nu este însă absolut convergent, deoarece fiecare linie a lui conține cel puțin odată fiecare componentă a numărului ω. Dacă considerăm însă determinantul finit care îl generează, la puterea inversului ordinului determinantului, acest număr este finit și cînd ordinul determinantului tinde către infinit. Numărul real atașat pe această cale lui ω îl vom numi tot modulul lui ω și se bucură de proprietatea

$$\mathcal{M}(\omega\cdot\Omega) = \mathcal{M}(\omega)\cdot\mathcal{M}(\Omega).$$

Vom insista însă mai mult asupra subnormelor algebrei determinată de (65). Să observăm că un număr din algebră se scrie sub forma

$$\omega = X + \theta\, Y,$$

cu

$$X = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_n\\ -\infty}}^{+\infty} x_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}\,\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_n^{\alpha_n}$$

și

$$Y = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\\ -\infty}}^{+\infty} y_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}\,\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_n^{\alpha_n};$$

deci numerele X, Y aparțin unei algebre B_n subalgebră în A_n. Elementele algebrei B_n sînt

$$1,\ \varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n},$$

cu legile de înmulțire

$$\varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}\cdot\varepsilon_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n} = \varepsilon_{\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n},$$

și se vede că dacă seria componentelor lui X este absolut convergentă, adică X și Y aparțin lui (l), atunci operația de înmulțire este închisă și în algebra B_n. Avem

$$X\cdot Y = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\\ -\infty}}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n\\ -\infty}}^{+\infty} x_{\alpha_1-\gamma_1,\ldots,\alpha_n-\gamma_n}\,y_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n}\right)\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_n^{\alpha_n}.$$

Să considerăm acum șirul

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

al tuturor rădăcinilor *distincte* ale unității, ordinea fiind oarecare, însă poate fi luată după puterile crescătoare ale lui q din $\lambda^q = 1$; fie n dintre ele, de asemenea oarecare,

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n,$$

și să formăm acum expresia, care este o subnormă,

$$N_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(X) = \sum_{\substack{-\infty \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n}}^{+\infty} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} x_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}. \tag{67}$$

Acest număr are următoarele proprietăți

a) Modulul lui $N_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(X)$ este convergent. Într-adevăr,

$$| N_{\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(X) | \leqslant \sum_{\substack{-\infty \\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}}^{+\infty} | x_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} |,$$

deoarece toate numerele λ_i au modulul egal cu unitatea.

b) Dacă considerăm două numere din algebră X și Y și construim subnormele lor, relative la aceleași numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, avem

$$N_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(X \cdot Y) = N_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(X) \cdot N_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(Y).$$

Într-adevăr,

$$N^{(X)}_{\lambda_1,\ldots\lambda n} \cdot N^{(Y)}_{\lambda_1,\ldots\lambda n} = \left[\sum_{\substack{-\infty \\ \alpha}}^{+\infty} \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} x_{\alpha_1,,,\alpha n}\right] \left[\sum_{\substack{-\infty \\ \alpha}}^{+\infty} \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} y_{\alpha_1,\ldots\alpha_n}\right] =$$

$$= \sum_{\substack{-\infty \\ \alpha}}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{-\infty \\ \gamma}}^{+\infty} x_{\alpha_1-\gamma_2,\ldots,\alpha_n-\gamma_n} y_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_n} \right) \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \ldots \lambda_n^{\alpha_n}. \tag{68}$$

Dacă introducem și aici numărul

$$M(\omega) = \lim_{n \to \infty} \left[\prod_n \left(\sum_{\substack{-\infty \\ \alpha}}^{+\infty} \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} x_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \right) \right]^{\frac{1}{n}}, \tag{69}$$

avem evident

$$M(\omega, \Omega) = M(\omega) \; M(\Omega)$$

și

$$| M(\omega) | \leqslant \sum_{\substack{-\infty \\ \alpha}}^{+\infty} | x_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} |.$$

O expresie analogă se poate introduce și pentru algebra A_n

$$N_{\lambda_1,\ldots\lambda_n}(\omega) = X + \sqrt{-1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \ldots - \lambda_n^2}\, Y \tag{68'}$$

cu

$$X = \sum_{\substack{-\infty \\ \alpha}}^{+\infty} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} x_{\alpha_1, \ldots \alpha_n},$$
$$Y = \sum_{\substack{-\infty \\ \alpha}}^{+\infty} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} y_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \qquad (68'')$$

și se verifică în același mod că

$$N_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(\omega . \Omega) = N_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(\omega) . N_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(\Omega).$$

Tot astfel, avem numărul

$$M(\omega) = \lim \left[\prod_n (X^2 + (1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2) Y^2) \right]^{\frac{1}{2n}} \qquad (69')$$

care este convergent și are proprietatea

$$M(\omega . \Omega) = M(\omega) . M(\Omega).$$

Divizorii lui zero sînt formați de mulțimea numerelor ω pentru care avem — în B_n —

$$\sum_{\substack{-\infty \\ \alpha}}^{+\infty} \lambda_1^{\alpha_1}, \ldots, \lambda_n^{\alpha_n} x_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} = 0,$$

iar în A_n

$$X^2 + (1 + \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2) Y^2 = 0.$$

Se poate ușor observa că un număr ω din B_n se obține din produsul

$$\omega^* = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} x_{\alpha_1} \varphi_1^{\alpha_1} \right) \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} x_{\alpha_2} \varphi_2^{\alpha_2} \right) \ldots \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} x_{\alpha_n} \varphi_n^{\alpha_n} \right),$$

înlocuindu-se termenul general

$$x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n},$$

cu

$$x_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}.$$

De aici, obținem imediat că un număr ω aparținînd idealului caracterizat de

$$\sum_{\substack{-\infty \\ \alpha}}^{+\infty} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} x_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = 0,$$

cu

$$\lambda_1^{q_1} = 1,$$
$$\lambda_2^{q_2} = 1,$$
$$\lambda_n^{q_n} = 1,$$

este dat de

$$\omega = (\varphi_1 - \lambda_1)\ (\varphi_2 - \lambda_2) \ldots (\varphi_n - \lambda_n)\ \Omega,$$

unde Ω este un număr oarecare din B_n.

Este necesar să introducem şi numere ω,

$$\omega = \sum_{\substack{-\infty \\ \alpha}}^{+\infty} \left(x_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} + \theta\, y_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\right) \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_n^{\alpha_n},$$

care aparţin lui (m), adică au componentele $x_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ şi $y_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ mărginite în ansamblul lor. Numerele ω, astfel definite, formează un grup aditiv cu mulţimea scalarilor extinsă la numerele Ω care aparţin lui (l).

11. Inversul unui număr din algebră. Operaţia $\frac{1}{\omega}$, cu ω dat de

$$\omega = x_0 + x_1 \varphi_1 + \ldots + x_n \varphi_n + \theta\, y,$$

defineşte o clasă de funcţii $U_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}$, $V_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$, date de egalitatea

$$\frac{1}{\omega} = \sum_{\substack{-\infty \\ \alpha}}^{+\infty} \left(U_{\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n} + \theta\, V_{\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n}\right) \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n}.$$

Sîntem astfel conduşi la sistemul infinit

$$\sum_{i=0}^{n} x_i\, U_{\alpha_1,\ldots\alpha_{i-1},\,\alpha_i-1,\,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n} - y \sum_{i=0}^{n} V_{\alpha_1,\ldots\alpha_{i-1},\,\alpha_i-2,\,\alpha_{i+1},\ldots\alpha_n} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad (70)$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i\, V_{\alpha_1,\ldots\alpha_{i-1},\,\alpha_i-1,\,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n} + y\, U_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n} = 0,$$

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ luînd toate valorile întregi pozitive, negative sau zero. În prima relaţie, în partea a doua, avem 1 numai pentru toţi α_i nuli.

Dacă se caută însă numai soluţii unde α_i ia valori întregi nenegative, atunci soluţia este unică, putîndu-se determina din aproape în aproape toate componentele $U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ şi $V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$. Într-adevăr, în această situaţie obţinem imediat

$$\begin{aligned}
x_0\, U_{0,\ldots,0} - y\, V_{0,\ldots,0} &= 1, \\
x_0\, V_{0,\ldots,0} + y\, U_{0,\ldots,0} &= 0, \\
x_1\, U_{0,\ldots,0} + x_0\, U_{10,\ldots,0} - y\, V_{1,0,\ldots,0} &= 0, \\
x_0\, V_{1,0,\ldots,0} + x_0\, V_{0,\ldots,0} + y\, U_{1,0,\ldots,0} &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots

$$
\begin{aligned}
V_{0,\ldots,0} &= \frac{-y}{x_0^2+y^2}, \\
V_{1,0,\ldots,0} &= \frac{2x_0x_1y}{(x_0^2+y^2)^2}, \\
U_{1,0,\ldots,0} &= \frac{x_1(y^2-x_0^2)}{(x_0^2+y^2)^2}, \qquad (71) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
V_{0,\ldots,0,1} &= \frac{2x_0x_ny}{(x_0^2+y^2)^2}, \\
U_{0,\ldots,0,1} &= \frac{x_n(y^2-x_0^2)}{(x_0^2+y^2)^2}. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Cum în algebră inversul este unic, urmează că din clasa de soluții dată de (70), într-o regiune a spațiului, numai un șir de funcții $U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$, $V_{\alpha_1,\ldots\alpha_n}$ aparține lui (l). Dacă două astfel de șiruri aparțin lui (l) în două regiuni D_1 și D_2 din spațiul cu $n+2$ dimensiuni și care au o frontieră comună, urmează că pe această frontieră coincid; prin urmare, cele două șiruri sînt unul prelungirea celuilalt în cele două domenii în care sînt definite.

12. Serii de puteri. Funcția exponențială

$$e^{\omega} = \exp\ \omega,$$

cu

$$\omega = x_0 + \varphi\ x_1 + \ldots + \varphi_n\ x_n + \theta\ y,$$

este definită prin relația funcțională

$$\exp\ (\omega_1+\omega_2) = \exp\ \omega_1 .\ \exp\ \omega_2 .$$

Avem

$$\exp\ (\omega) = \exp\ x_0\ \exp\ (\varphi_1 x_1) \ldots \exp\ (\varphi_n\ x_n)\ \exp\ (\theta y)$$

și evident $\exp\ (\varphi_i\ x_i)$ are sens pentru orice x_i. Dacă dezvoltăm însă pe $\exp\ (\theta \cdot y)$, avem

$$\exp\ (\theta \cdot y) = 1 + \frac{\theta y}{1!} + \frac{\theta^2 y^2}{2!} + \ldots + \frac{\theta^n y^n}{n!} + \ldots \qquad (72)$$

și ținînd seama că

$$\theta^2 = -1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \ldots - \varphi_n^1,$$

urmează că seria cu termenul general

$$u_p = \frac{(n+1)^{\frac{p}{2}}}{p!}\ y^p$$

este o majorantă a seriei modulelor tuturor termenilor din (72), deci $\exp(\theta y)$ are sens pentru orice y, deoarece n este un număr fix.

Să considerăm acum seria

$$S = 1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^n + \ldots \tag{73}$$

și să găsim o regiune de convergență a ei. Avem

$$\omega^p = (x_1 + \varphi_1\ x_1 + \ldots + \varphi_n\ x_n + \theta y)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i (x_0 + \\ + x_1\ \varphi_1 + \ldots + x_n\ \varphi_n)^{p-i}\ \theta^i\ \boldsymbol{y}^i \tag{74}$$

și dacă luăm dreapta ce trece prin originea axelor $O\ x_0, \ldots, x_n, y$,

$$\frac{x_0}{\alpha_0} = \frac{x_1}{\alpha_1} = \ldots \frac{x_n}{\alpha_n} = \frac{y}{\beta},$$

și înlocuim în (74), obținem o expresie majorantă a sumei modulelor termenilor termenului general, dată de

$$\sigma_p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i \left(1 + \left|\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right| + \left|\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right| + \ldots + \left|\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right|\right)^{p-i} (n+1)^{\frac{i}{2}} \left|\frac{\beta}{\alpha_0}\right|^i |x_0^p|$$

sau de

$$\sigma_p^* = \left(1 + \left|\frac{\alpha_i}{\alpha_0}\right| + \ldots \left|\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right| + \sqrt{n+1}\left|\frac{\beta}{\alpha_0}\right|\right)^p |x_0^p|.$$

Prin urmare, pentru x_i și y determinanți de

$$\frac{-|\alpha_i|}{|\alpha_1| + |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| + \sqrt{n+1}|\beta|} < x_i < \frac{|\alpha_i|}{|\alpha_0| + |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| + \sqrt{n+1}|\beta|},$$

$$\frac{-|\beta|}{|\alpha_0| + \ldots + |\alpha_n| + \sqrt{n+1}\,|\beta|} < y < \frac{|\beta|}{|\alpha_0| + \ldots + |\alpha_n| + \sqrt{n+1}\,|\beta|},$$

seria (73) aparține lui (l). Putem deci presupune că, în general, putem asocia unei serii de forma

$$S = a_n\, \omega^n,$$

cu a_n și ω în A_n, o regiune (D) în spațiul cu $n+2$ dimensiuni care să conțină mai mult decît un punct și în care seria modulelor tuturor termenilor lui S să fie convergentă.

13. Funcții monogene de variabilă ω. O funcție de o variabilă hipercomplexă

$$\omega = x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_n x_n + \theta\, y \tag{75}$$

are ∞^n componente

$$f(\omega) = \sum_{\substack{-\infty \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}}^{+\infty} \left[U_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n} + \theta\ V_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n} \right] \varphi_1^{\alpha_1}\ \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n}, \tag{76}$$

pe care le vom numi funcții conjugate. În legăturile dintre funcțiile conjugate are importanță ordinea lor dată de indicii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Ordinea determinată de acești indici în succesiunea lor poate fi oarecare, însă odată fixată rămîne aceeași. Vom presupune, în cele ce urmează, că $f(\omega)$ și toate derivatele sale parțiale nu aparțin lui (l) ci lui (m), adică într-o regiune (D) a spațiului cu $n+2$ dimensiuni. $U_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ și $V_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ și derivatele lor parțiale sînt mărginite fără să cerem convergența simplă sau absolută a seriei

$$S = \sum_{-\infty}^{+\infty} (U_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} + V_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}),$$

cît și a seriilor ce se obțin prin derivarea parțială a lui S.

Vom spune că $f(\omega)$ este monogenă într-un punct M al lui (D) dacă diferențiala exterioară a lui $f(\omega)\, d\omega$ este nulă în M, adică

$$d\,[f(\omega)\, d\omega]_M = 0. \tag{77}$$

Cum avem

$$df(\omega) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}}^{+\infty} \left(d\, U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(x_0, x_1, \ldots x_n, y) + 0\, dV_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}(x_0, \ldots, x_n, y)\right) \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_n^{\alpha_n},$$

relația (77) se transformă în

$$\sum_{i=0}^{n} dU_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n}\, dx_i - \left(\sum_{i=0}^{n} dV_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 2, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n}\right) dy = 0$$

și

$$\sum_{i=0}^{n} dV_{\alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n}\, dx_i + dU_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n}\, dy = 0$$

care sînt echivalente cu

$$\frac{\partial U_{\alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n}}{\partial x_j} = \frac{\partial U_{\alpha_1, \ldots \alpha_{j-1}, \alpha_j - 1, \alpha_{j+1}, \ldots \alpha_n}}{\partial x_i}, \qquad (j \neq i)$$

$$\frac{\partial U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n}}{\partial y} + \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial V_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j - 2, \alpha_{j+1}, \ldots \alpha_n}}{\partial x_i} = 0, \tag{78}$$

$$\frac{\partial V_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n}}{\partial x_j} = \frac{\partial V_{\alpha_1, \ldots \alpha_{j-1}, \alpha_j - 1, \alpha_{j+1}, \ldots \alpha_n}}{\partial x_i} \qquad (i \neq j)$$

$$\frac{\partial V_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n}}{\partial y} = \frac{\partial U_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}}{\partial x_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Funcțiile $U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$ și $V_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$, legate prin relațiile de mai sus, sînt soluții ale ecuației lui Laplace cu $n+2$ variabile. Într-adevăr, avem, punînd în partea întîi $y = x_{n+1}$,

$$\sum_{j=0}^{n+1}{}' \frac{\partial^2 U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n}}{\partial x_j^2} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\partial^2 U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j - 1, \alpha_{j+1}, \ldots \alpha_n}}{\partial x_i \, \partial x_j} -$$

$$- \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 V_{\alpha_1, \ldots \alpha_{j-1}, \alpha_j - 2, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n}}{\partial x_i \, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^2 V_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 2, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n}}{\partial x_{n+1} \, \partial x_i}$$

și ținînd seama de relațiile de monogeneitate, partea a doua este nulă. În mod analog se demonstrează și pentru $V_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$.

Să considerăm acum o funcție monogenă.

$$f(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' (U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} + \theta \, V_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}) \, \varphi_1^{\alpha_1} \cdot \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n}.$$

Produsul

$$\omega \cdot f(\omega).$$

este de asemenea o funcție monogenă, cum se poate verifica imediat. Componentele lui $\omega \, f(\omega)$ sînt

$$U_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \sum_{i=0}^{n} x_i \, U_{\alpha_o, \ldots \alpha_i - 1, \alpha_i - 1, \alpha_i + 1, \ldots \alpha_n} -$$

$$- y \sum_{i=0}^{n} V_{\alpha_1, \ldots, \alpha_i - 1, \alpha_i - 2, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_n}$$

și verifică relațiile (78).

Presupunînd acum că $f(\omega)$ și $f^*(\omega)$ aparțin lui (l) și sînt monogene, produsul

$$\overline{f}(\omega) = f(\omega) \cdot f^*(\omega)$$

este tot o funcție monogenă. Componentele lui $\overline{f}(\omega)$ sînt date de

$$\overline{U}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' (U_{\alpha_1 - \gamma_1, \alpha_2 - \gamma_2, \ldots, \alpha_n - \gamma_n} U^*_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n} -$$

$$- \sum_{p=0}^{n} V_{\alpha_1 - \gamma_1, \ldots, \alpha_p - 1 - \gamma_p - 1, \alpha_p - \gamma_p - 2, \alpha_p + 1 - \gamma_p - 1, \ldots \alpha_n \gamma_n} V^*_{\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n})$$

și

$$\overline{V}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' (U_{\alpha_1 - \gamma_1, \alpha_n - \gamma_n} V^*_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n} + V_{\alpha_1 - \gamma_1, \ldots, \alpha_n - \gamma_n} U^*_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n})$$

și presupunînd că putem deriva parțial termen cu termen se verifică ușor că satisfac relațiile (78).

Însă rezultatul de mai sus ne duce la următoarea concluzie : dacă produsul între o funcție monogenă $f(\omega)$ cu o funcție oarecare $f^*(\omega)$ ne conduce la o

funcție monogenă $f(\omega)$ și dacă componentele lui $f^*(\omega)$ cînd $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ variază de la $-\infty$ pînă la niște numere fixe $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \ldots, \bar{\alpha}_n$, verifică relațiile de monogenitate (78), atunci și componentele următoare, obținute făcînd să varieze $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ de la $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots \bar{\alpha}_n$ pînă la $+\infty$ verifică relațiile (78).

Într-adevăr, spunînd că $\overline{f}(\omega)$ este o funcție monogenă aceasta implică între componentele sale $\overline{U}$ și $\overline{V}$, relațiile (78), care se transformă în relații între componentele lui $f(\omega)$ și $\overline{f}(\omega)$. Din condițiile impuse lui $f(\omega)$ și $f^*(\omega)$, urmează că între $U^*_{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n}$ și celelalte componente de indici inferiori, avem relații care sînt tocmai relațiile (78), deoarece $\overline{f}(\omega)$ este monogenă. Cum se vede imediat în operația $\frac{1}{\omega}$, cînd admitem dezvoltarea cu α_i nenegativi, $U_{0,\ldots,0}$ și $V_{0,\ldots,0}$ sînt funcții armonice, deci toate componentele lui $\frac{1}{\omega}$ sînt funcții armonice. Rezultatul este analog cînd α_i iau valori întregi între $-\infty$ și 0.

Din modul cum este definită monogeneitatea, se deduce imediat următorul rezultat. Integrala lui $f(\omega)$ pe o curbă închisă, situată în spațiul cu $n+2$ dimensiuni, care prin deformări continue se poate reduce la un punct fără să întîlnească singularități ale lui $f(\omega)$, este nulă.

De asemenea, se observă că avem și pentru n impar

$$\int_{E_{n+1}} f(\omega) \left[\sum_{i=0}^{n} \varphi_i \, dx_0 \, dx_1 \ldots dx_{i-1} \, dx_{i+1} \ldots dx_n \, dy + \theta \, dx_0 \, dx_1 \ldots dx_n \right] = 0,$$

E_{n+1} fiind o varietate cu $n+1$ dimensiuni închisă, căreia i se pot aplica formulele stokiene, iar $f(\omega)$ monogenă. Dacă înlocuim pe $f(\omega)$ cu derivata sa $f'(\omega)$, relația de mai sus devine

$$\int_{E_{n+1}} \sum_{i=0}^{n+1} \frac{\partial f(\omega)}{\partial x_i} \, dx_0 \, dx_1 \ldots dx_{i-1} \, dx_{i+1} \ldots dx_{n+1} = 0 \quad (x_{n+1} = y)$$

sau

$$\int_{E_{n+1}} \frac{df(\omega)}{dn} \, d\sigma_{n+1} = 0, \tag{79}$$

care în real este o formulă Green cunoscută.

Să căutăm acum condițiile de monogenitate în cazul cînd variabila ω are o infinitate de componente

$$\omega = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} (x_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n} + \theta y_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}) \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n}.$$

Aceste condiții se obțin tot din

$$d[f(\omega) \, d\omega] = 0,$$

unde presupunem că $f(\omega)$ și derivatele sale parțiale aparțin lui (l). Avem, în real,

$$\sum_{\beta_1, \dots \beta_n}^{+\infty} dU_{\alpha_1-\beta_1, \dots, \alpha_n-\beta_n} dx_{\beta_1, \dots, \beta_n} - \sum_{\beta_1, \dots \beta_n}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} dV_{\alpha_1-\beta_1, \dots, \alpha_j-\beta_j-2, \dots \alpha_n-\beta_n} \right) dy_{\beta_1, \dots \beta_n} = 0$$

și

$$\sum_{\beta_1, \dots, \beta_n}^{+\infty} dU_{\alpha_1-\beta_1, \dots, \alpha_n-\beta_n} dy_{\beta_1, \dots \beta_n} + \sum_{\beta_1, \dots \beta_n}^{+\infty} dV_{\alpha_1-\beta_1, \dots, \alpha_n-\beta_n} dx_{\beta_1, \dots, \beta_n} = 0$$

care sînt echivalente cu

$$\frac{\partial U_{\alpha_1-\gamma_1, \dots, \alpha_n-\gamma_n}}{\partial x_{\beta_1, \dots \beta_n}} = \frac{\partial U_{\alpha_1-\beta_1, \dots, \alpha_n-\gamma_n}}{\partial x_{\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n}} = \frac{\partial U_{\alpha_1-\beta_1, \dots, \alpha_n-\beta_n}}{\partial y_{\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n}} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial V_{\alpha_1-\gamma_1, \dots, \alpha_j-\gamma_j-2, \dots, \alpha_n-\gamma_n}}{\partial x_{\beta_1, \dots \beta_n}} = 0, \tag{80}$$

$$\frac{\partial V_{\alpha_1-\beta_1, \dots \alpha_n-\beta_n}}{\partial y_{\gamma_1, \dots \gamma_n}} = \frac{\partial V_{\alpha_1-\gamma_1, \dots, \alpha_n-\gamma_n}}{\partial y_{\beta_1, \dots \beta_n}},$$

$$\frac{\partial U_{\alpha_1-\beta_1 \dots \alpha_n-\beta_n}}{\partial y_{\gamma_1, \dots \gamma_n}} = \frac{\partial U_{\alpha_1-\gamma_1, \dots, \alpha_n-\gamma_n}}{\partial y_{\beta_1, \dots \beta_n}},$$

$$\frac{\partial V_{\alpha_1-\beta_1, \dots, \alpha_n-\beta_n}}{\partial x_{\gamma_1, \dots \gamma_n}} = \frac{\partial V_{\alpha_1-\gamma_1, \dots, \alpha_n-\gamma_n}}{\partial x_{\beta_1, \dots \beta_n}},$$

și

$$\frac{\partial U_{\alpha_1-\gamma_1, \dots, \alpha_n-\gamma_n}}{\partial x_{\beta_1, \dots, \beta_n}} = \frac{\partial V_{\alpha_1-\beta_1, \dots, \alpha_n-\beta_n}}{\partial y_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}}$$

și se verifică, destul de ușor, că funcțiile conjugate sînt soluțiile a o infinitate de ecuații Laplace.

Dacă se caută în algebra B_n condițiile de monogenitate pentru variabila ω sub forma redusă

$$\omega = x_0 + \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \dots + \varphi_n x_n$$

se găsesc pentru

$$f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{\alpha_1, \dots \alpha_n} \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \dots \varphi_n^{\alpha_n}$$

condițiile

$$\frac{\partial U_{\alpha_1, \dots \alpha_{i-1}, \alpha_i-1, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n}}{\partial x_j} = \frac{\partial U_{\alpha_1, \dots \alpha_{j-1}, \alpha_j-1, \alpha_{j+1}, \dots \alpha_n}}{\partial x_i} \qquad (i \neq j) \tag{81}$$

iar pentru variabila ω sub forma

$$\omega = \sum_{\substack{n=-\infty \\ \alpha_1, \dots \alpha_n}}^{+\infty} x_{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n} \varphi_1^{\alpha_1} \dots \varphi_n^{\alpha_n}$$

condițiile

$$\frac{\partial U_{\alpha_1-\beta_1,\ldots,\alpha_n-\beta_n}}{\partial x_{\gamma_1,\gamma_2\ldots\gamma_n}} = \frac{\partial U_{\alpha_1-\gamma_1,\ldots\alpha_n-\gamma_n}}{\partial x_{\beta_1,\ldots\beta_n}} \tag{82}$$

și se vede că monogenitatea în A_n implică monogenitate în B_n, atît pentru variabila redusă, cît și pentru cazul general.

14. Polinoame armonice. Dacă considerăm soluțiile ecuației lui Laplace de $n+2$ variabile sub forma unui polinom omogen de gradul s, care conține C^s_{n+s+1} parametri arbitrari, sîntem conduși, prin derivare și introducere în ecuația lui Laplace la C^{s-2}_{n+s-1} legături între parametri. Deci soluția generală, sub formă de polinom omogen, depinde de

$$C^s_{n+s+1} - C^{s-2}_{n+s-1} = \frac{(n+s-1)!\,(n+2s)}{s!\,n!}$$

parametri arbitrari. Fie acum puterea s a unui număr ω din algebră:

$$\omega^s = (x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_n x_n + \theta y)^s;$$

numărul componentelor acestei funcții hipercomplexe este dat de numărul elementelor distincte din

$$(x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_n x_n)^s + C^1_s (x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_n x_n)^{s-1}\ \theta y, \tag{83}$$

care este

$$C^s_{n+s} + C^{s-1}_{n+s-1} = \frac{(n+s-1)!\,(n+2s)}{s!\,n!},$$

și prin urmare același. Aceste funcții sînt liniar independente, deoarece conțin numai cîte un element distinct din (83) ale cărui componente sînt liniar independente, deci funcțiile conjugate ale lui ω^s formează o bază de polinoame armonice și orice polinom armonic de grad s se exprimă printr-o combinație liniară a lor.

Putem deci scrie

$$\omega^s = \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n=s}^{s} \varphi_0^{\alpha_0}\varphi_1^{\alpha_1}\ldots\varphi_n^{\alpha_n} P_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_n} + \sum_{\beta_0+\beta_1+\ldots\beta_n=s-1}^{s-1} \varphi_0^{\beta_0}\varphi_1^{\beta_1}\ldots\varphi_n^{\beta_n}\theta Q_{\beta_0,\beta_1\ldots\beta_n} \qquad (\varphi_0 = 1)$$

$P_{\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n}$, $Q_{\beta_0,\beta_1\ldots\beta_n}$ fiind polinoame omogene de gradul s în variabilele $x_0, x_1 \ldots x_n, y$.

Un polinom omogen de gradul s, în $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n, y$, soluție a ecuației lui Laplace, se va scrie deci sub forma

$$U_s(x_0, x_1 \ldots, x_n, y) = \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n=s}^{s} p_{\alpha_0,\ldots\alpha_n} \cdot P_{\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n} + \sum_{\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_n=s-1}^{s-1} q_{\alpha_0\beta_0\beta_1,\ldots,\beta_n} Q_{\beta_0,\beta_1,\ldots\beta_n}.$$

Să arătăm acum că putem găsi totdeauna un număr λ_s din algebră, astfel încît să avem

$$U_s = \text{Real}\ (\lambda_s \omega^s). \tag{84}$$

Să luăm pentru λ_s numărul hipercomplex

$$\lambda_s = \sum_{\substack{0 \\ \alpha_0+\alpha_1+\ldots\alpha_n=s}}^{s} p^*_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_n} \varphi_0^{-\alpha_0} \varphi_1^{-\alpha_1} \ldots \varphi_n^{-\alpha_n} + \sum_{\substack{0 \\ \beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_n=s-1}}^{s-1} q^*_{\beta_0,\ldots\beta_n} \varphi_0^{-\beta_0} \varphi_1^{-\beta_1} \ldots \varphi_n^{-\beta_n} \theta,$$

numerele p^* și q^* fiind constante reale sau complexe ce urmează a fi determinate, numărul lor fiind identic cu al lui p și q, corespondența fiind realizată de indici. Făcînd identificarea coeficienților lui $P_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ și $Q_{\beta_0,\beta_1\ldots,\beta_n}$ din identitatea (84) obținem următorul sistem

$$p_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = p^*_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$$

$$q_{\beta_0,\beta_1,\ldots\beta_n} = -q^*_{\beta_0,\beta_1,\beta_2\ldots\beta_n} - q^*_{\beta_0,\beta_1-2,\beta_2,\beta_3\ldots\beta_n} - q_{\beta_0,\beta_1,\beta_2-2,\ldots\beta_n} \ldots - q_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n-2},$$

care poate fi rezolvat din aproape în aproape fără ajutorul determinanților, deoarece este de tip triunghiular. Deci rezolvarea lui cînd $s \to \infty$ este posibilă în acest mod și soluția găsită pe această cale este unică. Cînd $s \to \infty$, $q^*_{\beta_0,\ldots\beta_n}$ poate fi reprezentat printr-o serie convergentă sau divergentă. Se poate și aici înlocui seria respectivă cînd suma nu este determinată cu o sumă Borel absolut sumabilă, deoarece între q și q^* legăturile sînt între un număr finit de termeni și se știe că în acest caz relațiile se mențin, dacă se înlocuiesc q^* cu sumele Borel. Deducem de aici că pentru orice serie, soluție a ecuației lui Laplace,

$$S(x_0, x_1 \ldots x_n, y) = \sum_{\substack{n=0 \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta}}^{\infty} a_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \cdot y^{\beta}$$

și care pusă sub formă de sumă de polinoame omogene are forma

$$S(x_0, x_1 \ldots x_n, y) = \sum_{\substack{k=0 \\ \alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta=k \\ \beta,\alpha_i>0}}^{\infty} U_{\alpha_0,\ldots\alpha_n,\beta}(x_0, x_1, \ldots, x_n, y)$$

se poate găsi un șir de numere hipercomplexe

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

astfel încît să avem

$$S(x_0, x_1 \ldots x_n, y) = \text{Real}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \omega^k\right).$$

15. Asupra structurii algebrelor A_n și B_n. Un număr din algebra B_n are următoarea formă

$$\xi = \sum_{\substack{n=-\infty \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n}}^{+\infty} \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_n^{\alpha_n} x_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}.$$

Dacă considerăm algebrele infinite de tipul B_1, însă de elementele bazei

$$(B_1^{(1)}) \qquad \varphi_1^q$$

$$(B_1^{(2)}) \qquad \varphi_2^q$$

$$\vdots$$

$$(B_1^{(n)}) \qquad \varphi_n^q,$$

se vede imediat că algebra B_n este produsul direct al acestor n algebre $B_1^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots n$,

$$B_n = B_1^{(1)} \times B_1^{(2)} \times B_1^{(3)} \times \ldots \times B_1^{(n)}.$$

Pentru acest motiv vom numi algebră B_1 algebră ciclică infinită *elementară*. Se vede de aici că nedeterminarea în ceea ce privește structura lui B_1 se menține și pentru B_n. Să considerăm acum algebra finită de ordinul $2\,(2p+1)^n$ de elementele bazei

$$\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_n^{\alpha_n},\quad \theta\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_n^{\alpha_n}, \tag{85}$$

cu

$$\varphi_i^{2p+1} = 1 \tag{86}$$

și

$$\theta^2 = -1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \ldots - \varphi_n^2, \tag{87}$$

numerele α_i luînd valori întregi între $-p$ și $+p$. Din cauza legăturii eliptice (87) dintre θ și φ_i^2 urmează că norma algebrei, considerată ca produs de elemente liniare, are toate aceste liniare imaginare, oricare ar fi p și n. Deci algebra A_n considerată ca limita oricărei algebre finite este suma directă a ∞^n algebre complexe. Este ușor de văzut că raționamentul de mai sus este valabil pentru orice ecuație caracteristică (2), care poate fi scrisă ca o sumă de puteri pare cu coeficienți reali și pozitivi. Putem afirma deci că algebrele asociate acestor tipuri de ecuații sînt totdeauna sume directe de algebre complexe. Ca aplicație, să considerăm algebrele definite de elementele bazei

$$1, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{2n-1},$$

unde φ este legat de relația

$$\varphi^{2n} + a_1\varphi^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1}\varphi + a_{2n} = 0, \tag{88}$$

pentru care ecuația

$$\mu^{2n} + a_1\mu^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1}\mu + a_{2n} = 0 \qquad (a_k \in R)$$

are toate rădăcinile imaginar conjugate și simple. În virtutea acestui fapt, urmează că (88) se poate scrie ca o sumă de pătrate,

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=o}^{n}\beta_{ij}\varphi^i\right)^2 = 0.$$

Notînd cu $\theta_j = \sum_{i=0}^{n} \beta_{ij} \varphi^i$, obținem imediat că o funcție monogenă de variabila ω,

$$\omega = \sum_{1}^{m} \theta_j x_j ,$$

este soluție a ecuației lui Laplace

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} = 0.$$

III. ALGEBRE INFINITE ASOCIATE LA ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE, OMOGENE, CU COEFICIENȚI CONSTANȚI, DE ORDIN OARECARE

16. Operații cu numere în algebră. Fie acum ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul m cu $p+1$ variabile (1)

$$\sum C_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta} \frac{\partial^n U}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_{1\ldots}^{\alpha_1} \partial x_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \partial x_p^{\beta}} = 0, \tag{89}$$

a cărei ecuație caracteristică este

$$\sum C_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta} \varphi_{0.}^{\alpha_0} \varphi_{1\ldots.}^{\alpha_1} \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \theta^{\beta} = 0, \qquad \varphi_0 = 1, \varphi_i^0 = 1, \theta^0 = 1 \tag{90}$$

care, dacă punem în evidență pe θ, se scrie

$$\lambda_0 \theta^n + \lambda_1 \theta^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} \theta + \lambda_n = 0, \tag{90'}$$

unde $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sînt polinoame omogene în $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$, de gradul $0, 1, \ldots, n$, respectiv.

Elementele algebrei vor fi

$$\begin{aligned} &\varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}, \\ &\varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \theta, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \theta^{n-1} \end{aligned} \tag{91}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ iau toate valorile întregi pozitive și negative între $-\infty$ și $+\infty$, iar θ^n este dat, în funcție de puterile lui $\varphi_i^{\alpha_i}$ și θ^{β} ($\beta < n$), de (90').

Un număr din algebră este, prin urmare, de următoarea formă:

$$\omega = X_0 + X_1 \theta + X_2 \theta^2 + \ldots + X_{n-1} \theta^{n-1}$$

cu

$$X_i = \sum_{\substack{-\infty \\ \alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_{p-1}}}^{+\infty} a^{(i)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}} \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}.$$

Produsul a două numere din algebră este complet determinat de ecuația (90′), însă, pentru ca să fie finite componentele noului număr rezultat din înmulțire, este necesar ca seriile

$$X_i^* = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}}^{+\infty} x^{(i)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}}$$

să fie absolut convergente. Vom spune și în această situație că ω aparține lui (l).

Dacă un număr ω_N din algebră are numărul componentelor finit, adică $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ iau valori întregi între $-N$ și $+N$, atunci produsul $\omega \cdot \omega_N$ are întotdeauna sens. Nu se mai cere în acest caz ca seriile X_i^* să fie absolut convergente, ci numai ca numerele

$$x^{(i)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}}$$

să fie mărginite. Vom spune, în acest caz, că ω aparține lui (m).

Numărul obținut prin înmulțirea a două numere, hipercomplexe ω_l, ω_m, indicele indicînd că $\omega_l \in (l)$ și $\omega_m \in (m)$, este un număr care aparține lui (m), deci mulțimea numerelor ω_m formează un grup aditiv, mulțimea scalarilor fiind extinsă la $\omega_l \in (l)$.

Numerele ω_m, în general, nu aparțin însă algebrei de mai sus decît numai dacă ω_m are un număr finit de componente, însă orice număr ω_l este un număr ω_m.

Componentele X_i ale numărului ω aparțin algebrei B_{p-1}, care este produsul direct a $p-1$ algebre ciclice infinite elementare. Se vede de aici că există un paralelism între algebrele astfel construite și algebrele finite de ordinul $n+1$, [2], de elementele bazei

$$1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^n,$$

cu ecuația caracteristică

$$\lambda_0 \theta^{n+1} + \lambda_1 \theta^n + \ldots + \lambda_n \theta + \lambda_{n+1} = 0,$$

cu deosebirea că locul algebrei reale a fost luat de algebra B_1, sau de produsul direct al acestor algebre. Acesta este motivul pentru care numim algebra B_1 o algebră elementară.

Se vede că numărul de algebre B_1, care intervin în produsul direct, este dat de numărul variabilelor x_i, care intervin în ecuația diferențială minus doi. Putem spune, deci, în acest sens, că algebra numerelor reale este o algebră $B_1^{(0)}$, și este elementul de efect nul în mulțimea algebrelor $B_1^{(i)}$, față de operația de înmulțire directă.

Dacă considerăm $p+1$ algebre ciclice elementare infinite

$$B_1^{(0)}, B_1^{(1)}, B_1^{(2)}, \ldots, B_1^{(p)},$$

observăm că avem

$$B_1^{(0)} \times B_1^{(0)} = B_1^{(0)},$$
$$B_1^{(0)} \times B_1^{(i)} = B_1^{(i)},$$
$$B_1^{(i)} \times B_1^{(i)} = B_1^{(i)},$$
$$B_1^{(i)} \times B_1^{(j)} = B_1^{(i+j)},$$

înțelegîndu-se prin algebra $B_1^{(i+j)}$ algebra elementară infinită de elementele bazei

$$\varphi_i^{\alpha}\ \varphi_j^{\beta}$$

și unde s-a notat $B_1^{(0)}$ algebra numerelor reale. Urmează că produsele

$$B_1^{(\alpha_0)} \times B_1^{(\alpha_1)} \times \ldots \times B_1^{(\alpha p)}$$

determină un număr finit de elemente, deci pot forma baza unei algebre asociative și comutative de ordin finit. Elementele bazei sînt numere idempotente în algebră, iar elementul de efect nul în operația de înmulțire este dat de $B_1^{(0)}$. Ordinul algebrei este

$$C_p^0 + C_p^1 + \ldots + C_p^p = 2^p.$$

Fiecărui număr din algebră i se poate asocia un determinant infinit în patru direcții, care nu este absolut convergent, deoarece fiecare linie conține cel puțin odată fiecare componentă a numărului considerat. Acest determinant este determinantul coeficienților componentelor lui Ω, din produsul

$$\Omega \cdot \omega = 1,$$

transformat într-un sistem de ∞^{p-1} ecuații liniare, prin identificarea părții întîia cu partea a doua. Din efectuarea produsului $\Omega \cdot \omega$ se observă însă că în fiecare ecuație, o componentă a lui Ω conține un număr finit de coeficienți care sînt componentele lui ω, acest număr depinzînd de p și n. Prin urmare, dacă considerăm determinantul finit care îl generează, la puterea inversului ordinului determinantului, acest număr este finit și cînd ordinul determinantului tinde către infinit, deoarece produsul

$$\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} \left[\prod_{i=0}^{n-1} (1 + | x_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}}^{(i)} |) \right]$$

este absolut convergent, iar determinantul obținut mai sus este majorat de acest produs ridicat la o putere finită.

Dacă notăm acest număr cu $\mathfrak{N}(\omega)$, avem proprietatea

$$\mathfrak{N}(\omega \cdot \Omega) = \mathfrak{N}(\omega) \cdot \mathfrak{N}(\Omega).$$

Să considerăm acum șirul rădăcinilor unității, într-o ordine oarecare,

$$1, -1, i, -i, \frac{1}{2} + i\frac{3}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{3}{2}, \ldots,$$

și să considerăm $p - 1$, oarecare din ele

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1},$$

înlocuind în (90′) pe φ_i cu ε_i obținem o ecuație în θ de gradul n cu coeficienți reali sau complecși. Formăm ecuația în μ înlocuind pe θ cu μ. Rădăcinile ecuației vor fi

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n.$$

Cu aceste elemente construim numărul

$$N_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1}, \mu_i}(\omega) = \overline{X}_0 + \mu_1 \overline{X}_1 + \ldots + \mu_i^{n-1} \overline{X}_{n-1},$$

unde $\overline{X}_i$ se obțin din X_i înlocuind pe $\varphi_i^{\alpha_i}$ cu $\varepsilon_i^{\alpha_i}$, deci $N_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}, \mu_i}(\omega)$ este un număr real sau complex. El se bucură de următoarele proprietăți. Deoarece $\overline{X}_i$ sînt mărginite în modul, modulul lui $N_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}, \mu_i}(\omega)$ este de asemenea mărginit.

Pentru două numere, ω și $\mathfrak{w}$, din algebră, avem proprietatea

$$N_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}, \mu_i}(\omega \cdot \mathfrak{w}) = N_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}, \mu_i}(\omega) \cdot N_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}, \mu_i}(\mathfrak{w}).$$

Într-adevăr, dacă punem

$$\overline{\omega} = \overline{X}_0 + 0\,\overline{X}_1 + \ldots + 0^{n-1} \overline{X}_{n-1},$$
$$\overline{\mathfrak{w}} = \overline{Y}_0 + 0\,\overline{Y}_1 + \ldots + 0^{n-1} \overline{Y}_{n-1},$$

conform unei teoreme cunoscute, avem

$$N_{\mu i}(\overline{\omega} \cdot \overline{\mathfrak{w}}) = N_{\mu_i}(\overline{\omega})\ N_{\mu_i}(\overline{z}),$$

deoarece operația are loc în algebra finită de ordinul n, determinată de (3) unde s-a înlocuit φ_i cu ε_i. Dacă acum ținem seamă că și în algebra B_{p-1} avem proprietatea aceasta, și, înlocuind produsele $\overline{X}_i\ \overline{X}_j$ cu echivalentul lor dat de (68″), obținem rezultatul enunțat.

Produsul tuturor subnormelor

$$M(\omega) = \lim \left[\prod_{\varepsilon_p} \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\overline{X}_0 + \mu_i \overline{X}_1 + \ldots + \mu_i^{n-1} \overline{X}_{n-1} \right) \right] \right]^{\frac{1}{n \cdot p}}$$

se vede imediat că este convergent și se bucură de proprietatea

$$M(\omega \cdot \mathfrak{w}) = M(\omega) \cdot M(\mathfrak{w}).$$

Divizorii lui zero ai algebrei sînt formați de mulțimea punctelor ω, pentru care avem

$$N_{\varepsilon, \mu_i}(\omega) = 0, \tag{92}$$

pentru $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ ficși și μ_i corespunzător, de asemenea fix.

Un număr ω din algebră, pentru care avem

$$N_{\varepsilon, \mu_i}(\omega) = 0,$$

determină în algebră un ideal, idealul generat de ω și pentru orice număr din ideal

$$\Omega = \omega \cdot \mathfrak{w}$$

avem

$$N_{\varepsilon, \mu_i}(\Omega) = 0,$$

în virtutea proprietății demonstrate mai sus.

17. Inversul unui număr din algebră. Operația $\frac{1}{\omega}$ cu ω dat de

$$\omega = x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_{p-1} x_{p-1} + \theta x_p$$

definește o clasă de funcții $Y^{(i)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}}$, date de egalitatea

$$\frac{1}{\omega} = y_0 + \theta y_1 + \ldots + \theta^{n-1} y_{n-1}$$

cu

$$y_i = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1} \\ -\infty}}^{+\infty} Y^{(i)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}.$$

Pentru ecuația caracteristică (90) sau (90′) sub forma

$$\theta^3 = 6^2 (a_2 \varphi_2 + a_1 \varphi_1 + a_0) + \theta (b_{02} \varphi_2^2 + b_{11} \varphi_1 \varphi_2 + b_{20} \varphi_1^2 + b_{10} \varphi_1 + b_{01} \varphi_2 + b_{00}) +$$
$$+ c_{03} \varphi_2^3 + c_{12} \varphi_2^2 \varphi_1 + c_{21} \varphi_2 \varphi_1^2 + c_{30} \varphi_1^3 + c_{02} \varphi_2^2 + c_{11} \varphi_1 \varphi_2 + c_{20} \varphi_1^2 +$$
$$+ c_{01} \varphi_2 + c_{10} \varphi_1 + c_{00}$$

— pe care o luăm astfel pentru a avea expresii mai simple, deși calculele pot fi duse pînă la capăt și în cazul general — ele sînt date de următorul sistem infinit:

$$x_0 Y^{(0)}_{\alpha_1, \alpha_2} + x_1 Y^{(0)}_{\alpha_1 - 1, \alpha_2} + x_2 Y^{(0)}_{\alpha_1, \alpha_2 - 1} + x_3 \sum_{i,j=0}^{3}{}' c_{ij} Y^{(2)}_{\alpha_1 - i, \alpha_2 - j} =$$
$$= \begin{cases} 0 & \alpha_i = 0 \\ i = 1, 2, & \\ 1 & \alpha_i \neq 0, \end{cases} \tag{93}$$

$$x_0 Y^{(1)}_{\alpha_1, \alpha_2} + x_1 Y^{(1)}_{\alpha_1, \alpha_2 - 1} + x_2 Y^{(1)}_{\alpha_1, \alpha_2 - 1} + x_3 \left[Y^{(0)}_{\alpha_1, \alpha_2} + \sum_{i,j=0}^{2} b_{ij} Y^{(2)}_{\alpha_1 - i, \alpha_2 - j} \right] = 0,$$

$$x_0 Y^{(2)}_{\alpha_1, \alpha_2} + x_1 Y^{(2)}_{\alpha_1 - 1, \alpha_2} + x_2 Y^{(2)}_{\alpha_1, \alpha_2 - 1} + x_3 \Big[Y^{(1)}_{\alpha_1, \alpha_2} + a_0 Y^{(2)}_{\alpha_1, \alpha_2} + a_1 Y^{(2)}_{\alpha_1 - 1, \alpha_2} +$$
$$+ a_2 Y^{(2)}_{\alpha_1, \alpha_2 - 1} \Big] = 0.$$

Dacă obligăm pe α_i să ia numai valori nenegative, atunci sistemul obținut mai sus este următorul

$$x_0 Y^{(0)}_{0,0} + x_3 c_{0,0} Y^{(2)}_{0,0} = 1,$$
$$x_0 Y^{(1)}_{0,0} + x_3 [Y^{(0)}_{0,0} + b_{0,0} Y^{(2)}_{0,0}] = 0,$$
$$x_0 Y^{(2)}_{0,0} + x_3 [Y^{(1)}_{0,0} + a_0 Y^{(2)}_{0,0}] = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

care poate fi rezolvat din aproape în aproape. Obținem astfel

$$Y_{0,0}^{(0)} = \frac{x_0(x_0 + a_0 x_3) - b_{0,0} x_3^2}{x_0^2(x_0 + a_0 x_3) + x_3^2(c_{0,0} x_3 - b_{0,0} x_0)},$$

$$Y_{0,0}^{(1)} = \frac{-x_3(x_0 + a_0 x_3)}{x_0^2(x_0 + a_0 x_3) + x_3^2(c_{0,0} x_3 - b_{0,0} x_0)}, \tag{94}$$

$$Y_{0,0}^{(2)} = \frac{x_3^2}{x_0^2(x_0 + a_0 x_3) + x_3^2(c_{0,0} x_3 - b_{0,0} x_0)}.$$

. . . . . .

Soluția de asemenea este unică, dacă se consideră toate valorile $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ nepozitive. Deoarece în algebră inversul este unic, urmează că un sistem oarecare de soluții $Y^{(i)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}}$, dacă determină un $\frac{1}{\omega}$ care aparține lui (l), urmează că acest, sistem de soluții este unic în regiunea spațiului unde proprietatea se menține, celelalte sisteme de soluții neavînd această proprietate în regiunea respectivă. Dacă două sisteme de soluții, în două regiuni diferite, determină inverselе lui ω în regiunile respective, și dacă acele două regiuni au o frontieră comună, urmează că pe frontiera comună cele două sisteme de soluții coincid.

18. Serii întregi de variabila ω. Funcția exponențială

$$e^{\omega} = \exp \omega$$

cu

$$\omega = x_0 + x_1 \varphi_1 + \ldots + x_{p-1} \varphi_{p-1} + x_p \theta$$

este definită prin relația funcțională

$$\exp(\omega_1 + \omega_2) = \exp \omega_1 \cdot \exp \omega_2,$$

deci

$$\exp \omega = \exp x_0 \cdot \exp(\varphi_1 \cdot x) \ldots \exp(\varphi_{p-1} x_{p-1}) \exp(\theta x_p)$$

și se vede imediat că $\exp(\varphi_i x_i)$ aparține lui (l) pentru orice x_i.

Rămîne să mai vedem ce se întîmplă cu $\exp(\theta x_p)$. Dacă dezvoltăm, avem

$$\exp(\theta x_p) = 1 + \frac{\theta x_p}{1!} + \frac{\theta^2 x_p^2}{2!} + \ldots + \frac{\theta^s x_p^s}{s!} + \ldots,$$

însă θ este legat de relația (90). Dacă notăm cu A suma

$$\sum_{\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}, \beta} \left| \frac{C_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta}}{C_{0, 0, \ldots, 0, p}} \right| = A, \tag{95}$$

care este evident finită, se observă imediat că seria cu termenul general

$$u_s = \frac{(A)^{\frac{s}{n}}}{s!} \left| x_p^s \right|$$

este o majorantă a seriei modulelor tuturor termenilor care aparțin lui $\exp(\theta x_p)$, deci și $\exp(\theta x_p)$ aparține lui (l) pentru orice x_p, prin urmare putem afirma că suma seriei

$$\exp \omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!}$$

aparține lui (l), oricare ar fi numărul hipercomplex ω cu un număr finit de componente. Dacă ω aparține lui (l), atunci afirmația de mai sus este de asemenea valabilă. Într-adevăr, în această situație termenul general al lui $\exp \omega$ se scrie

$$\frac{(X_0 + \theta X_1 + \ldots + \theta^{n-1} X_{n-1})^s}{s!}$$

cu X_i dați de

$$X_i = \sum_{\alpha}^{+\infty} x^{(i)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}$$

și cum

$$|X_i| < M < \infty,$$

unde

$$|X_i| = \sum_{\alpha}^{+\infty} \left| x^{(i)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}} \right|,$$

urmează că o majorantă a sumei modulelor tuturor termenilor care aparțin lui $\exp \omega$ este dată de seria cu termenul general

$$u_s = \frac{\left(|X_0| + A^{\frac{1}{n}} |X_1| + \ldots + A^{\frac{n-1}{n}} |X_{n-1}|\right)^s}{s!} \leqslant \frac{(n.A.M)^s}{s!},$$

unde n, M și A sînt finite.

Să considerăm acum seria

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^s + \ldots,$$

unde ω are forma redusă

$$\omega = x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_{p-1} x_{p-1} + \theta x_p. \tag{96}$$

Fie în spațiul variabilei ω dreapta

$$\frac{x_0}{\beta_0} = \frac{x_1}{\beta_1} = \ldots = \frac{x_p}{\beta_p}$$

și înlocuind în ω^s pe x_i cu $\frac{\beta_i}{\beta_0} \cdot x_0$ obținem imediat o majorantă a sumei modulelor tuturor termenilor seriei (96) dată de seria

$$u = \sum_{s=0}^{\infty} \left(1 + \left|\frac{\beta_1}{\beta_0}\right| + \ldots + \left|\frac{\beta_{p-1}}{\beta_0}\right| + A^{\frac{1}{n}} \left|\frac{\beta_p}{\beta_0}\right|\right)^s |x_0|^s,$$

unde A este numărul dat de (95). Prin urmare, suma seriei (96) aparține lui (l) dacă x_i satisfac neegalitățile

$$\frac{-|\beta_i|}{|\beta_0|+|\beta_1|+\ldots+|\beta_{p-1}|+A^{\frac{1}{n}}|\beta_p|} < x_i < \frac{|\beta_i|}{|\beta_0|+|\beta_1|+\ldots+|\beta_{p-1}|+A^{\frac{1}{n}}|\beta_p|}. \tag{97}$$

Deducem de aici că putem asocia unei serii de forma

$$S(\omega)=\sum_{s=0}^{\infty} c_s\,\omega^s,$$

cu c_s și ω în algebra definită de (90), o regiune (D) din spațiul cu același număr de dimensiuni ca și numărul componentelor lui ω, astfel ca $S(\omega)$ să aparțină lui (l) pentru ω în (D).

Dacă c_s are forma

$$c_s = C_0^{(s)} + \theta\, C_1^{(s)} + \theta^2 C_2^{(s)} + \ldots + \theta^{n-1} C_{n-1}^{(s)}$$

și ω are forma

$$\omega = X_0 + \theta\, X_1 + \ldots + \theta^{n-1} X_{n-1},$$

cu

$$C_i^{(s)} = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \gamma^{(i,s)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1}}\, \varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}},$$

$$X_i = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1}}\, \varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}},$$

o majorantă a seriei modulelor tuturor termenilor lui $S(\omega)$ este dată de seria cu termenul general

$$U_s = \left[|C_0^s| + A^{\frac{1}{n}}|C_1^s| + \ldots + A^{\frac{n-1}{n}}|C_{n-1}^s|\right]\left[|X_0| + A^{\frac{1}{n}}|X_1| + \ldots + A^{\frac{n-1}{n}}|X_{n-1}|\right], \tag{98}$$

unde A are aceeași semnificație ca mai sus, iar $|C_i^{(s)}|$ și $|X_i|$ sînt sumele seriilor modulelor tuturor termenilor lui $C_i^{(s)}$ și X_i.

În expresiile lui $C_i^{(s)}$ sau X_i, indicii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ pot lua valori finite, sau pot varia între $-\infty$ și $+\infty$. În acest ultim caz, este evident că c_s trebuie să aparțină lui (l) pentru s finit.

Rezultatul de mai sus poate fi îmbunătățit. Să presupunem că am făcut produsele în U_s; dacă toți A^{k+p}, cu p întreg și k subunitar pozitiv, se înlocuiesc cu A^p, iar toți A^k se înlocuiesc cu unitatea, obținem un U_s^*, termenul general al unei serii cu termeni pozitivi, care este de asemenea o majorantă a seriei date.

19. Funcții monogene de variabila ω. O funcție de o variabilă hipercomplexă,

$$\omega = x_0 + \varphi_1 x + \ldots + \varphi_{p-1} x_{p-1} + \theta x_p,$$

are ∞^{p-1} componente

$$f(\omega) = U_0 + \theta U_1 + \theta^2 U_2 + \ldots + \theta^{n-1} U_{n-1}$$

cu

$$U_i = \sum_{\substack{-\infty \\ \alpha}}^{+\infty} U^{(i)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}},$$

pe care le vom numi funcții conjugate în ordinea dată de indicii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, i$. În cele ce urmează, se va vedea că noțiunea de conjugat este legată și de succesiunea funcțiilor $U^{(i)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}}$ în ordinea dată de indici, care de fapt este arbitrară, dar odată stabilită rămîne aceeași. În cele ce urmează, vom presupune că $f(\omega)$ și derivatele sale parțiale de primul ordin aparțin lui (m), adică într-o regiune (D) a spațiului ω, vom presupune că funcțiile reale $U^{(i)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}}$ de cele $p+1$ variabile reale sînt mărginite și au derivatele parțiale mărginite.

Vom spune că $f(\omega)$ este monogenă într-un punct M al lui (D), dacă diferențiala exterioară a lui

$$f(\omega)\, d\omega$$

este nulă în M, adică

$$d\left[f(\omega)\, d\omega\right]_M = \left[d f(\omega)\, d\omega\right]_M = 0. \tag{99}$$

Deoarece avem

$$d f(\omega) = d U_0 + \theta\, d U_1 + \ldots + \theta^{n-1} d U_{n-1},$$

înlocuind în (99), obținem

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{p-1} dU^{(0)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{p-1}}\, dx - \\
&\quad - \left(\sum_{\beta_0, \ldots, \beta_{p-1}} \frac{C_{\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{p-1}, 0}}{C_{0,0,\ldots,0,n}} U^{(n-1)}_{\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_{p-1} - \beta_{p-1}} \right) dx_p = 0, \\
&\sum_{i=0}^{p-1} dU^{(1)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}\, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{p-1}}\, dx_i + dU^{(0)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}}\, dx_p - \\
&\quad - \left(\sum_{\beta_0, \ldots, \beta_{p-1}} \frac{C_{\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{p-1}, 1}}{C_{0,0,\ldots 0,n}} U^{(n-1)}_{\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_{p-1} - \beta_{p-1}} \right) dx_p = 0, \\
&\sum_{i=0}^{p-1} dU^{(n-1)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{p-1}}\, dx_i + dU^{(n-2)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}}\, dx_p - \\
&\quad - \left(\sum_{\beta_0, \ldots, \beta_{p-1}} \frac{C_{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, n-1}}{C_{0,0,\ldots,0,n}} dU^{(n-1)}_{\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_{p-1} - \beta_{p-1}} \right) dx_p = 0,
\end{aligned} \tag{100}$$

$C_{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, i}$ fiind coeficienții ecuației diferențiale (89).

Efectuînd produsele exterioare (100), obținem condițiile de monogenitate

$$\frac{\partial U^{(k)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_i-1,\alpha_{i+1},\dots\alpha_{p-1}}}{\partial x_j} = \frac{\partial U^{(k)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\alpha_j-1,\alpha_{j+1},\dots\alpha_{p-1}}}{\partial x_i}\ (i, s \neq p, i \neq j)$$

$$\frac{\partial U^{(k)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_i-1,\alpha_{i+1},\dots\alpha_{p-1}}}{\partial x_p} + \tag{101}$$

$$+ \sum_{\beta_0,\beta,\dots,\beta p-1} \frac{C_{\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_{p-1},k}}{C_{0,0,\dots,0,n}} \frac{\partial U^{(n-1)}_{\alpha_1-\beta_1,\dots\alpha_{p-1}-\beta_{p-1}}}{\partial x_i} = \frac{\partial U^{k-1}_{\alpha_1,\dots\alpha_{p-1}}}{\partial x_i}\ (i \neq p)$$

pentru $k = 0, 1, \dots, n-1$; iar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$ luînd toate valorile întregi între minus infinit și plus infinit.

Se vede că în condițiile de monogenitate sînt incluse și condițiile ca $f(\omega)$ să fie monogenă în algebra B_{p-1}. Din modul cum este definită funcția $f(\omega)$, urmează că funcțiile $U^{(k)}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{p-1}}$, legate prin relațiile de monogenitate (101) sînt soluții ale ecuației (89). Pentru a demonstra direct acest fapt, să considerăm ecuația

$$\Delta U = \frac{\partial^n U}{\partial x_0^n} + \frac{\partial^n U}{\partial x_1^n} + \dots + \frac{\partial^n U}{\partial x_p^n} = 0. \tag{102}$$

Condițiile de monogenitate sînt în acest caz

$$\frac{\partial U^{(k)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_i-1,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{p-1}}}{\partial x_j} = \frac{\partial U^{(k)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\alpha_j-1,\alpha_{j+1},\dots\alpha_{p-1}}}{\partial x_i}\ (i \neq j \neq p)$$

$$\frac{\partial U^{(k)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_i-1,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{p-1}}}{\partial x_p} = \frac{\partial U^{(k-1)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1}}}{\partial x_i}\ (k = 0, 1, \dots n-2)$$

$$\frac{\partial U^{(0)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_i-1,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{p-1}}}{\partial x_p} + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\partial U^{(n-1)}_{\alpha_1,\dots\alpha_{j-1},\alpha_j-n,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_{p-1}}}{\partial x_i} = 0.\ (i \neq p)$$

Derivînd pe prima de $n-1$ ori în raport cu x_j, însumînd în raport cu j de la 0 la $p-1$, derivînd apoi a doua în raport cu x_p de $n-1$ ori și adunînd la rezultatul inițial avem

$$\Delta U^{(k)}_{\alpha_i-1} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^{n-1} U^{(k)}_{\alpha_j-1}}{\partial x_j^{n-1}} + \frac{\partial^{n-1} U^{(k-1)}}{\partial x_p^{n-1}}\right),$$

unde am notat

$$U^{(k)}_{\alpha_i-1} = U^{(k)}_{\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_{i-1},\alpha_i-1,\alpha_{i+1},\dots\alpha_{p-1}},$$

însă

$$\frac{\partial^{n-1} U^{(k)}_{\alpha_j-1}}{\partial x_j^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1} U^{(k+1)}_{\alpha_j-2}}{\partial x_j^{n-2}\partial x_p}$$

și repetînd operația de $n-k-1$ ori, avem, înlocuind în partea a doua

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=0}^{p-1}\frac{\partial^{n-1}U^{(k)}_{\alpha_j-1}}{\partial x_j^{n-1}}+\frac{\partial^{n-1}U^{(k-1)}}{\partial x_p^{n-1}}\right]=$$

$$=\frac{\partial^{n-k}}{\partial x_i\,\partial x_p^{n-k-1}}\left[\sum_{j=0}^{p-1}\frac{\partial^k U^{(n-1)}_{\alpha_i-n+k}}{\partial x_j^k}+\frac{\partial^k U^{(k-1)}}{\partial x_p^k}\right],$$

și ținînd seamă că

$$\frac{\partial^k U^{(k-1)}}{\partial x_p^k}=\frac{\partial^k U^{(0)}_{\alpha_j+k-1}}{\partial x_p\,\partial x_j^{k-1}},$$

obținem imediat

$$D.\left[\sum_{j=0}^{p-1}\frac{\partial U^{(n-1)}_{\alpha_j-n+k}}{\partial x_j}+\frac{\partial U^{(0)}_{\alpha_j+k-1}}{\partial x_p}\right]=\Delta U^{(k)}_{\alpha_i-1},$$

unde D este un operator de derivare parțială. Însă expresia din paranteză este nulă conform relațiilor de monogeneitate.

Făcînd $\alpha_j+k=\beta_j$, avem

$$\sum_{j=0}^{p-1}\frac{\partial U^{(n-1)}_{\beta_j-n}}{\partial x_j}+\frac{\partial U^{(0)}_{\beta_j-1}}{\partial x_p}=0,$$

deoarece este tocmai ultima relație de monogeneitate.

Se poate arăta că produsul variabilei ω,

$$\omega=x_0+\varphi_1 x_1+\ldots+\varphi_{p-1}x_{p-1}+\theta x_p,$$

cu o funcție monogenă este tot o funcție monogenă, fără să cerem funcției monogene de a fi o funcție de variabilă ω. În sfîrșit, se poate arăta că produsul a două funcții monogene este tot o funcție monogenă. Să arătăm că $f(\omega)$ fiind monogenă, și produsul $\omega f(\omega)$ este o funcție monogenă:

$$\omega\cdot f(\omega)=(x_0+\varphi_1 x_1+\ldots+\varphi_{p-1}x_{p-1}+\varphi_p x)(\xi_0+\theta\xi_1+\ldots+\theta^{n-1}\xi_{n-1})$$

$$\xi_i=\sum_{-\infty}^{+\infty}X^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1}}\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}.$$

Dacă notăm cu $\overline{X}^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1}}$ componentele funcției $\omega f(\omega)$, notînd $X_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}}$ cu X, și semnalînd în indici numai derogarea de la această succesiune, avem

$$\overline{X}^i=x_0X^{(i)}+x_1X^{(i)}_{\alpha_1-1}+\ldots+x_{p-1}X^{(i)}_{\alpha_{p-1}-1}+x_p\cdot X^{(i-1)}-$$

$$-\left(\sum_{\beta_0,\ldots,\beta_{p-1}}\frac{C_{\beta_0,\ldots,\beta_{p-1},i}}{C_{0,0,\ldots,0,n}}X^{(n-1)}_{\alpha_1-\beta_1,\ldots,\alpha_{p-1}-\beta_{p-1}}\right)x_p. \qquad (103)$$

Este ușor acum de arătat că $X^{(i)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}}$ verifică relațiile de monogenitate, dacă $X^{(i)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}}$ le verifică. Într-adevăr, nu avem decît să scriem legăturile între derivatele parțiale ale lui $\overline{X}^{(i)}$ și să ținem seamă de relațiile de legătură între $X^{(i)}$.

Deducem de aici că monogeneitatea, în anumite condiții, este închisă față de operația de adunare și înmulțire. Să mai remarcăm că în operația $\frac{1}{\omega}$, cînd se caută componentele numărului astfel definit în ipoteza că σ_i sînt nenegative, soluția este unică și funcțiile $Y_{0,0}^{(i)}$ găsite anterior (94) într-un caz particular, sînt soluții ale ecuației diferențiale care generează algebra. Se deduce aici, în baza aceluiași raționament făcut la ecuația lui Laplace, că toate componentele lui $\frac{1}{\omega}$, găsite în această situație, sînt soluții ale ecuației considerate.

Se verifică de asemenea că $\frac{1}{\omega}$, în această ipoteză, este chiar o funcție monogenă, deci cînd $\frac{1}{\omega}$ astfel găsit este un invers într-o regiune (D) a spațiului ω, adică $\frac{1}{\omega}$ aparține lui (l), urmează că și produsul $F(\omega)$,

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega} \cdot f(\omega),$$

cînd $f(\omega)$ este monogen, este de asemenea monogen.

Dacă $f(\omega)$ are un număr finit de componente, și aceasta se întîmplă numai dacă $f(\omega)$ este un polinom, urmează că funcția

$$F(\omega) = \frac{f(\omega)}{Q(\omega)}$$

reprezintă o funcție monogenă, fără să cerem ca unul din numerele $\frac{1}{Q(\omega)}$, pe care îl luăm pentru această operație, să aparțină lui (l).

Dacă $f(\omega)$ este o funcție monogenă oarecare — fără să aparțină lui (l), ci lui (m) — operația

$$F(\omega) = \frac{f(\omega)}{Q(\omega)},$$

pentru $Q(\omega)$ polinom sau funcție oarecare monogenă, are sens numai pentru funcțiile $\frac{1}{Q(\omega)}$ care aparțin lui (l).

În această situație, însă, într-o regiune a spațiului (D) $\frac{1}{Q(\omega)}$ este unică, deci $F(\omega)$ este unică.

Din modul cum este definită monogeneitatea se deduce imediat următorul rezultat. Integrala

$$\int_C f(\omega)\, d\omega$$

pe o curbă închisă care se poate reduce la un punct prin deformări continue, fără să întîlnească singularități ale funcției $f(\omega)$ este nulă.

Dacă notăm cu

$$\Phi_{\varphi_k}$$

derivatele parțiale ale ecuației caracteristice (90) în raport cu φ_k, pe care o scriem pentru simetrie sub forma

$$\Phi = \sum_{\alpha} c_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_p} \varphi_0^{\alpha_0} \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_p^{\alpha_p} = 0 \qquad (90'')$$
$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_i^0 = 1$$

obținem și

$$\int_{E_p} f(\omega) \left(\sum_{k=0}^{p} \Phi_{\varphi_k} dx_0 dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_p \right) = 0, \qquad (104)$$

unde E_p este o varietate p dimensională, închisă, situată în spațiul cu $p+1$ dimensiuni al variabilei ω, pe care o luăm sub forma redusă

$$\omega = x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_p x_p .$$

Acest rezultat se verifică imediat diferențiind exterior expresia de sub semnul integralei (104) și observînd că

$$\frac{\partial f(\omega)}{\partial x_k} = \frac{d f(\omega)}{d\omega} \varphi_k .$$

Dacă înlocuim pe $f(\omega)$ cu derivata sa de ordinul $n-1$, $f^{n-1}(\omega)$ relația se scrie în real

$$\int_{E_p} D \cdot U \, d\sigma_p = 0, \qquad (105)$$

unde D este un operator diferențial a cărui expresie o vom da mai jos, și care pentru ecuația lui Laplace este operatorul de derivare după direcția normalei. Vom da în cele ce urmează operatorului D o formă matricială. Să notăm

$$A_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{p-1}} = \left\| \begin{array}{c} C_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, 0} \\ C_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, 1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, p} \end{array} \right\| = \| C_{\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}, i} \| ,$$

cu $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{p-1}$, oarecare fixe. De asemenea,

$$A_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{p-2}} = \| C_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-2}, i, j} \| \cdot \| \partial \|$$

sau

$$A_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-2}} = \| A_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-2}, i} \| \cdot \| \partial \| ,$$

unde am notat

$$\| \partial \| = \left\| \begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial}{\partial x_p} \end{array} \right\|$$

și

$$\| A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-2}, i} \| = \| A_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-2}, 0} A_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-2}, 1}, \ldots A_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-2}, p} \| .$$

În același mod, notînd

$$A_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-3}} = \| A_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{p-3}, i} \| \cdot \| \partial \| ,$$

sîntem conduși la operatorul A, care se obține din cel precedent pe aceeași cale,

$$A = \| A_i \| \cdot \| \partial \|$$

și reprezintă o matrice cu o singură coloană și $p + 1$ linii. Operatorul D, introdus în (105), este produsul scalar

$$D = \| \alpha_0 \ \alpha_1 \ldots . \alpha_p \| \cdot \| A \| .$$

Este necesar să remarcăm că expresia matricială a operatorului D a fost obținută în ipoteza că ecuația caracteristică (90″) este ușor modificată și anume coeficienții $C_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ sînt amplificați cu numerele ce intervin în dezvoltarea

$$(x_0 + x_1 + \ldots + x_p)^n$$

pentru fiecare din termenii $x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p}$.

20. Polinoame conjugate formînd o bază. Să considerăm o ecuație diferențială cu derivate parțiale de ordinul n, liniară cu coeficienți constanți, omogenă, cu $p + 1$ variabile (89) și polinomul caracteristic atașat ei,

$$P(x_0, x_1, \ldots, x_p) = \sum_{\alpha} \left(c_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p} x_0^{\alpha_0} \cdot x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p} \right)$$

pe care îl presupunem fără lacune, adică conținînd toți termenii distincți ce se obțin din

$$(x_0 + x_1 + \ldots + x_p)^n$$

printr-o combinație liniară cu constantele $c_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p}$.

Să considerăm acum un polinom în $x_0, x_1 \ldots x_p$, omogen de gradul s ($s > n$), de asemena fără lacune, adică conținînd toți termenii distincți din

$$(x_0 + x_1 + \ldots + x_p)^s$$

în număr de

$$C_{p+s}^{s} ,$$

deci conținînd C_{p+s}^{s} parametri arbitrari. Să punem condiția ca un astfel de polinom $P(x_0, x_1 \ldots, x_p)$ să fie soluție a ecuației (89). Prin operațiile de derivare parțială, date de (89) se obține un polinom $P_{s-n}^{*}(x_0, x_1, \ldots, x_p)$ omogen de gradul $s-n$, care trebuie să fie identic nul.

Sîntem astfel conduși la

$$C_{p+s-n}^{s-n},$$

relații între parametrii arbitrari ai lui P_s. Prin urmare, un polinom omogen de gradul s soluție a ecuației (89) conține

$$C_{p+s}^{s} - C_{p+s-n}^{s-n}$$

parametri arbitrari.

Fie acum puterea a s-a a numărului hipercomplex

$$\omega^s = (x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_{p-1} x_{p-1} + \theta x_p);$$

numărul componentelor acestui funcții hipercomplexe este dat de numărul elementelor distincte din

$$\begin{aligned}(x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_{p-1} x_{p-1})^s + C_s^1 (x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_{p-1} x_{p-1})^{s-1} \theta \cdot x_p + \\ + C_s^2 (x_0 + \varphi_1 x + \ldots + \varphi_{p-1} x_{p-1})^{s-2} \theta^2 x_p^2 + \ldots\ldots\ldots + \\ + C_s^{n-1} (x_0 + \varphi_2 x_1 + \ldots + \varphi_{p1} x_{p-1})^{s-n+1} \theta^{n-1} x_p^{n-1},\end{aligned} \tag{106}$$

deoarece conține toate produsele

$$\varphi_0^{\alpha_0} \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \theta^{\beta} \quad (\varphi_0 = 1,\ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant n,\ 0 \leqslant \beta \leqslant n-1).$$

Numărul acestor componente distincte este

$$C_{s+p-1}^{s} + C_{s+p-2}^{s-1} + \ldots + C_{s+p-n+1}^{s-n+1}.$$

Avem egalitatea

$$C_{s+p-1}^{s} + C_{s+p-2}^{s-1} + \ldots + C_{s+p-n+1}^{s-n+1} = C_{s+p}^{s} - C_{p+s-n}^{s-n},$$

cum se poate verifica imediat. Să mai remarcăm că toate elementele din (106) sînt de forma

$$x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p},$$

deci liniar independente și sînt conținute numai cîte unul în componentele lui ω^s, deci funcțiile componente ale lui ω^s sînt liniar independente. În plus, ele formează o bază, deoarece numărul lor este egal cu numărul polinoamelor omogene de grad s, soluții ale ecuației (89). Deci, orice soluție a ecuației (89), polinom omogen de grad s, se obține printr-o combinație liniară a funcțiilor componente ale lui ω^s.

Putem deci scrie

$$\omega^s = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta} \varphi_0^{\alpha_0} \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \theta^{\beta} P^{(\beta)}_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}}(x_0, x_1, \ldots x_p),$$

cu

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{p-1} + \beta = s$$

$$0 \leqslant \beta \leqslant n-1$$

și

$$\varphi_0 = 1,$$

$P^{(\beta)}_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}}$ fiind polinoame omogene de gradul s în $x_0, x_1, \ldots, x_p$. Din cele de mai sus se deduce că un polinom omogen oarecare de gradul s, soluție a ecuației (89), se scrie sub forma

$$U_s(x_0, x_1, \ldots, x_p) = \sum_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta} p^{(\beta)}_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}} P^{(\beta)}_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}}.$$

Să arătăm acum că putem găsi totdeauna un număr λ_s din algebră, astfel încît să avem

$$U_s = \text{Real } (\lambda_s \omega^s).$$

Pentru a duce calculele pînă la capăt, vom considera ecuația caracteristică următoare

$$\begin{aligned} \theta^3 = \theta^2 (a_2 \varphi_2 + a_1 \varphi + a_0) + \theta (b_{02} \varphi_2^2 + b_{11} \varphi_1 \varphi_2 + b_{20} \varphi_1^2 + \\ + b_{01} \varphi_2 + b_{10} \varphi_1 + b_{00}) + c_{03} \varphi_2^3 + c_{12} \varphi_2^2 \varphi_1 + c_{21} \varphi_2 \varphi_1^2 + c_{30} \varphi_1^3 + \\ + c_{02} \varphi_2^2 \theta + c_{20} \varphi_1^2 + c_{11} \varphi_1 \varphi_2 + c_{01} \varphi_2 + c_{10} \varphi_1 + c_{00}. \end{aligned} \tag{107}$$

Punînd

$$\omega^s = \sum_{\alpha+\beta \leqslant s} \varphi_1^\alpha \varphi_2^\beta P_{\alpha,\beta} + \Big(\sum_{\alpha+\beta < s-1} \varphi_1^\alpha \varphi_1^\beta Q_{\alpha,\beta}\Big) \theta + \Big(\sum_{\alpha+\beta \leqslant s-2} \varphi_1^\alpha \varphi_2^\beta R_{\alpha,\beta}\Big) \theta^2,$$

deci

$$\lambda_s = \sum_{\alpha+\beta \leqslant s} p^*_{\alpha,\beta} \varphi_1^{-\alpha} \varphi_2^{-\beta} + \Big(\sum_{\alpha+\beta \leqslant s-2} q^*_{\alpha,\beta} \varphi_1^{-\alpha} \varphi_2^{-\beta}\Big) \theta + \Big(\sum_{\alpha+\beta \leqslant s-2} r^*_{\alpha,\beta} \varphi_1^{-\alpha} \varphi_2^{-\beta}\Big) \theta^2,$$

urmează să determinăm pe p^*, q^* și r^*, din relația

$$U(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv \text{Real } (\lambda_s \omega^s), \tag{108}$$

unde

$$U_s(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{\alpha+\beta \leqslant s} p_{\alpha,\beta} P_{\alpha,\beta} + \sum_{\alpha+\beta \leqslant s-1} q_{\alpha,\beta} Q_{\alpha,\beta} + \sum_{\alpha+\beta \leqslant s-2} r_{\alpha,\beta} R_{\alpha,\beta},$$

Pentru orice s avem

$$p_{\alpha,\beta} = p^*_{\alpha,\beta},$$

deci mai rămîne să găsim relațiile care dau pe $q^*_{\alpha,\beta}$ și $r^*_{\alpha,\beta}$.

Pentru $s = 3$, avem

$$q_{20} = r^*_{20}\, c_{00},$$
$$q_{11} = r^*_{11}\, c_{00},$$
$$q_{02} = r^*_{02}\, c_{00}$$

$$q_{10} = r^*_{10}\, c_{00} + r^*_{11}\, c_{01} + r^*_{20}\, c_{10},$$
$$q_{01} = r^*_{01}\, c_{00} + r^*_{11}\, c_{10} + r^*_{02}\, c_{01},$$
$$q_{00} = r^*_{00}\, c_{00} + r^*_{01}\, c_{01} + r^*_{10}\, c_{10} + r^*_{11}\, c_{11} + r^*_{20}\, c_{20} + r^*_{02}\, c_{02},$$
$$r_{10} = q^*_{10}\, c_{00} + r^*_{10}\, a_0\, c_{00} + r^*_{11}\,(a_0\, c_{01} + a_2\, c_{00}) + r^*_{20}\,(a_0\, c_{10} + a_1\, c_{00}),$$
$$r_{01} = q^*_{01}\, c_{00} + r^*_{01}\, a_0\, c_{00} + r^*_{11}\,(a_0\, c_{10} + a_1\, c_{01}) + r^*_{02}\,(a_0\, c_{01} + a_2\, c_{00}),$$
$$r_{00} = q^*_{00}\, c_{00} + q^*_{01}\, c_{01} + q^*_{10}\, c_{10} + r^*_{00}\, a_0\, c_{00} + r^*_{01}\,(a_2\, c_{00} + a_0\, c_{01}) +$$
$$+ r^*_{10}\,(a_1\, c_{00} + a_0\, c_{10}) + r^*_{02}\,(a_0\, c_{02} + a_2\, c_{01}) + r^*_{11}\,(a_2\, c_{10} + a_1\, c_{01} + a_0\, c_{11}) +$$
$$+ r^*_{20}\,(a_1\, c_{10} + a_0\, c_{20}).$$

Este de remarcat faptul că sistemul de mai sus este triunghiular, adică fiecare din ecuațiile sistemului se rezolvă prin ea însăși sau cu ajutorul celor dinaintea ei.

Pentru un s oarecare avem:

$$q_{s-k-p,\,p} = c_{00}\, r^*_{s-k-p,\,p} + c_{10}\, r^*_{s-k-p+1,\,p} + c_{01}\, r^*_{s-k-p,\,p+1} +$$
$$+ c_{20}\, r^*_{s-k-p+2,\,0} + c_{11}\, r^*_{s-k-p+1,\,p+1} + c_{02}\, r^*_{s-k-p,\,p+2}, \tag{109}$$

unde p și k iau valorile

$$p = 0,1, \ldots, s-1,$$
$$k = 1, 2, \ldots, s$$

și

$$r_{s-k-p,\,p} = c_{00}\, q^*_{s-k-p,\,p} + c_{10}\, q^*_{s-k-p+1,\,p} + c_{01}\, q^*_{s-k-p,\,p+1} + c_{20}\, q^*_{s-k-p+2,\,p} +$$
$$+ c_{11}\cdot q^*_{s-k-p+1,\,p+1} + c_{02}\cdot q^*_{s-k-p,\,p+2} + a_0\, c_{00}\cdot r^*_{s-k-p,\,p} +$$
$$+ (a_2\, c_{00} + a_0\, c_{01})\, r^*_{s-k-p+1,\,p} + (a_1\, c_{00} + a_0\, c_{10})\, r^*_{s-k-p,\,p+1} +$$
$$+ (a_1\, c_{10} + a_0\, c_{20})\, r^*_{s-k-p+2,\,p} + (a_2\, c_{10} + c_1\, a_{01} + a_0\, c_{11})\, r^*_{s-k-p+1,\,p+1} +$$
$$+ (a_0\, c_{02} + a_2\, c_{01})\, r^*_{s-k-p,\,p+2}$$

cu

$$p = 0, 1, \ldots, s-2,$$
$$k = 2, 3, \ldots, s.$$

Asupra sistemului de mai sus în q^* și r^* facem următoarele observații. Oricare ar fi s, numărul maxim de termeni din partea a doua nu depășește 12, adică acest număr depinde de n și de p și nu de s. Acest rezultat se extinde și pentru n și p oarecare. Prin urmare, putem afirma că pentru o ecuație

(89) oarecare, sistemul (109), care determină pe λ_s, are un număr finit de termeni în partea a doua. Sistemul (109) este de tip triunghiular, adică poate fi rezolvat din aproape în aproape. Într-adevăr, pentru $k = 1$, avem

$$q_{s-1,0} = c_{00} r^*_{s-1,0},$$
$$q_{s-2,1} = c_{00} r^*_{s-1,0},$$
$$\vdots$$
$$q_{0,s-1} = c_{00} r^*_{0,s-1},$$

care ne dă imediat pe $r^*_{s-k,k-1}$. Pentru $k = 2$ și $p = 0$ avem ecuația

$$q_{s-2,0} = c_{00} r^*_{s-2,0} + c_{10} r^*_{s-1,0} + c_{01} r^*_{s-2,1},$$

care dă pe $r^*_{s-2,0}$. În același mod se vede că toți q^* și r^* se obțin din aproape în aproape, rezultat ce se menține pentru p și n oarecare.

Am arătat astfel că numerele λ_s sînt totdeauna în mod unic determinate, oricare ar fi s. Într-adevăr, considerat ca un sistem triunghiular, sîntem conduși în mod unic la toate componentele numărului λ_s, oricare ar fi s. Cînd s tinde către infinit, pentru componentele lui λ_s se ivesc următoarele situații. Întîi seria care dă pe q^* sau r^* este convergentă, ceea ce este cazul cel mai favorabil. Seriile lor sînt divergente în sensul că q și r au o sumă finită și bine determinată, care, cînd s tinde către infinit, devine infinită. Este evident că și în această situație

$$\text{Real } (\lambda_s \omega^s)$$

are sens, însă λ_s are componentele infinite. Cazul cel mai defavorabil apare atunci cînd seriile, care reprezintă pe q^* și r^*, sînt complet nedeterminate, sumele lor depinzînd de ordinea factorilor. Pentru cazul acesta se poate înlătura dificultatea, înlocuind suma seriei cu o sumă Borel. Dacă seria este absolut sumabilă, și cum în partea a doua a relațiilor (109) avem un număr finit de legături între q^* și r^*, după proprietățile cunoscute relative la sumele Borel, înseamnă că putem înlocui seriile lui r^* și q^* cu sumele lor Borel, pentru s finit sau infinit, relațiile (109) fiind verificate.

Rezultatele obținute în acest capitol sînt remarcabil de simple pentru cazul cînd ecuația (89) este de forma

$$\frac{\partial^n F}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial^n F}{\partial x \partial y^{n-1}} + a_n \frac{\partial^n F}{\partial y^n} = 0. \qquad (110)$$

În această situație, variabila hipercomplexă ω, are forma redusă [9].

$$\omega = x + \theta y,$$

cu θ legat de relația

$$\theta^n + a_1 \theta^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\theta + a_n = 0,$$

Un polinom omogen de gradul s în x, y, $U_s(x, y)$ depinde, în general, de $s + 1$ constante arbitrare și, punînd condiția să verifice ecuația (110), obținem $s-n+1$ legături între aceste constante, ceea ce implică că numărul parametrilor arbitrari ce mai rămîn în polinom este n. Să găsim în algebră un număr λ_s, astfel încît să avem

$$U_s(x, y) \equiv \text{Real } (\lambda_s \omega^s), \qquad (111)$$

punînd

$$U_s = \sum_{k=0}^{n-1} p_k P_k(x, y),$$

$$\omega^s = \sum_{k=0}^{n-1} \theta^k P_k(x, y),$$

$$\lambda_s = \sum_{k=0}^{n-1} p_k^* \theta^k,$$

unde p_k sînt dați și p_k^* urmează să fie determinați, identificînd în (111), avem

$$U_s \equiv p_0^* P_0 + p_1^* \alpha_1 P_{n-1} + p_2^* [\alpha_1 P_{n-2} + \alpha_2 P_{n-1}] +$$
$$+ \cdots p_{n-1}^* [\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_{n-1} P_{n-1}]$$

cu

$$\alpha_1 = -a_n,$$
$$\alpha_2 = a_1 a_n,$$
$$\alpha_3 = -a_n (a_1^2 - a_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

și sîntem astfel conduși la sistemul

$$p_0 = p_0^*$$
$$p_1 = \alpha_1 p_{n-1}^*$$
$$p_2 = \alpha_2 p_{n-1}^* + \alpha_1 p_{n-2}^*$$
$$\vdots$$
$$p_{n-1} = \alpha_{n-1} p_{n-1}^* + \alpha_{n-2} p_{n-2}^* + \cdots + \alpha_1 p_1^*.$$

Determinantul sistemului este $\alpha_1^{n-1} \neq 0$, deoarece presupunem $a_n \neq 0$. Sistemul (112) nu depinde de s. Matricea triunghiulară care ne duce de la vectorul p^* la p,

$$p = A p^*,$$

este aceeași, oricare ar fi numărul întreg $s \geqslant n - 1$ deci calculînd inversa acestei matrice, avem operatorul care ne va da pe p^* oricare ar fi s.

БЕСКОНЕЧНЫЕ АЛГЕБРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ОДНОРОДНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЛЮБОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе присоединяем к однородному дифференциальному уравнению с частными производными n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p} \frac{\partial^n U}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} = 0 \qquad (1)$$

ассоциативную и коммутативную бесконечную алгебру из элементов

$$\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\dots\varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}},$$

$$\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\dots\varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}\theta,$$

$$\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\dots\varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}\theta^{n-1},$$

связанных только характеристическим соотношением

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_p}\varphi_0^{\alpha_0}\varphi_1^{\alpha_1}\dots\varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}\theta^{\alpha_p}=0.$$

$$\varphi_0=1,\quad \varphi_i^0=1,\quad \theta^\circ=1,$$

которое получаем, отыскав для уравнения (1) моногенные решения переменной

$$\omega=x_0+\varphi_1x_1+\dots+\varphi_{p-1}x_{p-1}+\theta x_p.$$

Работа состоит из трех частей. В первой части исследуется уравнение Лапласа с тремя переменными

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}=0.$$

Ассоциированная бесконечная алгебра A_1 обладает элементами базы

$$\dots,\varphi^{-n},\ \theta\varphi^{-n},\dots,\varphi^{-1},\ \theta\varphi^{-1},\ 1,\ \theta,\dots,\varphi^n,\theta\varphi^n,\dots,$$

связанными соотношением

$$1+\theta^2+\varphi^2=0.$$

Числом алгебры является

$$\omega=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'(a_n+\theta b_n)\varphi^n,$$

и для того чтобы произведение двух чисел принадлежало также алгебре необходимо, чтобы последовательности (a_n) и (b_n) принадлежали (l).

К каждому числу алгебры присоединяем нормальный, типа Пуанкарэ, но расходящийся бесконечный детерминант в четырех направлениях (12). Доказываем, что если рассматривать укороченный детерминант в степени, равной $1/n$, где n его порядок при n стремящемся к бесконечности, получаем конечное число, которое называем модулем числа ω и имеем

$$N(\omega)\cdot N(\Omega)=N(\omega\cdot\Omega).$$

Исследуем алгебру B_1, подалгебру в A_1, для которой важные элементы суть

$$\dots\varphi^n\dots$$

Вводим поднормы в алгебры A_1 и B_1, являющиеся числами, ассоциированными с ω вида

$$X=\sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha^n x_n$$

(причем α есть корень единицы) в B_1, а в A_1

$$N_\alpha(\omega) = X + \sqrt{-1-\alpha^2}\, Y,$$

которые являются конечными и обладают свойством

$$N_\alpha(\omega \cdot \Omega) = N_\alpha(\omega) \cdot N_\alpha(\Omega).$$

Далее определяем норму в качестве произведения всех этих поднорм, взятых один раз в степени равной 1, где k соответствующее число; эта норма дается формулами (22) в B_1 и (24) в A_1. Операция $\frac{1}{\omega}$ определяет класс функций X_n, Y_n, данных бесконечной системой (26). Если n меняется от 0 до $+\infty$ или от 0 до $-\infty$, решение системы (26) является единственным и дано (25) или (27), причем все функции X и Y — гармоничные. В области пространства, где $\frac{1}{\omega}$ принадлежит (l), $\frac{1}{\omega}$ является именно обратным ω и к тому же единственным.

В разделе (5) исследуем степенные ряды. Экспоненциальная функция e^ω с ω, в сокращенном виде

$$\omega = x + \theta y + \varphi z,$$

определена сходящимся рядом во всем пространстве. Далее рассматривается ряд

$$1 + \omega + \ldots + \omega^n + \ldots$$

и находим область сходимости, данной (32). Таким образом выводим, что существует область (D) пространства ω, для точек которой

$$S(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\, \omega^n$$

должно быть сходящимся.

В разделе (6) находим условия моногенности для функции

$$f(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (U_n + \theta\, V_n)\, \varphi^n,$$

определенной в (D), с ограниченными составляющими в их совокупности и с частными производными первого порядка в (D), принадлежащими также (m). Условия моногенности получаем аннулированием внешней формы (35).

Вещественные функции U_n и V_n, удовлетворяющие (36), (36′) и (36″), являются решениями уравнения Лапласа. Доказываем, что интеграл $f(\omega)$ на замкнутой кривой, расположенной в пространстве, которая при непрерывных деформациях приводится к точке, не встречая разрывов $f(\omega)$, является нулевым. Но, на замкнутой поверхности S имеем также

$$\iint_S f(\omega)\,(dy\,dz + \theta\, dz\,dx + \varphi\, dx\,dy) = 0,$$

которое эквивалентно

$$\iint_s \frac{d f(\omega)}{dn}\, ds = 0,$$

при замене $f(\omega)$ своей производной.

Далее исследуем свойства моногенных функций. Получаем, что произведение двух моногенных функций будет также моногенным.

Отыскивая условия моногенности в B_1, находим для $\omega = x + \varphi z$

$$\frac{\partial U_n}{\partial z} = \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x};$$

следовательно могогенность в A_1 влечет за собой и моногенность в B_1. Находим условия моногенности в A_1 для ω, когда ω имеет бесконечное число составляющих и показываем, что сопряженные функции удовлетворяют системе уравнений Лапласа.

n — ая степень ω

$$\omega^n (x + \theta y + \varphi z)^n$$

определяет $2n + 1$ однородных гармонических полинома n-ой степени линейно-независимых, образующих базис; отсюда выводим, что любой однородный многочлен степени n в x, y, z—решение уравнения Лапласа—можно представить в виде линейной комбинации многочленов, данных ω^n. Показывается, что любой гармонический многочлен порядка n, $U_n(x, y, z)$ можно записать в виде

$$U_n(x, y, z) = \text{Real}\,(\lambda_n \omega^n).$$

Если ввести обозначения (45) и (46) определяются p^* и q^* при помощи уравнений (47).

Отсюда выводится следующий общий результат.

Пусть функция $f(x, y, z)$, решение уравнения Лапласа, которое разлагается вокруг начала в виде

$$f(x, y, z) = \sum_{j, i, k} a_{ijk}\, x^i\, y^j\, z^k,$$

с областью сходимости, содержащей более, чем одну точку. Группируя по однородным полиномам степени 0,1, . . . $f(x, y, z)$ пишем

$$f(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, y, z).$$

С каждым решением $f(x, y, z)$ можно ассоциировать гиперкомплексный ряд

$$\sum_0^\infty \lambda_n\, \omega^n$$

так, что

$$f(x, y, z) = \text{Real}\left(\sum_0^\infty \lambda_n\, \omega^n\right),$$

причем λ_n являются соответственно выбранными гиперкомплексными числами.

Далее исследуем структуру алгебры A_1 и B_1. Устанавливается, что рассматриваемая как предел конечных алгебр структура алгебры B_1 не определена. Но структура алгебры A_1, рассматриваемая как предел конечных алгебр, всегда является прямой суммой бесконечного числа комплексных алгебр.

Во второй части работы присоединяем к уравнению Лапласа с $n+2$ переменными

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$

бесконечную, ассоциативную и коммутативную алгебру базисными элементами

$$\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\cdots\varphi_n^{\alpha_n},$$
$$\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\cdots\varphi_n^{\alpha_n}\theta,$$

связанными соотношением

$$1+\varphi_1^2+\varphi_2^2+\cdots+\varphi_n^2+\theta^2=0$$
$$\varphi_i^0=1,\ \theta^0=1.$$

Число из алгебры имеет вид

$$\omega=\sum_{-\infty}^{+\infty}(x_{\alpha_1},\cdots,\alpha_{n_1}+\theta y_{\alpha_1},\cdots,\alpha_n)\,\varphi_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_n^{\alpha_n}$$

и произведение двух чисел, принадлежит алгебре, если ряды

$$(x_{\alpha_1},\cdots,\alpha_n),\ (y_{\alpha_1},\cdots,\alpha_n)$$

принадлежат (l). Бесконечный детерминант, норма и поднормы введены таким же путем и даны (67), (69), (68). Операция $\frac{1}{\omega}$ с ω в сокращенной форме

$$\omega=x_0+\varphi_1 x_1+\cdots+\varphi_n x_n+\theta y$$

приводит к классу функций с аналогичными свойствами случая трех измерений.

Условия моногенности получаем аналогичным путем, аннулируя

$$df(\omega)\,d\omega=0,$$

где

$$f(\omega)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(U_{\alpha_1},\cdots,\alpha_n+\theta V_{\alpha_1},\cdots\alpha_n)\,\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\cdots\varphi_n^{\alpha_n},$$

с ω в сокращенной форме, причем $f(\omega)$ и его частные производные принадлежат (m) в области (D) пространства (ω). Эти условия даны (78) и показываем, что функции U и V, связанные этими соотношениями, являются решениями уравнения Лапласа. Произведение двух моно-

genных функций есть также моногенная функция. Далее находим условия моногенности в алгебре B_n для переменной сокращенной формы и для общего случая. Выводим, что моногенность в A_n влечет моногенность в B_n. Функция

$$\omega^s = (x_0 + \varphi_1 x_1 + \cdots + \varphi_n x_n + \theta y)^s_\Lambda$$

определяет $C^s_{n+s+1} - C^{s-2}_{n+s-1}$ однородных гармонических полиномов степени s, линейно-независимых, образующих базис. В разделе (14) показываем, что можно найти последовательность гиперкомплексных чисел

$$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_s, \cdots$$

так, что решение уравнения Лапласа вида

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\alpha} a_{\alpha_0, \ldots, \alpha_n \beta} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_n} y^{\beta}$$

может быть тождественно

$$\text{Real}\left(\sum_0^\infty \lambda_s \omega^s\right).$$

Наконец, отыскиваем структуру алгебры A_n и находим, что, рассматриваемая как предел конечной алгебры, она всегда является прямой суммой ∞^n комплексных алгебр вследствие эллиптической связи между элементами базиса.

В третьей части работы присоединяем к уравнению с частными производными

$$\sum_0^n C_{\alpha_0, \ldots, \alpha_p} \frac{\partial^n U}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}$$

элементы алгебры, данные (91).

Все определенные для уравнения Лапласа свойства нетрудно распространить и на общий случай. Получаем условия, для того чтобы произведение двух чисел принадлежало алгебре и исследуем степенные ряды и класс чисел, определенных $\frac{1}{\omega}$. Получаем условия моногенности для сокращенной переменной

$$\omega = x_0 + \varphi_1 x + \ldots + \varphi_{p-1} x_{p-1} + \theta x_p$$

и показываем на уравнении (102), что функции, связанные соотношениями моногенности, являются условиями соответствующего уравнения.

Наконец, показываем, что решение уравнения (89) можно написать в виде целого ряда как

$$\text{Real } (\lambda_s \omega^s),$$

причем λ_s является соответственно выбранными гиперкомплексными числами. В конце работы дается приложение к уравнению (110) с двумя переменными, для которого результаты являются весьма простого вида.

ALGÈBRES INFINIES ASSOCIÉES À DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, HOMOG NES, AUX COEFFICIENTS CONSTANTS D'ORDRE QUELCONQUE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on associe à une équation différentielle aux dérivées partielles d'ordre n, aux coefficients constants et homogène

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p} \frac{\partial^n U}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} = 0$$

une algèbre infinie, associative et commutative d'éléments de la base

$$\varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots, \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}},$$

$$\varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \theta,$$

$$\varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \theta^{n-1},$$

uniquement liées par la relation caractéristique

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p} \varphi_0^{\alpha_0} \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \theta^{\alpha_p} = 0$$

$$\varphi_0 = 1, \ \varphi_i^0 = 1, \ \theta^0 = 1$$

qu'on obtient en cherchant pour l'équation (1), des solutions homogènes de variable

$$\omega = x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_{p-1} x_{p-1} + \theta x_p .$$

Le travail se divise en trois parties. La première s'occupe de l'équation de Laplace à trois variables

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

L'algèbre A_1 infinie associée a les éléments de la base

$$\ldots, \varphi^{-n}, \theta \varphi^{-n}, \ldots, \varphi^{-1}, \theta\varphi^{-1}, 1, \theta, \ldots, \varphi^n, \theta\varphi^n, \ldots$$

liés par la relation

$$1 + \theta^2 + \varphi^2 = 0.$$

Un nombre de l'algèbre est

$$\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_n + \theta b_n) \varphi^n$$

et, pour que le produit de deux nombres appartiennent à l'algèbre, il est nécessaire que les séries (a_n) et (b_n) appartiennent à (l).

A chaque nombre de l'algèbre, on associe un déterminant infini dans quatre directions (12), normal, de type Poincaré, mais divergent. Mais on

démontre qu'en considérant la réduite de ce déterminant à la puissance de l'inverse de son ordre à la limite lorsque l'ordre tend vers l'infini, on obtient un nombre fini appelé module du nombre ω et l'on a

$$N(\omega) \cdot N(\Omega) = N(\omega \cdot \Omega).$$

On étudie l'algèbre B_1, sous-algèbre en A_1 des éléments de la base

$$\ldots \varphi^n \ldots$$

On introduit des sous-normes dans les algèbres A_1 et B_1 qui sont des nombres attachés à ω de la forme

$$X = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha^n x_n$$

— α étant une racine de l'unité — en B_1 et en A_1

$$N_\alpha(\omega) = X + \sqrt{-1 - \alpha^2}\, Y$$

qui sont finies et jouissent de la propriété

$$N_\alpha(\omega \cdot \Omega) = N_\alpha(\omega)\, N_\alpha(\Omega).$$

On définit ensuite la norme comme produit de toutes ces sous-normes, prises une seule fois, à la puissance de l'inverse de leur nombre, donnée par (22) en B_1 et par (24) en A_1. L'opération $\frac{1}{\omega}$ définit une classe de fonctions X_n, Y_n, données par la système infini (26). Si n varie 0 à $+\infty$ ou de 0 à $-\infty$, la solution du système (26) est unique et donnée par (25) ou par (27), toutes les fonctions X et Y étant armoniques. Dans les régions de l'espace où $\frac{1}{\omega}$ appartient à (l), il est l'inverse même de ω et est unique.

Dans le 5e chapitre, l'Auteur étudie les séries de puissances. La fonction exponentielle e^ω, avec ω sous une forme réduite

$$\omega = x + \theta y + \varphi z$$

est définie par une série convergente dans tout l'espace. On considère ensuite la série

$$1 + \omega + \ldots + \omega^n + \ldots$$

et l'on trouve un domaine de convergence donné par (32). On déduit de la sorte qu'il existe un domaine (D) de l'espace de ω pour les points duquel

$$S(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n \omega^n$$

soit convergente.

Dans le 6e chapitre, on trouve les conditions de monogénéité pour une fonction

$$f(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (U_n + \theta\, V_n)\, \varphi^n$$

définie en (D) aux composantes bornées dans leur ensemble et aux dérivées partielles du premier ordre, appartenant également à (m). Les conditions de monogénéité s'obtiennent en annulant la forme extérieure (35). Les fonctions réelles U_n et V_n, qui satisfont à (36), (36′) et (36″), sont des solutions de l'équation de Laplace. On démontre que l'intégrale de $f(\omega)$ sur une courbe fermée dans l'espace, qui — par des déformations continues — se réduit à un point, sans rencontrer des discontinuités de $f(\omega)$, est nulle. Mais on a également, sur une surface fermée S,

$$\iint_S f(\omega)\,(dy\,dz + \theta\,dz\,dx + \varphi\,dx\,dy) = 0$$

qui est équivalente à

$$\iint_S \frac{df(\omega)}{dn}\,ds = 0$$

si l'on remplace $f(\omega)$ par sa dérivée.

On étudie ensuite des propriétés des fonctions monogènes. Ainsi, le produit de deux fonctions monogènes est aussi monogène.

Si l'on cherche les conditions de monogénéité en B_1, on trouve pour $\omega = x + \varphi z$

$$\frac{\partial U_n}{\partial z} = \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x}$$

la monogénéité en A_1 implique donc également la monogénéité en B_1. On trouve les conditions de monogénéité en A_1 pour ω ayant une infinité de composantes et l'on montre que les fonctions conjuguées vérifient un système d'équations de Laplace.

La puissance $n-a$ de ω

$$\omega^n = (x + \theta y + \varphi z)^n$$

définit $2n + 1$ polynômes harmoniques homogènes, de degré n, linéairement indépendants, formant une base; on en déduit que tout polynôme homogène de degré n en x, y, z, solution de l'équation de Laplace, peut être mis sous la forme d'une combinaison linéaire de polynômes donnés par ω^n. On montre que tout polynôme harmonique de l'ordre n, $U_n(x, y, z)$, peut être mis sous la forme

$$U_n(x, y, z) = \text{Réel}\ (\lambda_n \omega^n).$$

Par les notations (45) et (46) on détermine p^n et q^n au moyen des équations (47). On en déduit le résultat général suivant.

Soit une fonction $f(x, y, z)$, solution de l'équation de Laplace, qui — développée autour de l'origine — prend la forme

$$f(x, y, z) = \sum_{i,j,k} a_{ijk}\, x^i\, y^j\, z^k$$

avec une région de convergences contenant plus d'un point. Groupant selon les polynômes homogènes de degré 0, 1, ... $f(x, y, z)$, on écrit

$$f(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, y, z).$$

A chaque solution $f(x, y, z)$ on peut associer une série hypercomplexe

$$\sum_0^\infty \lambda_n \omega^n$$

telle que

$$f(x, y, z) = \text{Réel}\left(\sum_0^\infty \lambda_n \omega^n\right)$$

λ_n étant des nombres hypercomplexes convenablement choisis.

L'Auteur étudie ensuite la structure des algèbres A_1 et B_1. Considérant l'algèbre B_1 comme limite d'algèbres finies, on constate que sa structure est non déterminée. Cependant la structure de l'algèbre A_1, envisagée comme limite d'algèbres finies, conduit toujours à la conclusion qu'elle est la somme directe d'une infinité d'algebres complexes.

Dans la deuxième partie du travail, on associe l'équation de Laplace à $n + 2$ variables

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}$$

une algèbre infinie d'éléments de la base

$$\varphi_1^{\alpha_1} \quad \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n},$$

$$\varphi_1^{\alpha_1} \quad \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n} \theta,$$

liés par la relation

$$1 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_n^2 + \theta^2 = 0$$

$$\varphi_i^0 = 1, \quad 6^0 = 1$$

associative et commutative. Un nombre de l'algèbre a la forme suivante

$$\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} (x_{\alpha_1}, \ldots \alpha_{n_1} + \theta y_{\alpha_1}, \ldots, \alpha\ ) \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_n^{\alpha_n}$$

et le produit de deux nombres appartient à l'algèbre si les séries

$$(x_{\alpha_1}, \ldots, \alpha_n), \quad (y_{\alpha_1}, \ldots, \alpha_n)$$

appartiennent à (l). Le déterminant infini, la norme et les sous-normes sont introduits de la même manière et sont donnés par (67), (69), (68′). L'opération $\frac{1}{\omega}$ avec ω sous la forme réduite

$$\omega = x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_n x_n + \theta y$$

conduit à une classe de fonctions aux propriétés analogues à celles du cas à trois dimensions.

Les conditions de monogénéité sont obtenues de manière analogue, en annulant

$$df(\omega)\, d\omega = 0$$

avec

$$f(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} + \theta V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}) \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n}$$

ω ayant la forme réduite, $f(\omega)$, et ses dérivées partielles appartenant à (m) dans une région (D) de l'espace de (ω). Ces conditions sont données par (78) et l'on montre que les fonctions U et V, liées par ces relations, sont des solutions de l'équation de Laplace. Le produit de deux fonctions monogènes est également une fonction monogène. L'Auteur trouve ensuite les conditions de monogénéité dans l'algèbre B_n, pour la variable réduite et pour le cas général. Il déduit que la monogénéité en A_n attire la monogénéité en β_n. La fonction

$$\omega^s = (x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_n x_n + \theta y)^s$$

définit $C_{n+s+1}^{s} - C_{n+s-2}^{s-2}$, polynômes harmoniques homogènes, de degré s, linéairement indépendants, formant une base. Il montre ensuite, au chapitre (14), qu'on peut trouver une suite de nombres hypercomplexes

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_s \ldots$$

tels qu'une solution de l'équation de Laplace de la forme

$$\sum_{0}^{\infty} a_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n\beta} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} y^{\beta}$$

puisse être identique à

$$\text{Réel} \left(\sum_{0}^{\infty} \lambda_s \omega^s \right).$$

On cherche enfin la structure de l'algèbre A_n et l'on trouve que, envisagée comme limite d'une algèbre finie, elle est toujours la somme directe de ∞^n algèbres complexes, à cause de la liaison elliptique entre les éléments de la base.

Dans la troisième partie de l'ouvrage, on associe à l'équation aux dérivées partielles

$$\sum_{\substack{0 \\ \alpha_0,\ldots\alpha_\rho}}^{n} C_{\alpha_0,\ldots,\alpha_\rho} \frac{\partial^n U}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_\rho}} = 0$$

une algèbre infinie d'éléments de la base donnés par (91).

Toutes les propriétés établies pour l'équation de Laplace s'étendent, sans aucune difficulté, au cas général. On trouve les conditions nécessaires pour que le produit de deux nombres soit dans l'algèbre, on étudie les séries de puissances et la classe des nombres définis par $\frac{1}{\omega}$. On trouve les conditions de monogénéité pour la variable réduite

$$\omega = x_0 + \varphi_1 x + \ldots + \varphi_{p-1} x_{p-1} + \theta x_\rho$$

et l'on montre sur l'équation (102) que les fonctions liées par les relations de monogénéité sont des solutions de l'équation respective.

L'Auteur montre enfin qu'une solution de l'équation (89) sous la forme d'une série entière peut être mise sous la forme

$$\text{Réel}\,(\lambda_s\,\omega^s),$$

λ_s étant des nombres hypercomplexes convenablement choisis. Le travail s'achève sur une application à l'équation (110) en deux variables, dont les résultats sont des plus simples.

BIBLIOGRAFIE

1. Marcel N. Roșculeț, *O teorie a funcțiilor de o variabilă hipercomplexă în spațiul cu trei dimensiuni.* Studii și cercetări matematice, t. V, nr. 3—4, iulie-decembrie 1954, p. 361.
2. — *Funcții de o variabilă hipercomplexă în spațiul cu N dimensiuni.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe matematice și fizice, t. V, nr. 1, ianuarie-martie 1953, p. 135.
3. — *Funcții de o variabilă hipercomplexă în spațiul cu N dimensiuni. Funcții conjugate.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe matematice și fizice, t. V, nr. 3, iulie-septembrie 1953, p. 415.
4. P. W. Ketchum, *A Complete Solution of Laplace's Equation by an Infinite Hypervariable.* Amer. Journ. Math., 1929, t. 51, p. 179.
5. — *Solutions of Partial Differential Equations by Means of Hypervariables.* Amer. Journ. Math., 1932, t. 54, p. 253.
6. Stefan Banach, *Théorie des opérations linéaires.* Varșovia, 1932, p. 11—12.
7. E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes.* Paris, 1901, p. 97.
8. N. Ciorănescu, *Sur les fonctions harmoniques conjuguées.* Bull. Sci. Math., t. 56, februarie 1932.
9. Gr. C. Moisil, *Sur un algorithme généralisant la théorie des fonctions monogenes, qui peut être utile pour l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.* Annal. Acad. Roum. 1941, seria a III-a, t. XVI, mem. 17, p. 696.
10. S. Fedorov, *Monoghenosti.* Mat. Sbornik, 1946, t. 18, nr. 3, p. 353.
11. I. M. Ghelfand, *Lecții de algebră liniară.* Ed. tehnică, București, 1953.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

TEOREME CALITATIVE PENTRU ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE*)

DE

S. ZAIDMAN

INTRODUCERE

În lucrarea de faţă arătăm cum se pot obţine pentru anumite clase de ecuaţii şi sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale, teoreme cu privire la comportarea soluţiilor acestora « în mare ». Ecuaţiile de care ne ocupăm sînt de tip parabolic sau hiperbolic, variabila temporală t este pusă mereu în evidenţă, iar comportarea « în mare » se înţelege tocmai pentru $-\infty < t < \infty$ (eventual $0 < t < \infty$ sau $0 > t > -\infty$).

Astfel, se obţin teoreme de stabilitate şi stabilitate asimptotică, în raport cu condiţiile iniţiale, în sensul lui A. Liapunov, teoreme de aproape-periodicitate în sensul lui Bochner [1], sau teoreme de aproape-periodicitate asimptotică în sensul lui Frechet [2]. Este vorba deci de o problematică, care, urmînd modelul ecuaţiilor diferenţiale ordinare, trece dincolo de aşa-numita problematică clasică (existenţă, unicitate, corectitudine în sensul lui Hadamard, în fine, calculul efectiv al ecuaţiilor), intrînd în studiul calitativ al soluţiilor pe întreg domeniul lor de existenţă.

În literatura matematică de astăzi există un număr de rezultate de această natură. Astfel, este vorba de teoremele generale de aproape-periodicitate pentru soluţiile compacte între $-\infty < t < +\infty$ ale unor clase de ecuaţii diferenţiale operatoriale, stabilite în lucrarea lui S. Bochner şi J. von Neumann [3], importantele teoreme ale lui S. Sobolev [4], în care este demonstrată aproape-periodicitatea tuturor soluţiilor ecuaţiei undelor, de teoremele de stabilitate asimptotică după prima aproximaţie pentru anumite ecuaţii parabolice neliniare, stabilite în ultimii ani în lucrările lui R. Bellman [5], G. Prodi [6], R. Narasimhan [7].

În sfîrşit, în aceeaşi problematică intră, deşi nu în mod explicit, şi lucrarea lui V. E. Lianţe [8], în care se demonstrează, *cu ajutorul teoriei semigrupurilor de operatori* a lui E. Hille [9], teorema de existenţă, unicitate şi corectitudine a unei probleme mixte pentru sisteme parabolice cu partea dreaptă tare eliptică în sensul lui M. I. Vişic [10].

Observaţia noastră cu privire la caracterul (neexplicitat) calitativ al rezultatului lui V. E. Lianţe, constă în aceea că, împreună cu teorema de corectitudine se poate formula fără greutate şi teorema de stabilitate.

*) Lucrare prezentată Institutului de matematică în şedinţa din 25 mai 1955.

Lucrarea [8] ne-a sugerat ideea de a folosi în mod sistematic teoria semigrupurilor de operatori a lui H i l l e și în special formulele sale de tip exponențial, cu evaluările corespunzătoare, pentru a obține în mod unitar și păstrînd mereu analogia cu sistemele de ecuații diferențiale ordinare, cîteva teoreme de tip calitativ, unele noi (după cîte știm), altele regăsind cu alte mijloace, rezultate cunoscute.

CAPITOLUL I

SISTEME PARABOLICE CU PARTEA DREAPTĂ TARE ELIPTICĂ

1. Deoarece în acest capitol vom studia ecuații a căror parte liniară este de forma $\frac{\partial u}{\partial t} = A\,u$, unde A este un operator tare eliptic [10], vom reproduce după [8] și [10] definiția și principalele proprietăți ale acestor operatori.

Fie $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un operator diferențial, matrice pătratică de ordin N, cu elemente $L_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ operatori diferențiali de forma

$$L_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = (-1)^m \sum_{|k|=2m} a_{ij}^{(k)}(x)\, D^k + T_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right),$$

unde

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ (k) = (k_1 \ldots k_n),\ |k| = k_1 + \ldots + k_n,$$

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$$

ar

$$T_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

este un operator diferențial arbitrar de ordin $< 2m$

$$T_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|k|<2m} a_{ij}^{(k)}(x)\, D^k .$$

$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ este un operator tare eliptic, dacă, formînd matricile

$A^{(k)}(x) = \left(a_{ij}^{(k)}(x)\right),\ |k| = 2m,\ C^{(k)}(x) = \frac{1}{2}\left(A^{(k)}(x) + A^{*(k)}(x)\right),\ |k| = 2m,$

matricea $(-1) \sum_{|k|=2m} C^{(k)}(x)\, \xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n}$ este pozitiv definită pentru orice sistem de numere reale $(\xi_1 \ldots \xi_n)$, $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 > 0$.

După cum se arată în [8], un operator tare eliptic are proprietatea că sistemul $\frac{\partial u}{\partial t} = -L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u$ este parabolic în sensul lui I. G. P e t r o w s k i.

Fie $\Omega < R^{(n)}$ un domeniu mărginit cu frontiera S compusă dintr-un număr finit de bucăți S_{n-k}, de diferite dimensiuni, $k = 1, 2, \ldots n$.

Fie $H\ (\Omega)$ spațiul Hilbert complex cu elemente vectori-funcții, $u\ (x) = (u_1\ (x), \ldots u_N\ (x))$, cu componentele aparținînd lui $L_2\ (\Omega)$.

Produsul scalar este dat de formula

$$(u, v) = \int_\Omega \left(u_1 \bar{v}_1 + \ldots + u_N \bar{v}_N\right) dx_1 \ldots dx_n . \tag{1}$$

Domeniul inițial de definiție al operatorului $-L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ este mulțimea vectorilor funcție $u\ (x)$, care au în Ω derivate parțiale continue pînă la ordinul $2\ m$ inclusiv, sumabile la pătrat împreună cu toate aceste derivate, și satisfăcînd pe frontieră condițiile nule

$$D^r u \Big|_S = 0, \mid r \mid = r, \left(r = 0, 1, \ldots, m - 1 - \left[\frac{k}{2}\right]\right), \tag{2}$$

pe fiecare frontieră de ordin S_{n-k}.

În lucrarea [10], operatorul $-L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ este extins, devine un operator închis, definit pe o mulțime densă în $H\ (\Omega)$; condițiile (2) sînt satisfăcute în medie pătratică, există operatorul adjunct $-L^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Se demonstrează de asemenea, că dacă $-L\left((x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ satisface în Ω condiția (E) (a se vedea [10]), condiție care este satisfăcută de operatorii $-L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ cu coeficienți constanți, atunci avem pentru orice $u \in D_A$, $v \in D_{A^*}$, $A = -L$, $A^* = -L^*$,
relația

$$Re\ (Au\ u) \leqslant \beta\ (u, u), \quad Re\ (A^* v, v) \leqslant \beta\ (v, v) \tag{3}$$

2. Fie sistemul parabolic

$$\frac{\partial u\ (x, t)}{\partial t} = A\ u, \tag{4}$$

cu problema la limită mixtă $u \mid_{t=0} = \varphi\ (x) \in D_A \oplus (2)$ $(\mathfrak{A})$.

Presupunem că numărul β din relația (3) este $\leqslant 0$. Atunci avem

T e o r e m a 1. *Soluția banală a sistemului* (4) *este stabilă pentru* $\beta = 0$, *și asimptotic stabilă pentru* $\beta < 0$.

Stabilitatea se înțelege în sensul metricii definite prin (1).

D e m o n s t r a ț i e. Fie $u\ (x, t) = e^{\beta t}\ v\ (x, t)$. Funcția $v\ (x, t)$ satisface sistemul:

$$\frac{\partial v\ (x, t)}{\partial t} = (A - \beta I)\ v, \tag{3'}$$

$$v \mid_{t=0} = \varphi,\ Re\ (A - \beta I)\ u, u) \leqslant 0,\ Re\ (A^* - \beta I)\ \omega, \omega) \leqslant 0 \tag{4'}$$

Atunci, după cum se arată în [8], spectrul operatorului $A - \beta I$ este la stînga axei imaginare, și pentru orice $\sigma > 0$,

$$\| R(\sigma + i\tau; A - \beta I) \| < \frac{1}{\sigma}.$$

În aceste condiții, se poate aplica teorema fundamentală 12.2.1 a lui E. Hille [9], din care rezultă existența semigrupului de operatori

$$T(t; A - \beta I),\ t > 0,\ \| T(t) \| \leqslant 1,\ \frac{dT(t)}{dt} = (A - \beta I) T(t).$$

Soluția sistemului (4) cu condiția inițială $v|_{t=0} = \varphi$ se scrie sub forma

$$v(x, t) = T((t; A - \beta I)\varphi(x),$$

unde condiția inițială este satisfăcută în medie pătratică. Avem

$$\| v(x, t) \| \leqslant \| T(t) \| \ \| \varphi \| \leqslant \| \varphi \|,$$

iar

$$u = e^{\beta t} v, \quad \| u \| \leqslant e^{\beta t} \| v \| \leqslant e^{\beta t} \| \varphi \|.$$

Pentru $\beta = 0$, soluția banală este stabilă Liapunov în normă, iar pentru $\beta < 0, \| u \| \leqslant e^{\beta t} \| \varphi \| \to 0$ cu $t \to \infty$, deci soluția banală e asimptotic stabilă Liapunov în normă (cum am spus în introducere, teorema aceasta e de fapt o observație la rezultatele din [8]).

Observații 1. Avem $u(x, t) = T(t; A)\varphi$. Dacă numărul β de mai sus este < 0, avem:

$$\| u(x, t) \| = \| T(t; A)\varphi \| \leqslant e^{\beta t} \| \varphi \| \to \| T(t; A) \| \leqslant e^{\beta t},\ \beta < 0.$$

Această evaluare o vom folosi în cele ce urmează.

2. Iată un alt mod de a obține aceeași evaluare:

Se arată la fel ca în (8), că dacă $Re\,(Au, u) < \beta(u, u)$, $Re\,(A^* \omega, \omega) < \beta(\omega, \omega)$ cu $\beta < 0$, atunci spectrul operatorului A este la stînga axei $Re\,\lambda = \beta < 0$,
iar pentru orice $\sigma > \beta$ avem

$$\| R(\sigma + i\tau ; A) \| < \frac{1}{\sigma - \beta},\ \beta < 0.$$

Știm că, [9],

$$T(t; A) = \lim_{k \to \infty} \left\{ \frac{k}{t} R\left(\frac{k}{t} ; A \right) \right\}^k,$$

deci

$$\| T(t; A) \| \leqslant \lim_{k \to \infty} \left\{ \frac{k}{t} \cdot \frac{1}{\frac{k}{t} - \beta} \right\}^k = \lim_{k \to \infty} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\beta t}{k}} \right\}^k = e^{\beta t}$$

3. În lucrarea [10] se demonstrează următorul rezultat:
Fie sistemul

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -(\widetilde{C} u + K u + P u) + f(x)$$

în spațiul Hilbertian *real* (H' Ω) de vectori funcție $u(x) = (u_1 \ldots u_N)$, cu problema mixtă de mai sus; operatorul $-(\widetilde{C} + K + P) = -L$ satisface relația $(-Lu, u) < -\mu\ (u,u)$, $\mu > 0$. Atunci, toate soluțiile $u(x, t)$ cu proprietatea $u(x, t)$ și $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ continue și mărginite în fiecare domeniu de forma $x \in \Omega$, $0 < t < T'$, iar $u(x, t)$ continuă în $\overline{\Omega \times (t)}$, $(t) \equiv 0 < t < +\infty$, converg în medie pătratică, cînd $t \to \infty$, către soluția $u(x)$ a ecuației $-L\widetilde{u} + f(x) = 0, \widetilde{u} \in D_L$. Or, condițiile de mai sus sînt cerute de metoda demonstrației, iar teorema de existență a lui H i l l e (folosită în [8]) nu ne garantează satisfacerea acestor condiții. Teorema rămîne totuși adevărată, sub forma ceva mai generală din

T e o r e m a 2. *Fie sistemul* $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = Au + f(x), \tag{5}$$

cu problema mixtă ($\mathfrak{A}$) *în spațiul complex* H (Ω), *și presupunem că*

$$Re\,(Au, u) < \beta\,(u, u),\ Re\,(A^*\,\omega, \omega) < \beta\ (\omega, \omega),\ \beta < 0,\ u \in D_A,\ \omega \in D_{A^*}; \tag{6}$$

atunci soluțiile sistemului (5), *date de formula evidentă*

$$u(x,t) = T(t; A)\,\varphi + f(x)\int_0^t T(t-s)\,ds$$

converg în medie pătratică cînd $t \to \infty$ *către soluția ecuației eliptice*

$$A\widetilde{u} + f\ (x) = 0,\ \widetilde{u} \in D_A. \tag{7}$$

D e m o n s t r a ț i e. Fie $u(x)$ o soluție a ecuației (7) și $v\ (x, t) = u(x,t) - -\widetilde{u}(x)$. Avem $\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial u}{\partial t} = A\widetilde{u} + Av + f(x)$ și deci $\dfrac{\partial v}{\partial t} Av$ iar $v|_{t=0} = \varphi - \widetilde{u}(x)$

Din (6), și din observațiile de la paragraful 2, rezultă

$$\|v\| < e^{\beta t}\|\varphi - \widetilde{u}\| \to 0 \text{ cu } t \to \infty,$$

deci

$$\|u\ (x, t) - \widetilde{u}\ (x)\| \to 0,\ t \to \infty.$$

4. În acest paragraf stabilim o teoremă de stabilitate după prima aproximație pentru sisteme liniare cu adaos neliniar satisfăcînd condiția Lipschitz. Folosirea formulelor exponențiale face posibilă aplicarea directă a unei leme din teoria clasică.

T e o r e m a 3. *Fie sistemul parabolic neliniar*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = Au + F(x, t, u). \tag{8}$$

cu problema mixtă ($\mathfrak{A}$). *Presupunem că*

$$Re\ (Au, u) \leqslant \beta\ (u, u),\ Re\ (A^*\ \omega, \omega) \leqslant \beta\ (\omega, \omega),\ \beta \leqslant 0,$$

iar $F(x, t, u)$ *aparține pentru orice* t, *în raport cu* x, *domeniului de definiție* D_A *și satisface în raport cu* u *condiția Lipschitz*

$$\|F\ (x, t, u_1) - F\ (x, t, u_2)\| \leqslant g\ (t)\,\|u_1 - u_2\|,$$

unde $g(t) \leqslant L$, *pentru orice* $t > 0$, $L > 0$. *Atunci, există o soluție unică a sistemului* (7); *această soluție satisface ecuația integrală:*

$$u(x, t) = T(t; A)\ \varphi + \int_0^t T(t-s)\ F(x, s, u)\ ds. \tag{9}$$

Demonstrație. Cum

$$\| T(t; A) \| \leqslant 1,\ \| F(x, t, u_1) - F(x, t, u_2) \| \leqslant g(t) \| u_1 - u_2 \| \leqslant L \| u_1 - u_2 \|$$

existența și unicitatea soluției ecuației integrale (9) se demonstrează, în mod obișnuit, prin aproximații succesive. Faptul că soluția ecuației integrale (9) satisface ecuația (8) se verifică direct prin derivare.

Dăm acum, fără demonstrație, o lemă bine cunoscută în teoria ecuațiilor diferențiale ordinare.

Lemă. *Fie funcțiile* $\alpha(t) \geqslant 0$, $\beta(t) \geqslant 0$. *Dacă*

$$\alpha(t) \leqslant b + \int_0^t \beta(s)\ \alpha(s)\ \mathrm{ds},$$

atunci

$$\alpha(t) \leqslant b\, e^{\int_0^t \beta(s)\, ds}.$$

Putem acum demonstra

Teorema 4. *Soluțiile sistemului* (8) *sînt stabile în normă dacă* $\beta = 0$ *și*

$$\int_0^\infty g(t)\ dt < +\infty;$$

sînt asimptotic stabile în normă dacă $\beta < 0$ *și* $\int_0^\infty g(t)\ dt < +\infty$; *sînt stabile în normă dacă* $g(t) = L$ *și* $L + \beta = 0$, $\beta < 0$; *sînt asimptotic stabile în normă dacă* $g(t) = L$, $L + \beta < 0$, $\beta < 0$.

Demonstrație. Fie $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ două condiții inițiale pentru care $\| \varphi_1 - \varphi_2 \| < \eta$. Avem

$$u_k(x, t) = T(t)\ \varphi_k \int_0^t T(t-s)\ F(x, s, u_k)\ ds,\ k = 1, 2$$

$$\| u_1 - u_2 \| \leqslant \| T(t) \| \| \varphi_1 - \varphi_2 \| + \int_0^t \| T(t-s) \| \| F(x, s, u_1) - F(x, s, u_2) \| ds$$

$$\leqslant e^{\beta t} \eta + e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} g(s) \| u_1 - u_2 \| ds = e^{-\beta t} \left(\eta + \int_0^t e^{\beta s} g(s) \| u_1 - u_2 \| ds\right).$$

Deci,

$$\| u_1 - u_2 \| e^{-\beta t} \leqslant \left(\eta + \int_0^t g(s)\, e^{-\beta s} \| u_1 - u_2 \| ds\right).$$

Aplicînd lema funcțiilor

$$\alpha(t) = e^{-\beta t} \| u_1 - u_2 \|,\ \beta(t) = g(t).$$

avem

$$\| u_1 - u_2 \| e^{-\beta t} \leqslant \eta e \int_0^t g(s)\, ds, \quad \| u_1 - u_2 \| \leqslant \eta e^{\beta t} \, e \int_0^t g(s)\, ds.$$

Dacă $\int_0^\infty g(t)\, dt < +\infty$ atunci $\| u_1 - u_2 \| \eta \leqslant \eta M e^{\beta t}$,

ceea ce demonstrează primele două puncte ale teoremei. Dacă $g(t) = L$, avem $\| u_1 - u_2 \| \leqslant \eta e^{(L+\beta)t}$, ceea ce demonstrează următoarele două puncte ale teoremei.

5. În acest paragraf dăm teoreme de aproape-periodicitate (sau aproape-periodicitate asimptotică) pentru sisteme parabolice liniare omogene, neomogene, sau liniare după prima aproximație (cvasiliniare).

D e f i n i ț i a 1. Vom spune că funcția vectorială $u(x, t) = (u_1 \ldots u_N) = \Phi(t)$, care face să corespundă fiecărui scalar t un vector funcție din spațiul $H(\Omega)$ este aproape-periodică abstractă B (adică în sensul lui B o c h n e r [1]) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $l(\varepsilon)$, astfel încît în orice interval de pe axa $I(-\infty < t < +\infty)$, de lungime l, să existe cel puțin un număr τ astfel ca $\| \Phi(t+\tau) - \Phi(t) \| < \varepsilon$, $t \in I$.

Analog se definește aproape-periodicitatea B^+ sau B^-, $t \in I^+$ $(0 < t < +\infty)$, $t \in I^-$ $(0 > t > -\infty)$.

D e f i n i ț i a 2. Vom spune că funcția vectorială $u(x, t) = (u_1 \ldots u_N) = \Phi(t)$, care face să corespundă fiecărui t un vector-funcție din spațiul $H(\Omega)$ este asimptotic aproape-periodică abstractă F^+ (în sensul lui Frechet [2]) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $l(\varepsilon)$ și un $N(\varepsilon) > 0$, atfel încît în orice interval de pe semiaxa I^+ $(0 < t + \infty)$ de lungime l, să existe un τ așa fel ca $\| \Phi(t+\tau) - \Phi(t) \| < \varepsilon$, $t \in I^+$, $t > N(\varepsilon)$.

Analog se definește aproape-periodicitatea asimptotică F^-.

O b s e r v a ț i i 1. Este evident că o funcție vectorială $\Phi(t)$ pentru care $\Phi(t) \| \to 0$, $t \to +\infty$ nu este aproape-periodică, dar este asimptotic aproape-periodică F^+.

2. Suma a două funcții vectoriale $\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t)$, în care $\Phi_1(t)$ este aproape-periodică B^+, iar $\| \Phi_2(t) \| \to 0, t \to +\infty$ este evident o funcție vectorială asimptotic aproape-periodică F^+.

D e f i n i ț i a 3. Vom spune că funcția vectorială $\Phi(t)$ este o funcție normală B, dacă familia de funcții $\{\Phi(t+h)\}$ este compactă pentru $t \in I$, $h \in I$ (în sensul convergenței în normă, uniformă în raport cu t). Vom spune că funcția vectorială $\Phi(t)$ este normală B^+ (B^-), dacă familia de funcții $\Phi(t+h)$ este compactă pentru $t \in I^+$, $h \in I^+$ $(t \in I^-$, $h \in I^-)$. Se știe că o funcție normală B este și aproape-periodică B.

Vom da în anexă demonstrația faptului că o funcție vectorială normală B^+ este asimptotic aproape-periodică F^+.

T e o r e m a 5. *Fie sistemul parabolic considerat în teorema* 1. *Atunci toate soluțiile acestui sistem sînt asimptotic aproape-periodice* F^+.

D e m o n s t r a ț i e. În cazul $\beta < 0$, teorema este evidentă (toate soluțiile tind la zero pentru $t \to \infty$). Fie deci $\beta = 0$. O soluție oarecare a sistemului (4) se scrie sub forma

$$u(x, t) = \Phi(t) = T(t)\, \varphi(x).$$

Demonstrăm, întîi că pentru orice condiție inițială $\varphi(x)$, traiectoria $\Phi(t)$ corespunzătoare este compactă în spațiul $H(\Omega)$. Pentru aceasta folosim criteriul de compactitate a lui Riesz, în spații L_p (a se vedea, de exemplu, [11]). O familie de funcții $\{h(P)\} \in H(\Omega)$ este compactă dacă

a) $\| h(p) \| < M$ pentru orice funcție din familie,

b) $J(Q) = \| h(P+Q) - h(P) \| < \varepsilon$, pentru $|Q| < \eta$, unde η depinde de ε, dar nu depinde de funcția din familie. În cazul nostru, o traiectorie $T(t)\varphi = \Phi(t)$ este o familie de funcții depinzînd de un parametru continuu $t \in I^+$. Avem,

$$\| T(t)\varphi \| \leqslant \| T(t) \| \| \varphi \| \leqslant \varphi \|, \text{ căci } \| T(t) \| \leqslant 1$$

$$J(Q) = \| T(t)\varphi(P+Q) - T(t)\varphi(P) \| = \| T(t)[\varphi(P+Q) - \varphi(P)] \| \leqslant \| \varphi(P+Q) - \varphi(P) \|,$$

ceea ce arată că familia de funcții $T(t)\varphi(P)$ este compusă din funcții «la fel de continue în mare» ca și condiția inițială $\varphi(P)$.

Demonstrăm acum că funcția $T(t)\varphi$, pentru orice φ, este normală B^+.

Într-adevăr, vom arăta că oricare ar fi șirul de numere reale pozitive $h_n > 0$, $h_n \to +\infty$, din șirul de funcții $T(t+h_n)\varphi$, se poate extrage un șir uniform convergent în raport cu $t \in I^+$. Deoarece $T(h)\varphi$ este compactă, putem extrage din șirul h_n un subșir h_{k_n} pentru care

$$\| T(h_{k_n})\varphi - T(h_{k_m})\varphi \| \leqslant \varepsilon, k_n k_m \geqslant N(\varepsilon).$$

Atunci $\| T(t+h_{k_n})\varphi - T(t+h_{k_m})\varphi \| = \| T(t)T(h_{k_n})\varphi - T(t)T(h_{k_m})\varphi \| = \| T(t)[T(h_{k_n})\varphi - T(h_{k_m})\varphi] \| \leqslant \| T(h_{k_n})\varphi - T(h_{k_m})\varphi \| \leqslant \varepsilon\ (k_n, k_m > N(\varepsilon))$, ceea ce era de demonstrat.

Din anexă rezultă că pentru orice φ, funcția $T(t)\varphi$ este asimptotic aproape-periodică F^+.

Teorema 6. *Fie sistemul parabolic neomogen*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + f(x,t) \tag{10}$$

cu problema mixtă $(\mathfrak{A})$, *în spațiul* $H(\Omega)$. Presupunem că

$$Re(-Iu, u) < \beta(u,u), Re(-\mathfrak{L}^* u, u) < \beta(u,u), \beta < 0,$$

vectorul funcție $f(x,t) = (f_1 \ldots f_N)$ *este aproape-periodic* B^+, *iar pentru orice* t *fixat,* $f \in D_A$. *Atunci toate soluțiile sistemului* (10) *sînt asimptotic aproape-periodice* F^+ *iar o soluție, și numai una, este aproape-periodică* B^+.

Demonstrație. Se poate vedea ușor că soluția generală a sistemului (10) este dată de formula

$$u(x,t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s) f(x,s)\, ds.$$

Fie

$$v(x,t) = T(t)\varphi, w(x,t) = \int_0^t T(t-s) f(x,s)\, ds.$$

Avem

$$\| v(x,t) \| \to 0, t \to +\infty,$$

iar $w(x, t)$ este aproape-periodică B^+. Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$, τ o ε — aproape-perioadă a lui $f(x, t)$. Atunci

$$\|w(x, t+\tau) - w(x, t)\| = \| \int_0^{t+\tau} T(t+\tau-s) f(x, s)\, ds - \int_0^t T(t-s)$$

$$T(t-s) f(x, s)\, ds \| = \| \int_0^t T(t-s) [f(x, s+\tau) - f(x, s)]\, ds \| \leqslant e^{\beta t} \varepsilon \int_0^t e^{-\beta s}\, ds =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{\beta} + \frac{1}{\beta} \varepsilon e^{\beta t} < \frac{\varepsilon}{|\beta|}.$$

Cum $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, cum $\| v(x, t) \| \to 0$, iar $w(x, t)$ e aproape-periodică B^+, din observația 2) rezultă că $u(x, t)$ este asimptotic aproape-periodic F^+.

Dacă $\varphi \equiv 0$, se capătă singura soluție aproape-periodică B^+ a sistemului (10).

Observație. Teorema 6 constituie o extensiune a unei teoreme clasice a lui Bohr și Neugebauer [12].

Teorema 7*). *Fie sistemul parabolic neliniar*

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + F(x, t, u) \tag{11}$$

cu problema mixtă $(\mathfrak{A})$, *în spațiul* H (Ω). *Presupunem că*

$$Re(-Lu, u) < \beta(u, u),\ Re(-L^*\omega, \omega) < (\omega, \omega),\ \beta < 0$$

iar funcția $F(x, t, u)$ *satisface următoarelor condiții*:

a) *în raport cu* x, $F(x, t, u) \in D_L$

b) *în raport cu* u, $F(x, t, u)$ *este lipschitziană*:

$$\| F(x, t, u_1) - F(x, t, u_2) \| \leqslant L \| u_1 - u_2 \|,\ L + \beta < 0$$

c) *în raport cu* t, $F(x, t, u)$ *este aproape-periodică* B^+. *Atunci, toate soluțiile sistemului* (11) *sînt asimptotic aproape-periodice* F^+.

Demonstrație. Din teorema 3 rezultă că soluțiile sistemului (11) satisfac ecuația integrală

$$u'(x, t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s) F(x, s, u(x,s))\, ds.$$

Fie τ o ε-aproape-perioadă a lui $F(x, t, u)$, $\varepsilon > 0$. Avem

$$u(t+\tau) - u(t) = T(t+\tau)\varphi - T(t)\varphi + \int_0^{t+\tau} T(t+\tau-s) F(s, u(s))\, ds -$$

$$- \int_0^t T(t-s) F(s, u(s))\, ds =$$

$$[T(t+\tau) - T(t)]\varphi + \int_0^t T(t-s) [F(s+\tau, u(s+\tau)) - F(s, u(s))]\, ds.$$

*) Ideea acestei teoreme și a demonstrației ei o datorez lui A. Halanay. Folosesc această ocazie pentru a-i mulțumi pentru sugestiile și interesul cu care m-a ajutat în elaborarea acestei lucrări.

Pe de altă parte,

$$\|F(s+\tau, u(s+\tau)) - F(s, u(s))\| \leqslant \|F(s+\tau, u(s+\tau)) - F(s, u(s+\tau))\| + \\ + \|F(s, u(s+\tau)) - F(s, u(s))\| < \varepsilon + L\|u(s+\tau) - u(s)\|.$$

Deci, avem

$$\|u(t+\tau) - u(t)\| \leqslant e^{\beta t}(\|\varphi\|(e^{\beta\tau} + 1)) + e^{\beta t}\int_0^t e^{-\beta s}(\varepsilon + L\|u(s+\tau) - u(s)\|)\, ds.$$

Fie $A = (e^{\beta t} + 1)\|\varphi\|$. Atunci

$$\|u(t+\tau) - u(t)\| e^{-\beta t} \leqslant A + \int_0^t e^{-\beta s}\|u(s+\tau) - u(s)\| L\, ds + \\ + \frac{\varepsilon}{|\beta|} e^{-\beta t}\left(\text{căci } \frac{\varepsilon}{\beta} < 0\right).$$

Folosim acum următoarea

Lemă. (N. Bourbaki) *Dacă $w(t)$ este continuă pe $[0, t]$, $\varphi(t) \geqslant 0$ și riglată, $k(t) > 0$ și riglată pe $[0, t]$.*

Presupunem că $w(t) \leqslant \varphi(t) + \int_0^t k(s) w(s) ds$. Atunci $w(t) \leqslant \varphi(t) +$

$$+ \int_0^t \varphi(s)\, k(s)\, e^{\int_s^t k(\tau)\, d\tau}\, ds.$$

În acestă lemă punem

$$w(t) = \|u(t+\tau) - u(t)\| e^{-\beta t},\ \varphi(t) = A + \frac{\varepsilon}{|\beta|} e^{-\beta t},\ k(t) = L$$

și avem

$$\|u(t+\tau) - u(t)\| e^{-\beta t} \leqslant A + \frac{\varepsilon}{|\beta|} e^{-\beta t} + \int_0^t \left(A + \frac{\varepsilon}{|\beta|} e^{-\beta s}\right) L\, e^{L(t-s)} ds = \\ = \frac{\varepsilon}{|\beta|} e^{-\beta t} + A\, e^{Lt} + \frac{L\varepsilon}{|\beta|}\int_0^t e^{Lt}\, e^{-(L+\beta)s}\, ds = \frac{\varepsilon}{|\beta|} e^{-\beta t} + A\, e^{Lt} + \\ + \frac{L\varepsilon}{|\beta|}\frac{1}{L+\beta} e^{Lt} - \frac{L\varepsilon}{|\beta|}\frac{1}{L+\beta} e^{-\beta t}.$$

Avem deci

$$\|u((t)+\tau) - u(t)\| < \left(A + \frac{L\varepsilon}{|\beta|}\frac{1}{L+\beta}\right) e^{(L+\beta)t} + \frac{L\varepsilon}{|\beta|}\frac{1}{[L+\beta]} + \frac{\varepsilon}{|\beta|}$$

și cum $L + \beta < 0$, teorema noastră este demonstrată.

CAPITOLUL II

ECUAȚIA UNDELOR ȘI ECUAȚIA LUI SCHRÖDINGER

1. Fie ecuația undelor

$$\mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + C(x)\, u, \tag{1}$$

unde $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $\mu(x) > 0$, $C(x) \leqslant 0$, $\sum_{i,j} a_{ij} t_i t_j > \alpha \sum_i |t_i|^2$, $\alpha > 0$

cu condiția la frontieră

$$u|_S = 0, \tag{B}$$

sau

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_j)\Big|_S = 0, \tag{C}$$

unde $S = \text{fr}\,\Omega \subset R^{(n)}$.

Presupunînd metoda lui Fourier fundată, soluția generală a ecuației (1) se poate scrie sub forma

$$u(x,t) = \sum_1^\infty a_n e^{i\lambda_n t} U_n(x),$$

unde

$(i\lambda_n)^2 = -\lambda_n^2$ sînt valorile proprii ale operatorului:

$$\frac{1}{\mu(x)}\left(\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + C(x) \oplus (B) \text{ sau } C.$$

În mod analog se poate trata ecuația lui Schrödinger

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i\,\Delta u \tag{2}$$

cu condiția de frontieră

$$u|_S = 0, \tag{D}$$

unde

$S = \text{fr}\,\Omega \subset R^{(n)}$, λ_n fiind acum valorile proprii ale operatorului $i\,\Delta + D$.

Dacă numim o funcție vectorială abstractă aproape-periodică atunci cînd admite o dezvoltare de forma

$$u(x,t) = \sum e^{i\beta_n t} U_n(x),$$

unde $U_n(x)$ sînt elemente din spațiul abstract al valorilor funcției vectoriale $u(x,t)$, atunci dezvoltarea de mai sus ne indică tocmai faptul că toate soluțiile ecuației (1), ca și ale ecuației (2), sînt aproape-periodice. Demonstrații directe ale acestui fapt s-au dat în lucrările [3], [4]. Reluăm problema aceasta cu ajutorul teoriei semigrupurilor.

Lema 1. *Fie A un operator liniar, închis, în spațiul Hilbertian unitar complex H, cu domeniul de definiție dens în H. Presupunem că operatorul A satisface condițiile*

$$Re\,(A\varphi, \varphi) = 0,\ Re,\ (A^*\psi, \psi) = 0,\ \varphi \in D_A, \psi \in D_{A^*}. \tag{3}$$

Atunci spectrul operatorului A este situat pe axa imaginară, iar pentru orice $\sigma \neq 0$, avem

$$\|R(\sigma + i\tau; A)\| < \frac{1}{|\sigma|}$$

(lema este o variantă a lemei (I) a lui V. E. Lianțe [8]).

Demonstrație. Fie $\lambda=\sigma+i\tau$. Pentru $\varphi\in D_A$, punem $(\lambda E-A)\varphi=f$. Avem

$$\lambda\varphi-A\varphi=f,$$
$$\lambda(\varphi,\varphi)-(A\varphi,\varphi)=(f,\varphi),$$
$$\bar{\lambda}(\varphi,\varphi)-(\varphi,A\varphi)=(\varphi,f).$$

De unde

$$2\sigma(\varphi,\varphi)-2\,Re\,(A\varphi,\varphi)=(f,\varphi)+(\varphi,f).$$

Din (3), și cum $|(f,f)+(\varphi,f)|<2\|f\|\,\|\varphi\|$, obținem

$$2|\sigma|(\varphi,\varphi)=|(f,\varphi)+(\varphi,f)|<2\|f\|\,\|\varphi\|,$$

$$\|\varphi\|<\frac{1}{|\sigma|}\|f\|,\ \varphi=R(\lambda;A)f\to\|R(\lambda;A)\|<\frac{1}{|\sigma|},\ \sigma\neq 0.$$

Mai arătăm că pentru orice $\sigma\neq 0$, $R(\sigma+i\tau;A)$ este definită pe o mulțime peste tot densă în H, adică arătăm că mulțimea valorilor lui $(\lambda E-A)$ este densă în H. În caz contrar ar exista un element ortogonal mulțimii valorilor lui $\lambda E-A$, fie acesta g. Atunci

$$((\bar{\lambda}E-A)f,g)=0,\ f\in D_A,\to g\in D_{A^*},\ (\bar{\bar{\lambda}}E-A^*)g=0.$$

Deci $\bar{\bar{\lambda}}E-A^*$ nu are invers pentru $Re\,\bar{\bar{\lambda}}=Re\,\bar{\lambda}=\sigma\neq 0$ ceea ce este contradictoriu, căci A^* satisface aceleași condiții ca și A.

În cele ce urmează vom mai folosi teorema 15.7.4 din [9] (care e de fapt o consecință imediată a teoremei 12.2.1 din [9]) și pe care o enunțăm fără demonstrație:

Fie A un operator liniar închis, și aplicînd spațiul Banach X în el însuși, cu spectrul situat într-o bandă S, $\sigma_1\leqslant Re\lambda\leqslant\sigma_2$ în afara acestei bande $R(\lambda;A)$ satisfăcînd inegalitatea

$$\delta(\lambda)\|R(\lambda;A)\|<1,$$

unde $\delta(\lambda)$ este distanța de la λ la S; atunci A este transformarea infinitezimală pentru un grup de operatori liniari și mărginiți ai spațiului X în el însuși $T(\xi;A)$, $-\infty<\xi<+\infty$; $T(\xi;A)$ este tare continuă pentru toți x, iar

$$\|T(\xi;A)\|\leqslant\max(e^{\sigma_2\xi},\ e^{\sigma_1\xi}).$$

Definiția 4. Notăm cu $\mathcal{H}(\Omega)$ spațiul hilbertian complex de vectori funcție $\{h\}=\mathcal{H}$, în care produsul scalar este dat de formula

$$(h,g)=\int_\Omega\left(\sum_{i,j}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}-C(x)u\bar{v}+u_1\bar{v}_1\right)d\Omega,\ h=(u,u_1),\ g=(v,v_1).$$

Putem acum să demonstrăm următoarea

Teoremă 8. *Dacă înlocuim ecuația undelor* (1) *prin sistemul echivalent*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{\mu}}u_1,$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+C(x)u\right)=\frac{1}{\sqrt{\mu}}(\Delta_1+C(x)I)u,$$

sau

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} I \\ \frac{1}{\sqrt{\mu}} (\Delta_1 + CI) & 0 \end{pmatrix} h = Ah$$

cu problema la limită

$$u|_S = 0 = u_1|_S, \text{ sau } \sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_j)\Big|_S = 0 = \sum a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cos(n, x_j)\Big|_S \quad (E)$$

atunci, în spațiul $\mathcal{H}(\Omega)$, spectrul operatorului A este situat pe axa imaginară, iar pentru orice $\sigma \neq 0$, avem

$$\| R(\sigma + i\tau; A) \| < \frac{1}{|\sigma|}.$$

Demonstrație. Domeniul inițial de definiție al operatorului

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} I \\ \frac{1}{\sqrt{\mu}} (\Delta_1 + C(x) I) & 0 \end{pmatrix}$$

este mulțimea funcțiilor din $\mathcal{H}$, care au derivatele necesare (pînă la ordinul 2 inclusiv) sumabile la pătrat, împreună cu derivatele de primul ordin, și satisfăcînd condițiile de frontieră (E). Considerat pe aceeași mulțime de definiție, operatorul

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{\mu}} I \\ -\frac{1}{\sqrt{\mu}} (\Delta_1 + C(x) I) & 0 \end{pmatrix} = -A$$

reprezintă adjunctul operatorului A.

Într-adevăr, fie

$$h = (u, u_1), g = (v, v_1), Ah = \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} u_1, \frac{1}{\sqrt{\mu}} (\Delta_1 u + C(x) u)\right).$$

$A^* g = \left(-\frac{1}{\sqrt{\mu}} v_1, -\frac{1}{\sqrt{\mu}} (\Delta_1 v + C(x) v).\right)$ Avem

$$(Ah, g) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} u_1\right) \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} - C(x) \frac{1}{\sqrt{\mu}} u_1 \bar{v} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} (\Delta_1 u + C(x) u) \bar{v}_1 \right\} d\Omega.$$

De asemenea

$$(h, A^* g) = -\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} \bar{v}_1\right) - C(x) \frac{1}{\sqrt{\mu}} u \bar{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{\mu}} (\Delta_1 \bar{v} + C(x) \bar{v}) u_1 \right\} d\Omega.$$

Atunci

$$(A\ h, g) - (h, A^* g) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}(x) \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} u_1\right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} v_1\right)\right] d\Omega +$$

$$+ \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\mu(x)}} \left[\bar{v}_1 \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + u_1 \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}\right)\right] d\Omega$$

Dar

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}(x) \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} u_1\right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} \bar{v}_1\right)}{\partial x_j}\right] d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} u_1\right) \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}\right) + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} \bar{v}_1 \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)\right\} d\Omega -$$

$$- \int_\Omega \left[\frac{1}{\sqrt{\mu}} u_1 \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \bar{v}_1 \left(\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right)\right] d\Omega.$$

Deci

$$(Ah, g) - (h, A^* g) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{1}{\sqrt{\mu}} u_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}\right) + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \bar{v}_1 \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\} d\Omega =$$

$$= \int_S \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} \frac{1}{\sqrt{\mu}} u_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} \cos(n, x_i) + \sum_{i,j} a_{ij} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \bar{v}_1 \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_j)\right\} dS = 0$$

(ţinînd seama de (E)).

Deci, operatorul adjunct al lui A este, în orice caz, definit pe o mulţime densă în $\mathcal{H}$ (mulţime care conţine domeniul de definiţie al lui (A)).

Deci A^{**} este o prelungire închisă a lui A. În cele ce urmează, lucrăm cu sistemul $\frac{\partial h}{\partial t} = Ah$, în care operatorul A a fost închis. Mai departe, arătăm că

$$Re(A\ h, h) = 0,\ Re(A^* g, g) = 0,\quad h \in D_A,\quad g \in D_{A^*}.$$

Într-adevăr, am văzut că pe domeniul iniţial de definiţie al operatorului A, avem $A^* = -A$. Deci,

$$Re(Au, u) = \frac{1}{2}[(Au, u) + \overline{(Au, u)}] = \frac{1}{2}[(Au, u) + (u, Au)] =$$

$$= \frac{1}{2}[(Au, u) + (A^* u, u)] = 0.$$

Cum domeniul iniţial de definiţie al operatorului A este dens în domeniul complet de definiţie al acestuia, D_A, relaţia $Re(A\varphi, \varphi) = 0$ pentru un element oarecare $\varphi \in D_A$, se obţine alegînd un şir de funcţii $u_n \to \varphi$, $u_n \in D_{A_0}$ (domeniul iniţial de definiţie al lui A), şi astfel încît $Au_n \to A\varphi$ (ceea ce se poate, căci φ aparţine închiderii operatorului A). Atunci avem

$$Re(A\varphi, \varphi) = \lim Re(Au_n, u_n) = 0.$$

Evident, la fel se arată că $Re(A^* \psi, \psi) = 0$, $\psi \in D_A$. Sîntem, deci, în condițiile lemei 1 și teorema este demonstrată.

Sîntem, acum, în măsură să dăm o nouă demonstrație teoremei lui S. Bochner - J. von Neumann - S. Sobolev, pe care o enunțăm astfel:

Teorema 9. *Toate soluțiile sistemului* $\frac{\partial h}{\partial t} = Ah$ *sînt definite pentru* $-\infty < t < +\infty$ *și formează în spațiul* $\mathcal{H}$ *traiectorii compacte și aproape-periodice B în sensul definiției din capitolul I.*

Demonstrație. Din teorema 8 și din teorema lui E. Hille, pe care am enunțat-o fără demonstrație, rezultă că există un *grup* de operatori $T(t; A)$ definiți în tot spațiul $\mathcal{H}$, a căror transformare infinitezimală este A, și pentru care este valabilă evaluarea $\| T(t; A) \| \leqslant 1$, $-\infty < t < +\infty$. Atunci, orice soluție a ecuației (1) se scrie sub forma

$$(u(x, t),\ u_1(x, t)) = T(t)\,(\varphi(x),\ \varphi_1(x))$$

$T(t; A)$ este evident un operator de forma $T(t; A) = \begin{pmatrix} T_{11}(t) & T_{12}(t) \\ T_{21}(t) & T_{22}(t) \end{pmatrix}$. Avem $h(x, t) = T(t)\, h_0(x)$. Cum $\| T(t) \| \leqslant 1$, rezultă evident faptul că toate soluțiile ecuației undelor sînt stabile neasimptotic în metrica din $\mathcal{H}$. Ca și în teoremele din capitolul I se demonstrează că în $\mathcal{H}$ traiectoriile sînt egal mărginite și egal continue în mare.

Pentru a putea aplica acum criteriul de compactitate al lui Riesz (care e valabil în spații L_p) observăm următoarele:

a) Metrica $(u, u)_1 = \int_\Omega \sum a_{ij}(P) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, d\Omega$

este echivalentă cu metrica:

$$(u, u)_2 = \int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}\, d\Omega$$

Într-adevăr

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} < \max_{\Omega, i, j} | a_{ij}(x) | \sum_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} < M \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i},\quad M > 0.$$

cum se vede imediat, observînd că

$$t_i \bar{t}_j + t_j \bar{t}_i \leqslant (t_i \bar{t}_i + t_j \bar{t}_j).$$

Știm de asemenea că

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} \geqslant m \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i},\ m > 0,$$

deci

$$m(u, u)_2 \leqslant (u, u)_1 \leqslant M(u, u)_2.$$

b) Observăm că (a se vedea [10])

$$u(y) = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial r^{2-n}}{\partial x_i} dx, \quad r = \sum (x_i - y_i)^2,$$

unde operatorul care ne duce de la vectorul gradient $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ la funcția $u(x)$ este complet continuu (nucleu cu singularitate slabă).

Deci

$$\int_\Omega u \cdot u\, d\Omega \leqslant N \int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} d\Omega.$$

Atunci, deoarece $\| h(x,t) \| < M$ sau

$$\int_\Omega \left| \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} - C(x)\, u\bar{u} + u_1 \bar{u}_1 \right| d\Omega < M^2,$$

rezultă că:

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} d\Omega < \frac{M^2}{3}, \int_\Omega u_1 \bar{u}_1 d\Omega < \frac{M^2}{3}$$

și deci, din *a)*

$$\int_\Omega \sum_i \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 d\Omega < M_1,$$

iar din *b)*

$$\int_\Omega |u|^2 d\Omega < M_2.$$

Deci, familiile de funcții $u(x,t)$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}$, $u_1(x,t)$ sînt egal mărginite în L_2.

În mod analog se arată, ținînd seama că în $\mathfrak{H}$ traiectoria $h(x,t)$ este formată din funcții egal continue «în mare», că familiile $u(x,t)$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}$, $u_1(x,t)$ sînt egal continui «în mare» în L_2.

Deci, din orice șir infinit de funcții $u(x,t_n)$, $\frac{\partial u(x,t_n)}{\partial x_i}$, $u_1(x,t_n)$ se poate extrage un subșir convergent în L_2 (și se poate evident găsi un subșir comun pe care converg toate în L_2, t_{k_n}). Dar atunci și șirul de vectori $h(x,t_{k_n})$ converge în $\mathfrak{H}$ și teorema de compactitate este deci demonstrată.

Arătăm, apoi, că funcțiile $h(x,t) = T(t)\,h_0(x)$ sînt funcții normale B. Aceasta se face ca și demonstrația analogă din capitolul I, teorema 5. Raționamentul de acolo este acum valabil pe toată axa t, $-\infty < t < +\infty$.

Atunci, din teorema clasică a lui S. Bochner [1] rezultă că toate traiectoriile $h(x,t)$ sînt aproape-periodice B. Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

Observație. În lucrarea [3] se demonstrează aproape-periodicitatea soluțiilor compacte ale ecuației undelor în sensul definiției de la începutul

$-\Phi(t)\| > \varepsilon_0$. Există, deci, un șir de intervale, pe care le vom nota $L_{1,1}$, $L_{2,2}$, ..., $L_{N,N}$, ... de lungime N pentru intervalul $L_{N,N}$, și astfel încît pentru orice τ, din acest interval, să existe cel puțin un $t > N$ pentru care

$$\| \Phi(t+\tau) - \Phi(t) \| > \varepsilon_0 .$$

Fie h_1 un număr oarecare în $L_{1,1}$ și fie h_2 ale astfel ca $h_2 - h_1$ să fie egal cu abscisa mijlocului lui L_{ν_2,ν_2}. Considerăm acum intervalul L_{ν_3,ν_3}, unde ν_3 e primul întreg $\geqslant 3$ pentru care $\nu_3 > 2(h_2 - h_1)$. Atunci se poate găsi h_3 astfel ca $h_3 - h_1 \in L_{\nu_3,\nu_3}$, $h_3 - h_2 \in L_{\nu_3,\nu_3}$ (n-avem decît să luăm $h_3 - h_1$ egal cu abscisa mijlocului lui L_{ν_3,ν_3} și cum $h_3 - h_2 = h_3 - h_1 + h_1 - h_2$, iar $|h_1 - h_2| < \frac{\nu_3}{2}$, faptul este evident.

În general, alegem L_{ν_m,ν_m} astfel ca $\nu_m > \max_{1\leqslant\lambda\leqslant m-1} 2(h_\lambda - h_1)$ $\nu_m > \nu_{m-1}$, iar pe $h_m - h_1$ îl luăm egal cu abscisa mijlocului lui L_{ν_m,ν_m}, deci $h_m - h_\lambda \in L_{\nu_m,\nu_m}$, $1 \leqslant \lambda \leqslant m-1$.

Se obține astfel un șir de numere $h_1, h_2, \ldots h_n, \ldots \to \infty$. Arătăm că din șirul $\{\Phi(t+h_n)\}$ nu se poate extrage nici un subșir uniform convergent. Anume, arătăm că oricare ar fi subșirul infinit al lui (h_n), există un ε_0 astfel încît pentru orice N să existe două numere $h_m, h_n > N$ și un $t > 0$ pentru care

$$\| \Phi(t+h_n) - \Phi(t+h_m) \| > \varepsilon_0$$

Pentru aceasta, alegem pe ε_0 de la început, și pentru orice N alegem numerele h_n, h_m, h_n, $h_m > \max(N, 2h_1)$, $h_m > h_n$.
Cum

$$\sup_{t>0} \| \Phi(t+h_m) - \Phi(t+h_n) \| = \sup_{t>h_n} \| \Phi(t+h_m-h_n) - \Phi(t) \| \qquad (1)$$

și cum $h_m - h_n \in L_{\nu_m,\nu_m}$ există un $t > \nu_m > 2(h_n - h_1) > h_n$ pentru care $\| \Phi(t + h_m - h_n) - \Phi(t) \| > \varepsilon_0$ și deci și $(1) > \varepsilon_0$, ceea ce demonstrează afirmația noastră.

КАЧЕСТВЕННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе указывается, как при систематическом использовании методов теории полугрупп операторов Е. Хилле [9] можно получить для класса параболических систем с сильно эллиптической правой частью [8], [10] для волнового уравнения и для уравнения Шрейдингера ряд теорем качественного типа (устойчивость, почти-периодичность, асимптотическая почти-периодичность); поскольку известно, некоторые результаты являются новыми, другие же, известные, найдены наново другими способами. Приводим несколько полученных результатов:

Теорема 4. Пусть дана нелинейная параболическая система

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + F(x, t, u), \qquad (8)$$

где A есть сильно эллиптический оператор с нулевой граничной задачей [8], [10].

Предположим, что

$$Re\,(A\varphi, \varphi) < \beta\,(\varphi, \varphi),\ Re\,(A^*\,\psi, \psi), < \beta\,(\psi, \psi),\ \beta \leqslant 0,$$

а $F\,(x, t, u)$ принадлежит, относительно x при любом t, области определения D_A и удовлетворяет относительно u условию Липшица

$$\| F\,(x, t, u_1) - F\,(x, t, u_2) \| < g\,(t) \| u_1 - u_2 \|,$$

где $g\,(t) \leqslant L$ при любом $t > 0$, $L > 0$.

Тогда, решения системы (7) устойчивы в норме если $\beta \quad 0$ и $\int_0^\infty g\,(t)\,dt < \infty$, или если $g\,(t) = L$, $L + \beta \quad 0$, $\beta < 0$ и асимптотически устойчивы в норме если $\beta < 0$ и $\int_0^\infty g(t)\,dt < +\infty$, или если $g\,(t) = L$, $L + \beta < 0$, $\beta < 0$.

Т е о р е м а 5. Пусть дана линейная параболическая система $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$ (A указанный выше). Тогда все решения этой системы суть асимптотически почти-периодические F^+, $(t \in I^+)$.

Т е о р е м а 6. Пусть дана неоднородная параболическая система

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + f\,(x, t), \tag{9}$$

причем A, указанный выше, а $\beta < 0$ и вектор-функция $f\,(x, t) = (f_1, \ldots, f_N)$ является почти-периодическим B^+ и для любого фиксированного t, $f \in D_A$. Тогда все решения системы (8) асимптотически почти-периодические F^+ и существует единственное почти-периодическое B^+ решение.

Т е о р е м а 8. Если заменить волновое уравнение (II.1) · эквивалентной системой

$$\frac{\partial h}{\partial t} = Ah,\ h = (u,\ u_1),\ A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} I \\ \frac{1}{\sqrt{\mu}} (\Delta_1 + C\,(x)\,I) & 0 \end{pmatrix}$$

с задачей: $u \mid_S = u_1 \mid_S = 0$

$$\text{или} \quad \sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos.\,(n, x_j) \Big|_S = 0 = \sum a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cos\,(n, x_j) \Big|_S,$$

тогда в пространстве $\mathcal{H}\,(\Omega)$ (см. определение в тексте) спектр оператора A располагается на мнимой оси, а для любого $(\sigma \neq 0)$ имеем

$$\| R\,\sigma + i\tau;\ A) \| < \frac{1}{|\sigma|}$$

Из этой теоремы следует, что все решения волнового уравнения являются в пространстве $\mathcal{H}\,(\Omega)$ компактными и почти-периодическими.

THÉORÈMES QUALITATIFS POUR DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, l'Auteur montre comment, en utilisant systématiquement les méthodes de la théorie des semi-groupes d'opérateurs de E. Hille [9], on peut obtenir pour une classe de systèmes paraboliques, à la partie droite fortement elliptique [8], [10] pour l'équation des ondes et pour l'équation de Schrödingher, une série de théorèmes de type qualitatif (stabilité, presque périodicité, presque périodicité asymptotique); d'après ce que l'on sait, certains résultats sont nouveaux et d'autres, déjà connus, sont cependent trouvés par des moyens différentes.

Voici quelques uns des résultats obtenus :

Théorème 4. Soit le système parabolique non linéaire $\frac{\partial u}{\partial t} = Au + F(x, t, u)$ (8), où A est un opérateur fortement elliptique dont le problème de frontière est nul [8], [10].

Supposant que $Re(A\varphi, \varphi) < \beta(\varphi, \varphi)$, $Re(A^* \psi, \psi) < \beta(\psi, \psi)$, $\beta \leqslant 0$, $F(x, u, t)$ appartient pour tout t, par rapport à x, au domaine de définition D_A et satisfait, par rapport à u, à la condition de Lipschitz

$$\| F(x, t, u_1) - F(x, t, u_2) \| < g(t) \| u_1 - u_2 \|$$

ou $g(t) \leqslant L$ pour tout $t > 0$, $L > 0$.

Alors : les solutions du système (7) sont stables dans la norme si $\beta = 0$ et $\int_0^\infty g(t)\, dt < \infty$ ou si $g(t) = L$, $L + \beta = 0$, $\beta < 0$; sont asymptotiquement stables dans la norme si $\beta = 0$ et $\int_0^\infty g(t)\, dt < +\infty$ ou si $g(t) = L$, $L + \beta < 0$, $\beta < 0$.

Théorème 5. Soit le système parabolique linéaire $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$ (A étant le même que ci-dessus). Toutes les solutions de ce système sont asymptotiquement presque-périodiques F^+, $(t \varepsilon (I^+)$.

Théorème 6. Soit le système parabolique non homogène

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + f(x, t) \tag{10}$$

A est celui ci-dessus, où le nombre β est < 0 et la fonction-vecteur $f(x, , t) = (f_1, \ldots, f_N)$ est presque périodique B^+ et, pour tout t fixé, $f \in D_A$.

Dans ce cas, toutes les solutions du système (10) sont asymptotiquement presque-périodique F^+., et une solution est presque-périodique, B^+.

Théorème 8. Si l'on remplace l'équation des ondes (chapitre *II*, (1)) par le système équivalent

$$\frac{\partial h}{\partial t} = Ah,\ h = (u, u_1),\ A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} I \\ \frac{1}{\sqrt{\mu}} (\Delta_1 + C(x)\, I) & 0 \end{pmatrix}$$

avec le problème à la frontière : $u|_S = u_1|_S = 0$ ou

$$\sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_j) \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x_j) \Big|_S = 0 = \sum a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cos(n, x_j) \Big|_S,$$

alors dans l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ (voir la définition dans le texte), le spectre de l'opérateur A est situé sur l'axe imaginaire et, pour tout $\sigma \neq 0$ l'on a

$$\| R(\sigma + \tau; A) \| < A \frac{1}{|\sigma|} \cdot$$

De ce théorème résulte le fait bien connu que toutes les solutions de l'équation des ondes sont, dans l'espace $\mathcal{H}$, compactes et presque-périodiques.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Bochner, *Abstrakte fast-periodische Funktionen.* Acta Math., 1933, t. 61, p. 149.
2. M. Frechet, *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques.* Revue Scientifique, 1942.
3. S. Bochner-J. von Neumann, *Linear diferential operational equations I.* Ann. of Math. 1935, t. 36, p. 255.
4. S. Sobolev, *O pociti periodicinosti reşenii volnovogo uravnenia.* DAN SSSR, 1945, t. XLVIII, nr. 8, p. 570; t. XVIII, nr. 9, p. 646.
5. R. Bellman, Trans. Amer. Math., Soc., 1948, t. 64. p. 21.
6. G. Prodi, Atti Acad. Naz. Lincei 1951, t. 10 (8), p. 365.
7. R. Narasimhan, *On the Asymptotic Stability of Solutions of Parabolic Diferential Equations.* J. Rational Mech., Anal., 1951, t. 3, p. 303.
8. V. E. Lianţe, *Ob odnoi kraievoi zadace dlia paraboliceskih sistem diferentialnîh uravnenii s sieno elipticeskoi pravoi ciastiu.* Matem. Sbornik, 1954, t. 35 (77), p. 357.
9. E. Hille, *Functional Analysis and Semi-groups.* New-York, 1948.
10. M. I. Vişik, *O silno elipticeskih sistemah diferentialnîh uravnenii.* Matem. Sbornik, 1951, t. 29 (71), p. 615.
11. S. Sobolev, *Nokotorîe primenenia funkţionalnogo analiza v matematiceskoi fizike.* Leningrad, 1950.
12. H. Bohr-O. Neugebauer, *Ueber lineare diferentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fast-periodischer rechter Seite.* Gott. Nachr. 1926. p. 8.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul VI/1955

INDICE ALFABETIC

	nr.	pag
CONSTANTINESCU CORNELIU, Cîteva aplicaţii ale principiului metricii hiperbolice ...	3—4	529
CRISTESCU ROMULUS, Operatorul-produs în spaţiile liniare semiordonate şi aplicaţiile sale ...	3—4	357
GHEORGHIŢĂ ŞT. I., Contribuţii la studiul mişcărilor în medii poroase ...	3—4	273
GHEORGHIU ŞERBAN, Cîteva probleme relative la diviziunea unui segment prin puncte luate la întîmplare ...	3—4	243
HULUBEI DAN, Asupra configuraţiilor relative la echilibrul astatic ...	1—2	203
MIHĂILESCU TIBERIU, Varietăţi neolonome de tip Ţiţeica-Wilczinski ...	1—2	175
MOCANU P., Spaţii parţial proiective ...	3—4	495
MOISIL GR. C., Teoria algebrică a funcţionării schemelor cu contacte de relee în mai mulţi timpi ...	1—2	7
ROŞCULEŢ MARCEL N., Algebre liniare asociative şi comutative şi funcţii monogene ataşate lor ...	1—2	135
ROŞCULEŢ MARCEL N., Algebre infinite asociate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordin oarecare ...	3—4	567
SINGER IVAN, Contribuţii la teoria *KB*-linealelor ...	1—2	79
TELEMAN C., Asupra spaţiilor V_n simetrice ...	1—2	193
VASILACHE SERGIU, Asupra unor noi probleme la limită pentru anumite clase de ecuaţii integro-diferenţiale sau cu derivate parţiale ...	1—2	55
ZAIDMAN S., Teoreme calitative pentru ecuaţii cu derivate parţiale ...	3—4	645

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome VI/1955

INDEX ALPHABÉTIQUE

	N°	Page
CONSTANTINESCU CORNELIU, Quelques applications du principe de la métrique hyperbolique	3–4	529
CRISTESCU ROMULUS, L'opérateur-produit dans les espaces linéaires semi-ordonnés et ses applications	3–4	357
GHEORGHIȚĂ ȘT. I., Contribution à l'étude des mouvements dans les milieux poreux	3–4	273
GHEORGHIU ȘERBAN, Quelques problèmes concernant la division d'un segment par des points pris au hasard	3–4	243
HULUBEI DAN, Sur les configurations relatives à l'équilibre astatique	1–2	203
MIHĂILESCU TIBERIU, Variétés non holonomes du type Țițeica-Wilczinski	1–2	175
MOCANU P., Espaces partiellement projectifs	3–4	495
MOISIL GR. C., Théorie algébrique du fonctionnement des schémas à relais à contacts échelonnés	1–2	7
ROȘCULEȚ MARCEL N., Algèbres linéaires associatives et commutatives et fonctions monogènes qui y sont attachées	1–2	135
ROȘCULEȚ MARCEL N., Algèbres infinies associées à des équations aux dérivées partielles homogènes aux coefficients constants d'ordre quelconque	3–4	567
SINGER IVAN, Contributions à la théorie des lattices vectorielles normées (*KB*-linéaux)	1–2	79
TELEMAN C., Sur les espaces symétriques V_8	1–2	193
VASILACHE SERGIU, Sur quelques nouveaux problèmes aux limites pour certaines classes d'équations intégro-différentielles ou aux dérivées partielles	1–2	55
ZAIDMAN S., Théorèmes qualitatifs pour des équations aux dérivées partielles	3–4	645

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА VI ЗА 1955

	№	Стр.
ВАСИЛАКЕ С., О некоторых граничных задачах для известных классов интегро-дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными . . .	1—2	55
ГЕОРГИУ Ш., Несколько вопросов относительно деления отрезка взятыми наугад точками	3—4	243
ГЕОРГИЦЭ Ш. И., К исследованию движений в пористых средах	3—4	273
ЗАЙДМАН С., Качественные теоремы для уравнений с частными производными . .	3—4	645
ЗИНГЕР И., К теории *KB*-линеалов	1—2	79
КОНСТАНТИНЕСКУ К., Несколько применений принципа гипербялической метрики	3—4	529
КРИСТЕСКУ Р., Оператор произведение в полуупорядоченных линейных пространствах и его применение	3—4	357
МИХЭИЛЕСКУ Т., Неголономные многообразия типа Цицейка-Вильчинского	1—2	175
МОИСИЛ Г. К., Алгебраическая теория схем с релейными контактами многократного действия	1—2	7
МОКАНУ П., Частично проективные пространства	3—4	495
РОШКУЛЕЦ М. Н., Ассоциативные и коммутативные линейные алгебры и присоединенные к ним моногенные функции	1—2	135
РОШКУЛЕЦ М. Н., Бесконечные алгебры, ассоциированные с однородными уравнениями в частных производных любого порядка с постоянными коэффицентами	3—4	567
ТЕЛЕМАН К., О симметричных пространствах V_8.	1—2	193
ХУЛУБЕЙ Д., О конфигурцациях, относящихся к астатическому равновесию	1—2	203

с. 1238

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE
PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

ERATĂ

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:	greşeala provine din vina:
244	10 de sus	$\cdots = \int_{-8}^{+\infty} \cdots$	$\cdots = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots$	Editurii
245	(2)	$\cdots \int e^{t_1 x_1 + t_2 \cdots + x_2 + t_n x_n} \cdots$	$\cdots \int e^{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n} \cdots$	Tipografiei
246	8 de sus şi (4)	$S \cdots$	$s \cdots$	Editurii
247	1 de jos	$\cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)}$	$\cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$	,,
250	(12)	$\cdots \sum_{j=0}^{n-k} (-1)j \binom{-k}{j} \frac{t^{r-k-j}}{(n-k-j)!}$	$\cdots \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{-k}{j} \frac{t^{n-k-j}}{(n-k-j)!}$	Tipografiei
250	10 de sus	$\cdots \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-n} \cdots$	$\cdots \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-k} \cdots$	Editurii
252	22 de sus	$\cdots + x_3^* = x_4^*$	$\cdots + x_3^* - x_4^*$	,,
256	5 de jos	μ	n	Tipografiei
258	15 şi 27 de sus	$\cdots \sum_{j=1}^{n+1} \frac{e^{\lambda_j t}}{P(\lambda_j)}$	$\cdots \sum_{i=1}^{n+1} \frac{e^{\lambda_j t}}{P'(\lambda_j)}$	,,
265	6 de jos	$\cdots \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j z^j}{\delta_j} \Big] \cdots$	$\cdots \sum \frac{t^j z^j}{\delta^j} \Big] \cdots$	Editurii
267	5 de sus	$\Phi_{k,n}(t)$	$\Phi_{1,n}(t)$	,,
269	9 de jos	$X_{j,e} = \frac{x_j^* + x_e^*}{2}$	$X_{j,l} = \frac{x_j^* + x_l^*}{2}$	,,
271	11 de jos	$X_{j,e} = \frac{x_j^* + x_e^*}{2}$	$X_{j,l} = \frac{x_j^* + x_l^*}{2}$	,,
284	(25)	$\cdots = V_{0y} \cdots$	$\cdots = V_{0x} \cdots$	,,
285	6 de sus	$\vec{H} = \cdots$	$\dot{\vec{H}} = \cdots$	,,
289	(4′)	$\int_S \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial n} d\sigma \cdots$	$\int_S \frac{\partial \varphi_{1q}}{\partial n} d\sigma \cdots$	,,
290	(9′)	$\cdots = -\varphi g \rho_{20}$	$\cdots = -\rho g \varphi_{25}$	,,
290	(13′′)	$\cdots \frac{\partial \varphi_{1,l-1}}{\partial s} \cdots \cdots \frac{\partial \varphi_{1,l-1}}{\partial n} \cdots \cdots \frac{\partial \varphi_{1,l-1}}{\partial s} \cdots \cdots \frac{\partial \varphi_{1,l-1}}{\partial n} \cdots$		,,
290	(13′′′)	$\left(\frac{\partial \varphi_{1,\frac{l}{2}}}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,\frac{l}{2}}}{\partial s}\right)^2 \cdots$	$\left(\frac{\partial \varphi_{1,\frac{l}{2}}}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,\frac{l}{2}}}{\partial s}\right)^2 \cdots$	,,
290	(13′′′)	$\cdots \frac{\partial \varphi_{1,l}}{\partial s} = +2 \sum_{t=1}^{t=l-2} \left(\frac{\partial \varphi_{1,l}}{\partial n} \cdots \right.$	$\cdots \frac{\partial \varphi_{1,l}}{\partial s} + 2 \sum_{t=1}^{t=l-2} \left(\frac{\partial \varphi_{1,t}}{\partial n} \cdots \right.$	,,
291	(17)	$\cdots = -\frac{1}{rg} \cdots$	$\cdots = -\frac{1}{\rho g} \cdots$	,,
291	5 de jos	$\cdots - 2R \cos(\theta - \chi) \cdots$	$\cdots - 2R r \cos(\theta - \chi) \cdots$	,,
293	(27)	$\cdots + k^2 \frac{V_0 R^2}{gr} \cdots$	$\cdots + k \frac{2V_0 R^2}{gr} \cdots$	,,

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:	greşeala provine din vina:
293	(28)	$\cdots\{-2r\sin 2\theta\cdots$	$\cdots\{2r\sin 2\theta\cdots$	Editurii
293	11 de sus	din (27 sau (27)	din (27) sau (28)	„
294	17 de sus	$\cdots-4k\frac{V_0^2}{g^2r^2}+\cdots\Big]$,	$\cdots-4k^2\frac{V_0^2}{g^2r^2}+\cdots\Big]$,	„
294	14 de jos	$\cdots=k^2\frac{V_0^2}{gR}\cdots$	$\cdots=k\frac{2V_0^2}{gR}\cdots$	„
295	7 de sus	$k=\cdots$	$K=\cdots$	„
295	(33)	$\cdots=-k\cdots$	$\cdots=-K\cdots$	„
295	(35)	$\cdots-\frac{\Gamma V_0 r}{\pi g r^2}\cdots$	$\cdots-\frac{\Gamma V_0 r}{\pi g R^2}\cdots$	„
295	(37)	$\cdots\left(\frac{r^2}{R}\right)\cdots$	$\cdots\left(\frac{r}{R}\right)^2\cdots$	„
297	(50)	$\cdots\frac{R^2y^2}{(x^2+y^2)}+\cdots$	$\cdots\frac{R^2y^2}{(x^2+y^2)}+\cdots$	„
299	(58)	$\cdots-\frac{R_1^6r^3+r^{-3}}{R_1^{-6}R^3+R^{-4}}\cos 3\theta\Big)$	$\cdots-\frac{R_1^6r^3+r^{-3}}{R_1^{-6}R^3+R^{-3}}\cos 3\theta\Big)\cdots$	„
299	(60)	$\cdots\frac{R^4-R^4}{R^4+R_1^4}$	$\cdots\frac{R^4-R_1^4}{R^4+R_1^4}$.	„
299	8 de jos	$\cdots K\frac{R^4-R^4}{R^4+R_1^4}\cdots$	$\cdots k\frac{R^4-R_1^4}{R^4+R_1^4}\cdots$	„
299	3 de jos	$\cdots\left(\frac{3\sin 3}{R_1^3+R^6R_1^3}-\cdots\right.$	$\cdots\left(\frac{3\sin 3\theta}{R_1^3+R^6R_1^3}-\cdots\right.$	„
300	(63)	$\cdots\frac{\rho}{2}V_{20}\cdots$	$\cdots\frac{\rho}{2}V_0^2\cdots$	„
300	(68)	$\frac{\partial n}{\partial\varphi_{21}}=0$	$\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial n}=0$	„
301	14 de sus	$r+R$	$r=R$	„
303	7 de jos	pe S_t	pe S_l	„
304	1	$\varphi_{0,t}=0$	$\varphi_{0,l}=0$	„
305	(86)	$\cdots p^{\frac{1}{1+\gamma}}$	$\cdots p^{1+\frac{1}{\gamma}}$	„
305	(88)	$P_0\frac{\gamma-1}{\gamma}\cdots$	$p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\cdots$	„
307	(98)	$\cdots=B\frac{\gamma-1}{\gamma-\gamma}\cdots$	$\cdots B\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\cdots$	„
308	4	$(j=1,2,11)$	$(j=1,2,\dots)$	„
308	(108)	$\cdots\Big]^{\frac{2}{\gamma-1}}\Big(\cdots$	$\cdots\Big]^{\frac{2}{\gamma-1}}\Big(\cdots$	„
310	(13)	$\cdots\times\vec{xv}_{11}\cdots$	$\cdots\times\vec{v}_{11}$	„

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:	greşeala provine din vina:
311	(7)	$\vec{v_1} = \vec{v_1}\, n,$	$\vec{v_1} = v_1 \vec{n},$	Editurii
312	(23)	$\cdots = \mu\left(\frac{\partial^2 \partial v_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial v_{1r}}{\partial \theta^2} \cdots\right.$	$\cdots = \mu\left(\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial \theta^2} \cdots\right.$	„
312	(24)	$\cdots = \mu\left(\frac{\partial v_{1\theta}}{\theta r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_{1\theta}}{\partial \theta^2} \cdots\right.$	$\cdots = \mu\left(\frac{\partial^2 v_{1\theta}}{\theta r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{1\theta}}{\partial \theta^2} \cdots\right.$	„
312	(24)	$\left.\cdots - \frac{v_1}{r^2 \sin \theta}\right)$	$\cdots - \frac{v_{1\theta}}{r^2 \sin^2 \theta}$	„
313	7 de sus	$\cdots = -\frac{3\mu\, V_0}{2} \cos \theta$	$\cdots = -\frac{3\mu\, V_0}{2a} \cos \theta$	„
321	(70)	$v_1 = K - \frac{\partial p_2}{\partial n} \cdots$	$v_1 = -K \frac{\partial p_2}{\partial n} \cdots$	„
322	1 de jos	$\cdots \int_{S_4} \frac{\partial p_2}{\partial n} g\sigma + \cdots$	$\cdots \int_{S_4} \frac{\partial p_2}{\partial n} d\sigma + \cdots$	„
323	(1)	$\cdots \varphi_{12,3}\, k_2\, k_3 \cdots$	$\cdots \varphi_{12,3} + k_2\, k_3 \cdots$	„
323	4 de jos	$\left[V_0 - \cdots\right.$	$\left[V_0^2 - \cdots\right.$	Tipografiei
324	(5)	$\cdots + k_2^2 \frac{\partial \varphi_{22,3}}{\partial n} + \cdots$	$\cdots + k_2^2 \frac{\partial \varphi_{22,2}}{\partial n} + \cdots$	Editurii
324	(6)	$+ k_2\, k_3\, \varphi_{22,23} + \cdots$	$+ k_2\, k_3\, \varphi_{32,23} + \cdots$	„
326	(35)	$\varphi_{11,3} = \text{const.}$	$\varphi_{12,3} = \text{const.}$	„
327	(17)	$(\text{grad}\, \varphi_{11,2}) + \cdots$	$(\text{grad}\, \varphi_{11,2})^2 + \cdots$	„
329	(59)	$\cdots = 0,$	$\cdots = \frac{\partial \varphi_{31,2}}{\partial n}$	„
332	(94)	$v_{11,2} = \frac{k}{\rho g} \cdots$	$v_{11,2} = -\frac{k}{\rho g} \cdots$	„
334	11 de sus	$\cdots;\ = 1, 2, 3, \cdots$	$\cdots;\ l = 1, 2, 3, \cdots$	„
334	14 de jos	i_j şi	ij şi	„
334	4 de jos	$\cdots$ pe S_1	$\cdots$ pe S_i	„
334	(107)	$\cdots = k_{i2} \frac{\partial \varphi_{12,0}}{\partial n} \cdots$	$\cdots = k_{i2} \frac{\partial \varphi_{i2,0}}{\partial n} \cdots$	„
336	18 de sus	$\cdots - \frac{\lambda}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cdots$	$\cdots - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots$	„
338	(3)	$\cdots K \frac{\partial Re\, fz\,(z)}{\partial n} \cdots$	$\cdots K \frac{\partial Re\, f_2\,(z)}{\partial n} \cdots$	„
339	(5)	$\cdots e^{-in\theta}$	$\cdots e^{in\theta}$	„
339	3 de jos	$\frac{\cdots + R_2\, z^{-n} \cdots}{\cdots}$	$\frac{\cdots + R_2^{2n}\, z^{-n} \cdots}{\cdots}$	„
341	5 de sus	$\cdots = a_{2in},$	$\cdots a_{21n},$	„
341	13 de sus	$\cdots R_2^n\, R_1^{-n}\right]$	$\cdots, R_2^{2n}\, R_1^{-n}\right]$	„
341	7 de jos	Φ_2 sau $\overline{\Phi}_2$	Φ_{2n} sau $\overline{\Phi}_{2n}$	Tipografiei

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:	greşeala provine din vina:
343	8 de jos	$\cdots \dfrac{\operatorname{th} m\beta_2 \operatorname{sh} m\beta_4 - \operatorname{ch} m\beta_4}{\operatorname{th} m\beta_2 \operatorname{ch} m\beta_4 \operatorname{sh} m\beta_4} \cdots$	$\cdots \dfrac{\operatorname{th} m\beta_2 \operatorname{sh} m\beta_4 - \operatorname{ch} m\beta_4}{\operatorname{th} m\beta_2 \operatorname{ch} m\beta_4 - \operatorname{sh} m\beta_4} \cdots$	Editurii
345	7 de jos	$\cdots R_2^{(-n+2)} \cdots$	$\cdots R_2^{-(n+2)} \cdots$	,,
347	(35)	$\cdots [n(K+k) \cdots$	$\cdots [n(K+1) \cdots$	,,
371	23	( ) — convergenţă.	(ρ) — convergenţă.	Tipografiei
385	7 de jos	$z_n = \sum_{i=1}^{kn} \alpha_n v_i$, ($\alpha_i$ reale)	$z_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n$ (α_i^n reale)	Editurii
411	20 de sus	$\cdots = \Phi_i(y) \cdot y$	$\cdots = \Phi_i(y) \cdot y_i$	Tipografiei
421	17 de sus	mărginit	u-mărginit	Editurii
453	3 de sus	$\cdots dm_k(t) \rangle] \cdots$	$\cdots dm_h(t) \rangle] \cdots$	,,
453	7 de sus	$\cdots \leqslant \langle \mid z \mid, m_k \rangle \cdots$	$\cdots \leqslant \langle \mid z \mid, m_h \rangle \cdots$	,,
453	2 de jos	prin $[t_0 - \delta\, t_0)$,	prin $[t_0 - \delta, t_0)$.	,,
454	9 de sus	are pentru	are loc pentru	,,
458	6 de jos	Teorema $[a, b]$.	Teorema 2.6.1.	,,
459	4 de sus	cu $u(\delta^k) \to 0$	cu $u(\delta^k) \searrow 0$	,,
465	4 de jos	iar $z = \cdots$	iar $x = \cdots$	,,
472	3 de jos	$\leqslant \int_{[0,1]} \langle x_i \mid t \mid - x \mid t \mid, \cdots$	$\leqslant \int_{[0,1]} \langle \mid x_i(t) - x(t) \mid, \cdots$	,,
479	3 de sus	pe $C[0, 1]\, CB[0, 1]$	pe $C[0, 1] \subset B[0, 1]$	,,
486	11 de sus	et $0' \cdot 0''$,	et $0' \cdot 0'' \cdot 0$,	,,
487	11 de jos	$\langle y, x \rangle$	$\langle e, f \rangle$	,,
489	11 de sus	résolvant et où x''	résolvant u-borné et où x''	,,
489	(2)	$y - \langle x, y \rangle \cdots$	$y - \langle x^*, y \rangle \cdots$	,,
501	13 de sus	d 13)	(13)	Tipografiei
501	(15)	$\cdots (a, \xi\, l^p + \cdots]$	$\cdots (a, \xi)\, l^p + \cdots]$	Editurii
502	(19)	$\cdots + 2\,\Gamma_{sk}^i\, 2\,\Gamma_{lj}^s + \Gamma_{sl}^i\, \Gamma_{jk}^s)$	$\cdots + 2\,\Gamma_{sk}^i\, \Gamma_{lj}^s + 2\,\Gamma_{sl}^i\, \Gamma_{jk}^s)$	,,
502	(20)	$\cdots + \delta_i^i\, \omega_{jk} + \cdots$	$\cdots + \delta_l^i\, \omega_{ik} + \cdots$	,,
506	1 jos	$\dfrac{d^3x}{ds^3} = \cdots$	$\dfrac{d^3x^i}{ds^3} = \cdots$	Tipografiei
507	2 de sus	$\cdots$ şi $\dfrac{dx}{dt}$;	$\cdots$ şi $\dfrac{dx^i}{dt}$;	,,
509	8 de jos	şi $C_3 + (a, \xi)$	şi $C_3\,(a, \xi)$	Editurii
509	(38)	$\cdots + \dfrac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^j} + \cdots$	$\cdots + \dfrac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^j} + \cdots$	,,
512	(42)	$\cdots + p_{ij}^{*s}\, \Gamma_{jk}^{*i}$,	$\cdots + p_{ij}^{*s}\, \Gamma_{sk}^{*i}$	,,
513	(48)	$\cdots + \delta_l^i\, {}^*_{jk} + \cdots$	$\cdots + \delta_l^i\, \rho_{jk}^* + \cdots$	Tipografiei
517	10 de jos	$\cdots \Gamma_{ij}^s + \cdots$	$\cdots \Gamma_{ij}^s + \cdots$	Editurii

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:	greşeala provine din vina:
533	6 de jos	$\lvert z - re^{i}\theta(r)\rvert \cdots$	$\lvert z - re^{i\theta(r)}\rvert \cdots$	Editurii
534	11 de sus	$\cdots = \lvert z - r'e^{[i\theta(r') - \alpha_k]}\rvert \cdots$	$\cdots = \lvert z - r'e^{i[\theta(r') - \alpha_k]}\rvert \cdots$	,,
534	17 de sus	$\lvert f(z)\rvert \Gamma N(\varepsilon, \eta)$	$\lvert f(z)\rvert > N(\varepsilon, \eta)$	,,
537	9 de sus	$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{l_n}{(1-\eta)\rho_n}}}{\log M_n} = 0$	$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{l_n}{(1-\eta)\rho_n}}}{\log M_n} = 0$	,,
537	5 de jos	$\cdots \frac{e^{\frac{l_{n_k}}{(1-\eta)\rho_{n_k}}}}{\log M_{n_k}}$	$\cdots \frac{e^{\frac{l_{n_k}}{(1-\eta)\rho_{n_k}}}}{\log M_{n_k}}$	,,
537	3 de jos	$\lim_{k\to\infty} \frac{e^{\frac{l_{n_k}}{(1-\eta)\rho_{n_k}}}}{\log M_{n_k}}$	$\lim_{k\to\infty} \frac{e^{\frac{l_{n_k}}{(1-\eta)\rho_{n_k}}}}{\log M_{n_k}}$.	,,
541	12 de jos	$D_1 C D_2$	$D_1 \subseteq D_2$	,,
541	9 de jos	$\cdots \frac{I(z_0, CD_2)}{\operatorname{th} d_2(z_0)}$	$\cdots \frac{I(z_0, \complement D_2)}{\operatorname{th} d_2(z_0)}$	,,
543	1 de sus	$\mu \leqslant \mu_0^{e^{4M}}$	$\mu \leqslant \mu_0^{e^{4M}}$	,,
543	18 de sus	$Z = 0.$	$z = 0.$	Tipografiei
543	12 de jos	$\cdots = \frac{1}{\operatorname{tg} \rho(Z, F)}$	$\cdots = \frac{1}{\operatorname{tg} \rho(z, F)}$	Editurii
544	5 de sus	$\cdots \frac{I(z, F')}{\operatorname{th} d_{F'}(z, F'')}$,	$\cdots \frac{I(z, F')}{\operatorname{th} d_{F'}(z, F'')}$,	,,
548	2 de jos	F'	F	,,
551	15 de sus	Z	z	,,
555	6 de jos	$\complement R_{z_0}^{(D)}$	$\overline{\complement R_{z_0}^{(D)}}$	,,
556	11 şi 13 de sus	$\cdots \complement R_{z_0}^{(D)}$	$\cdots \overline{\complement R_{z_0}^{(D)}}$	,,
556	18 de sus	$\lim_{r\to 0} d'_r [f(z'_{r_0}), b] \cdots$	$\lim_{r\to 0} d'_{r_0} [f(z'_r), b] \cdots$	,,
564	2 de sus	$w = e_{i\pi} \frac{\log \frac{R_1}{z}}{\log \frac{R_2}{R_1}}$	$w = e^{i\pi} \frac{\log \frac{R_2}{z}}{\log \frac{R_2}{R_1}}$	,,
564	5 de sus	$\cdots = \frac{\cdots}{\cdots \sin\left(\pi \frac{\log \frac{R_1}{\lvert z\rvert}}{\log \frac{R}{R_1}}\right)}$	$\cdots = \frac{\cdots}{\cdots \sin\left(\pi \frac{\log \frac{R_2}{\lvert z\rvert}}{\log \frac{R_2}{R_1}}\right)}$	,,
564	8 de sus	$\ldots = \frac{1}{2} \int_{m_1(r)}^{M_1(r)} \frac{\cdots}{\cdots \sin\left[\pi \frac{\log \frac{M(r')}{t}}{\log \frac{M_1(r)}{m_1(r)}}\right]}$	$\ldots = \frac{1}{2} \int_{m_1(r)}^{M_1(r)} \frac{\cdots}{\cdots \sin\left[\pi \frac{\log \frac{M(r')}{t}}{\log \frac{M_1(r')}{m_1(r')}}\right]}$	,,

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:	greșeala provine din vina:
564	3 de jos	$\cdots \dfrac{\cdots}{\operatorname{tg}\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\cdots}{\log\dfrac{M_1(r')}{m_1(r)}}\right]}$	$\cdots \dfrac{\cdots}{\operatorname{tg}\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\cdots}{\log\dfrac{M_1(r')}{m_1(r')}}\right]}$	Editurii
564	1 de jos	$\dfrac{\operatorname{tg}\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\cdots}{\log\dfrac{M_1(r)}{m_1(r')}}\right]}{\operatorname{tg}\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\cdots}{\log\dfrac{M_1(r)}{m_1(r)}}\right]}\cdots$	$\dfrac{\operatorname{tg}\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\cdots}{\log\dfrac{M_1(r')}{m_1(r')}}\right]}{\operatorname{tg}\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\cdots}{\log\dfrac{M_1(r')}{m_1(r')}}\right]}\cdots$	„
565	2 de sus	$\left[\dfrac{\log\dfrac{M_1(r')}{m_1(r')}}{r+r}\right]^2 \leqslant \dfrac{\operatorname{tg}\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\cdots}{\log\dfrac{M_1(r)}{m_1(r)}}\right]}{\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\cdots}{\log\dfrac{M_1(r')}{m_1(r)}}\right]}\dfrac{\cdots}{\left[\cdots\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\log\dfrac{M_1(r)}{m_1(r)}}{\log\dfrac{M_1(r')}{m_1(r')}}\right]}\cdots$		
			$\left[\dfrac{\log\dfrac{M_1(r')}{m_1(r')}}{r'+r}\right]^2 \leqslant \dfrac{\operatorname{tg}\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\cdots}{\log\dfrac{M_1(r')}{m_1(r')}}\right]}{\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\cdots}{\log\dfrac{M_1(r')}{m_1(r')}}\right]}\dfrac{\cdots}{\left[\cdots\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\log\dfrac{M_1(r')}{m_1(r)}}{\log\dfrac{M_1(r')}{m_1(r')}}\right]}\cdots$	„
575	4 de jos	$\{n\}$	$\{\alpha_n\}$	„
578	(24)	$\cdots + \left(\overset{2}{1,s}+1\right)\cdots$	$\cdots + \left(\alpha_{1,s}^2+1\right)\cdots$	„
587	5 de sus	$\cdots = \dfrac{[-2y\cdots}{\cdots}\cdots$	$\cdots = \dfrac{-2y[\cdots}{\cdots}\cdots$	„
646	4 de jos	$(-1)\sum_{\lvert k\rvert=2m}\cdots$	$(-1)^m\sum_{\lvert k\rvert=2m}\cdots$	„
647	1 de sus	$\Omega < R^{(n)}$	$\Omega \subset R^{(n)}$	„
648	6 de sus	$\cdots\dfrac{dT(t)}{dt} = (A-\beta I)\,T(t)$	$\cdots\dfrac{dT(t)_\varphi}{dt} = (A-\beta I)T(t)\varphi, \varphi\in D_A.$	„
649	1 de sus	$(H'\,\Omega)$	$H'(\Omega)$	„
649	5 de sus	$0<t<T',$	$0<t<T,$	„
649	15 de sus	și deci $\dfrac{\partial v}{\partial t} Av,$	și deci $\dfrac{\partial v}{\partial t} = Av,$	„
650	7 de jos	$\cdots = T(t)\,\varphi_k \int_0^t \cdots$	$\cdots\, T(t)\,\varphi_k + \int_0^t \cdots$	Tipografiei
650	5 de jos	$\cdots = e^{-\beta t}\,(\eta + \int_0^t e^{\beta s}$	$\cdots = e^{\beta t}(\eta + \int_0^t e^{-\beta s}$	Editurii
651	2 de sus	$\ldots \leqslant \eta_i e \int_0^t g(s)ds, \ldots \leqslant \eta_i e^{\beta t} e \int_0^t g(s)\,ds.$	$\ldots \leqslant \eta_i e^{\int_0^t g(s)ds}, \ldots \leqslant \eta_i e^{\int_0^t g(s)ds}$	Tipografiei

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:	greșeala provine din vina:
652	5 de sus	$\| h(p) \| \cdots$	$\| h(P) \| \cdots$	Editurii
652	20	$\cdots \varepsilon,\ k_n\, k_m \geqslant \cdots$	$\cdots \varepsilon,\ k_n\, k_m > \cdots$	,,
652	11 de jos	$Re(-Iu, u)\ \cdots (-\Sigma^* u, u) \cdots$	$\cdots Re(-L\,u, u) \cdots (-L^* u, u) \cdots$	Tipografiei
653	4 de sus	$T(t-s)\, f(x, s)\, ds \cdots$	$f(x, s)\, ds \cdots$	Editurii
653	15 de sus	$\cdots < (\omega, \omega),$	$\cdots < \beta\,(\omega, \omega),$	,,
653	8 de jos	$u'(x, t) \cdots$	$u(x, t) \cdots$	,,
654	13 de sus	$\cdots e^{\int_s^t k(\tau)\, d\tau}\, ds.$	$\cdots e^{\int_s^t k(\tau)\, d\tau}\, ds.$	,,
655	17 de jos	$i\,\Delta + D$	$i\,\Delta \oplus (D)$	,,
655	14 de jos	$\cdots \sum e^{i\beta n t}\, U_n(x)$	$\cdots \sum e^{i\beta_n t}\, U_n(x)$	,,
656	14 de sus	$\lambda E - A,$	$\widetilde{\lambda} E - A,$	,,
658	3 de sus	$\cdots \left[\overline{v}_1 \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right] \cdots$	$\cdots \left[\overline{v}_1 \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right] \cdots$	,,
659	11 de jos	$\cdots \frac{\partial u}{\partial x_j}\, d\Omega$	$\cdots \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_j}\, d\Omega$	,,
660	2 de sus	$\cdots r = \sum \cdots$	$\cdots r^2 = \sum \cdots$	,,
660	6 de sus	$\int_\Omega u \cdot u\, d\Omega \cdots$	$\int_\Omega u \cdot \overline{u}\, d\Omega \cdots$	,,
662	13 de jos	$= -i\,(A + V(x)) \cdots$	$= i\,(\Delta + V(x)) \cdots$	,,
664	9 de sus	$\beta\ \ 0$	$\beta = 0$	,,
664	10 de sus	$L + \beta\ \ 0,$	$L + \beta = 0,$	,,
664	6 de jos	$\cdots \cos.(n, x_j) \mid = \cdots$	$\cdots \cos(n, x_j)\,\|_S = \cdots$	,,
665	14 de jos	$\beta = 0$	$\beta < 0$	,,